

通过模型学解题
中学物理专辑

带电粒子的 运动问题

主 编 王兴桃
副主编 王继珩



安徽教育出版社

通过模型学解题·中学物理专辑

带电粒子的 运动问题

主 编 王兴桃

副主编 王继珩

编 写 何国平 黄道根 姚静规

安徽教育出版社

(皖)新登字 03 号

带电粒子的运动问题

何国平 黄道根 姚静规

安徽教育出版社出版发行

(合肥市金寨路 381 号)

新华书店经销 合肥南方激光照排部照排

安徽书刊印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张:2.5 字数:50,000

1995 年 3 月第 1 版 1996 年 3 月第 2 次印刷

印数:6,001—11,000

ISBN7-5336-1673-1/G·2110

定价:2.00 元

发现印装质量问题,影响阅读,请与本厂联系调换

献·给·读·者

《通过模型学解题》(物理)丛书是围绕高中物理教材,结合中学教学实际编写的学生课外读物。本丛书突破按知识体系谋篇布局的常规,力图引导学生换一种新的角度去窥视中学物理图景,领悟分析和解决物理问题的思路。

什么叫物理模型?物理模型就是抽象化了的物理研究对象、条件或过程。物理模型可划分为实体模型与过程模型两大类。

实体模型是研究对象或条件的抽象。质点、点电荷、点光源、光滑轨道、单摆、理想气体、匀强电场、匀强磁场、核式结构的原子等,都属于实体模型。

过程模型是对物理过程的抽象。直线运动、圆周运动、简谐运动、等温过程、静电平衡、稳恒电流、带电粒子在电场与磁场中的运动、导体在磁场中的运动等等，都是过程模型。

物理模型，按其性质特征、规模大小及相互联系，可以划分为不同的层次。本丛书以过程模型为结构框架，各分册有体现第一层次模型的书名和体现第二、三层次模型的简明目录。所谓“通过模型学解题”，就是根据物理问题的基本性质和特征，条分缕析，剖切成各个层次的过程模型，并抓住同一模型中各类问题的共同特性，例举有代表性的实体模型，综合运用各种物理知识，各种定理、定律，运用不同的观点、方法，归纳出解决问题的一般途径和方法技巧。

本丛书在研究具体问题时，以文字演算为主，避免繁琐的数值计算，从而使解决问题的方法更具广泛性，更显得逻辑严密。

按物理模型构建丛书框架，在不同层次的模型上展示物理图景，是一种新的编写体裁，新的尝试，前无经验，谬误和不妥之处难免，敬请读者批评指正。

王兴桃

1994年2月

本书主要研究带电粒子在电场中和磁场中的运动问题。

作为研究对象的带电粒子，如果是电子、质子、原子核或离子，当它们在电场和磁场中运动时，只要考虑电场力和磁场力，重力是不需要考虑的。这将是我们要予以重点研究的问题。如果研究的是带电的液滴、小球、小滑块在电场和磁场中的运动问题，这时不仅要考虑电场力和磁场力，而且还要考虑重力、弹力和摩擦力。

研究的方法是分析对象的受力情况，写出它的运动方程，进而求得问题的答案。这种方法适用于解决带电粒子的平衡问题、匀变速（直线或曲线）运动问题，圆周运动问题或螺旋运动问题等。与受力分析方法相比，能量分析方法显得十分简捷、方便。特别是当带电粒子作非匀变速曲线运动时，我们无法写出它的运动方程，这时能量分析的方法特别有效。能量分析法的关键是计算带电粒子运动过程中各个力所做的功，在功的计算基础上运用动能定理。

在大多数情况下，我们将综合运用受力分析与能量分析两种方法研究、解决典型的问题，阐述解决实际问题的一般途径。

目 录

一、带电粒子在电场中的运动	1
●带电粒子被电场加速问题	1
●带电粒子被电场偏转问题	7
●带电粒子在点电荷电场中运动问题	11
●带电粒子在变化电场中运动问题	13
●思考与练习	18
二、带电粒子在磁场中的运动	22
●带电粒子在匀强磁场中运动的基本特征	23
●带电粒子在磁场中运动的应用问题	26
●思考与练习	32
三、带电粒子在电、磁场中的运动	36
●电场与磁场方向一致的情形	36
●电场与磁场方向相互垂直的情形	38
●思考与练习	43
四、考虑重力作用时带电粒子的运动	47
●带电粒子受电场力与重力作用问题	47
●带电粒子受磁场力与重力作用问题	50
●带电粒子受电场力、磁场力和重力作用问题	52
●带电粒子受电场力、磁场力、重力、弹力和摩擦力 作用问题	56
●思考与练习	67
参考答案	72

一、带电粒子在电场中的运动

所谓带电粒子，指的是几何尺寸很小的带电体，它带有一定的电量 q ，具有很小的质量 m 。

在电场中，带电粒子受电场力作用。同时，还受重力作用。可是，往往在研究带电粒子在电场中的运动问题时，只计算带电粒子所受的电场力，而忽略所受的重力。这是由于带电粒子所受的重力，远小于它所受的电场力，像电子、 α 粒子、质子、离子等带电粒子，都属此例。

当研究带电尘埃、带电液滴、带电小球、带电小滑块时，它们所受的重力跟它们所受的电场力，大小可以相比拟。此时，重力对带电粒子运动的影响，再也不能不考虑了。这类需要考虑重力作用的带电粒子的运动问题，我们将专门予以讨论。

带电粒子在匀强电场中由于受电场力的作用，导致加速或偏转，表现出不同的运动形式。这里首先就带电粒子被电场加速和偏转两种情况，研究带电粒子在电场中的运动问题。

● 带电粒子被电场加速问题

带电粒子在匀强电场中，受电场力作用而加速，电场力对带电粒子做功，动能将发生变化。如图 1-1 所示，真空中有一对平行金属板，板中央有孔 A 、 B ，两板间距为 d ，两板与电池组相连。保持两板间电压为 U ，板间电场强度为 E ，一个质量为 m 、电量为 q 的带正电荷的粒子，在 A 孔处释放，粒子将如何运动？

在电场力的作用下，带电粒子获得加速度，向 B 孔作匀加速直线运动，其加速度

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}$$

带电粒子穿出 B 孔时的速度

$$v_B = \sqrt{2as} = \sqrt{2(qE/m) \cdot d}$$

如果带电粒子不是在 A 孔处自由释放, 而是以初速度 v_A 垂直金属板由 A 孔射入, 则带电粒子从 B 孔穿出的速度

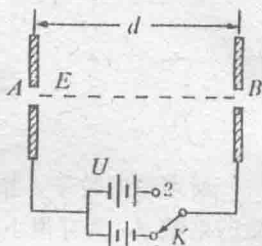


图 1-1

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2as} = \sqrt{v_A^2 + 2(qE/m) \cdot d}$$

带电粒子从 B 孔穿出的速度, 也可以用能量观点求得。即在电场中 A 、 B 两点间移动电荷时, 电场力做的功等于电量和这两点间的电势差 U 的乘积: $W = qU$ 。根据动能定理: $qU = \frac{1}{2}mv_B^2$

$-\frac{1}{2}mv_A^2$, 得 $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2qU/m}$ 。若初速为零, 则 $v_B = \sqrt{2qU/m}$ 。结果与前面的讨论是一致的。

当带电粒子以初速度 v_A 垂直金属板, 由 A 孔射入瞬间, 立即将图 1-1 中单刀双掷开关 K , 拨向触点 2。此时两板间换以反向电场, 带电粒子所受电场力与初速度反向, 则带电粒子开始作匀减速直线运动。如果要问带电粒子从 B 孔穿出的速度多大, 不妨通过具体的数值来讨论一下。

例如, 已知板间反向电压 $U = 500$ 伏, 粒子的带电量 $q = 3.2 \times 10^{-19}$ 库仑, 质量 $m = 6.4 \times 10^{-27}$ 千克, 带电粒子穿入 A 孔速度 $v_A = 1 \times 10^4$ 米/秒。由已知条件可知, 带电粒子作匀减速直线运动。若套用前面分析所得的公式计算粒子抵达 B 孔的速度:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{v_A^2 - 2(qE/m) \cdot d} = \sqrt{v_A^2 - 2qU/m} \\ &= \sqrt{(1 \times 10^4)^2 - 2 \times 3.2 \times 10^{-19} \times 500 / 6.4 \times 10^{-27}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{-499 \times 10^8}$$

显然，计算结果没有意义，说明带电粒子不能到达 B 孔。

判断带电粒子能否到达 B 孔的方法很多，例如，可以用能量分析的方法，假设带电粒子抵达 B 孔的动能为 E_K' ，由动能定理

$$E_K' - E_K = -qU$$

可以求得： $-qU = -3.2 \times 10^{-19} \times 500 = -1.6 \times 10^{-16}$ (焦耳)。

由已知条件，从 A 孔射入时粒子动能为：

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \times 6.4 \times 10^{-27} \times (1 \times 10^4)^2 \\ &= 3.2 \times 10^{-19} \text{ (焦耳)} \end{aligned}$$

显然， $E_K' < 0$ ，表明粒子无法抵达 B 孔。

带电粒子在匀强电场中作匀加速直线运动，遵循运动学规律。示波管电子枪中电子的加速运动就是一个实例。电子枪的结构示意图如图 1-2 所示，整个装置被封闭在真空中。当阴极 K 被加热而有电子逸出时，受 KA 间加速电场的作用，向板 A 作加速运动。

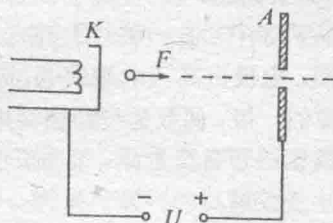


图 1-2

电视机显象管电子枪射出的电子束，其加速电压数量级为 10^4 伏特。这是很高的电压，技术上难度大。因此，用提高加速电压的方法来获得高速带

电粒子，受到技术限制。为了克服这一困难，技术上采用多次加速的办法，使带电粒子获得高速。

设想有图 1-3 所示的多个电场，使带电粒子实现多级加速，每个电场的加速电压可不必很高，但经多级加速，总能量可得

到 $E_K = n \cdot qU$ ，随着电场数 n 的增加，粒子即可获得足够大的能量。

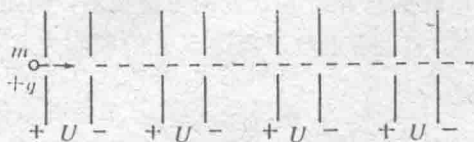


图 1-3

进一步分析，你会发现在图 1-3 中，相邻两级加速电场的中间，还夹着一个反向电场，将起着减速作用，实际上达不到逐级加速的目的。为了消除减速电场的影响，人们制成了有效的多级加速装置——直线加速器。我国试验成功的北京正负电子对撞机，需要几千兆电子伏特 (MeV) 的高能电子束流，就是让电子在直线加速器中加速得到的。

直线加速器是在一个高真空容器中，由多个电极装置而成 (如图 1-4 所示)。电极是用空心金属圆筒制成，这些圆筒同轴，圆筒两底中心在一轴线上开有小孔。图中标画的电极，是其剖面图。电极由高频电源供电，奇数标号圆筒电极 1、3、5...，接电源的一极；偶数标号的圆筒电极 2、4、6...，接电源的另一极。电极 1 内装有粒子源，不断产生带电粒子。

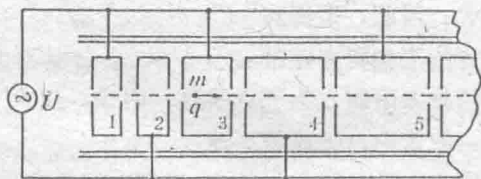


图 1-4

当电源提供奇数号圆筒电极为正极时，偶数号圆筒电极则为负极。带正电荷粒子进入电极 1、2 圆筒缝隙间，在电压 U 的作用下，从电极 1 被加速到电极 2，带电粒子的动能增加 qU 。带电粒子进入圆筒电极 2 内部后，由于导体内部场强为零，粒子在圆筒电极中匀速前进。若把电极圆筒的长度逐级适当增大，使得粒子在每个电极圆筒内飞行的时间，正好等于交流高频电源周期的 $1/2$ ，以保证这个带电粒子在刚要离开电极圆筒 2 时，电源极性恰好改变，使奇数号圆筒电极为负，偶数号圆筒电极为正。此时，带电粒子恰离开电极圆筒 2，进入圆筒电极 2、3 缝隙。粒子又一次被加速，运动到圆筒电极 3 时，动能又增加了 qU 。

同理，电极圆筒 3 内部场强为零，粒子在电极圆筒 3 中作匀速直线运动。当粒子刚穿出电极圆筒 3 时，电源极性又恰好变换，使得奇数电极为正，偶数电极为负。粒子在电极 3、4 缝隙间再一次得到加速，进入下一圆筒电极，粒子动能再一次增加 qU ……，依次类推，尽管每对加速电极间的电压并不太高，但经过多次加速，带电粒子就可以获得高速。

围绕直线加速器可以提出一系列问题。

例如，电量为 q 、质量为 m 的正离子，沿直线加速器圆筒电极的轴线射入圆筒，并在圆筒间、圆筒与靶间的缝隙处受电场力作用而加速（如图 1-5 所示）。已知离子进入第一圆筒左端时的速度为 v_1 ，电源电压为 U ，频率为 ν 。为使打到靶上的离子获得最大能量，各个圆筒的长度应满足什么条件？并求出这种情况下打到靶上的离子的能量。（设圆筒内部没有电场，圆筒间缝隙很小，离子穿过缝隙的时间不计。）

分析：为了使正离子获得最大能量，要求离子每次穿越缝隙时，都要获得加速，这就需要相应缝隙前一个圆筒的电势高

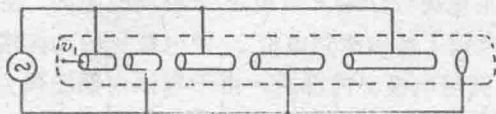


图 1-5

于后一个圆筒的电势。为此，离子穿过每个圆筒的时间都恰好等于交流电源的半个周期。

由于圆筒内无电场，离子在筒内作匀速直线运动，离子穿越缝隙时间不计，则第 n 个圆筒的长度应该是

$$L_n = v_n \cdot \frac{T}{2} = \frac{v_n}{2\nu} \quad (1)$$

式中 v_n 为离子在第 n 个圆筒内的速度， T 为交流电的周期。离子进入第 n 个电极圆筒瞬间，离子已被电场加速 $(n-1)$ 次。由动能定理可得，离子进入第 n 个圆筒瞬间，电场力对离子所做的功

$$W = (n-1)qU = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2)$$

解①、②式可得圆筒长度应满足条件

$$L_n = \frac{1}{2\nu} \cdot \sqrt{\frac{2(n-1)qU}{m} + v_1^2}$$

相应离子打到靶上瞬时速度为 v_{n+1} ，打到靶上的能量

$$E_K = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2$$

由于离子打到靶上之前经过 n 次加速，于是可列方程：

$$nqU = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

则离子打到靶上时动能为：

$$E_K = nqU + \frac{1}{2}mv_1^2$$

● 带电粒子被电场偏转问题

电场对带电粒子作用的另一表现,是使带电粒子发生偏转。偏转的条件是,带电粒子初速度的方向与电场方向的夹角 $\theta \neq 0^\circ$, 且 $\theta \neq 180^\circ$, 即两者方向不一致。这时带电粒子的运动类似平抛运动或类似斜抛运动 (图 1-6)。

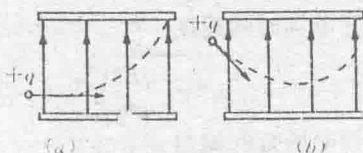


图 1-6

例如,真空中有一对平行金属板,两板间电压为 U , 板间有匀强电场。两板相距为 d , 板长为 l 。今有一些带电粒子,所带电量为 $+q$, 质量为 m , 以初速 v_0 , 沿与金属板平行的方向,从板间左侧中央进入电场,由右侧下板边缘飞出(如图 1-7)。

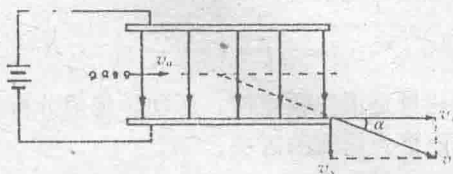


图 1-7

带电粒子进入电场后,所受电场力与场强同向,与初速 v_0 方向垂直,由于带电粒子在 v_0 方向上不受力而保持初速不变;在场强方向上受电场力作用,作初速为零的匀加速直线运动。所

以，带电粒子在电场中飞行的时间为：

$$t = \frac{l}{v_0}$$

带电粒子的横向加速度

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}$$

带电粒子离开电场时的横向速度

$$v_y = at = \frac{qE}{m} \cdot \frac{l}{v_0} = \frac{qEl}{mv_0}$$

带电粒子离开电场时的速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{qEl}{mv_0} \right)^2}$$

带电粒子离开电场时的偏角

$$\alpha = \arctg \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \arctg \left(\frac{qUl}{m.l v_0^2} \right)$$

带电粒子离开电场时的横向位移（侧位移）

$$\begin{aligned} s_y &= \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} \cdot \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 \\ &= \frac{qUl^2}{2mdv_0^2} \end{aligned}$$

带电粒子离开电场时的总位移

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{qUl^2}{2mdv_0^2} \right)^2}$$

以上这些量是用牛顿定律、运动学规律分析而得，也可广开思路，选取更为简捷的方法。

例如，前面寻求带电粒子离开电场时的速度，还有另外两条思路。

思路一：根据动量定理讨论。

由图 1-7 的速度平行四边形，可

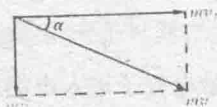


图 1-8

变换成动量平行四边形,如图 1-8 所示。图中, $mv_x = mv_0$, $mv_y = F \cdot t$, 由平行四边形法则,

$$(mv)^2 = (mv_0)^2 + (F \cdot t)^2$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } v &= \sqrt{v_0^2 + F^2 t^2 / m^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + (qEl/mv_0)^2} \end{aligned}$$

思路二: 选用能量关系讨论。带电粒子穿越电场的过程中, 电场力对带电粒子做功, 而使带电粒子动能增加。由动能定理

$$qE \cdot s_y = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

$$\text{侧移 } s_y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{qUt^2}{2mdv_0^2} \quad (2)$$

将②式代入①式得离开电场时的速度

$$v = \sqrt{v_0^2 + (qEl/mv_0)^2}$$

现代科学技术中, 常应用电场对带电粒子的偏转作用, 称之为“电偏转”, 示波管就是技术应用的一例。

如图 1-9 所示, 示波管由电子枪、偏转电极和荧光屏组成, 管内是真空。

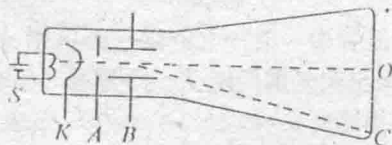


图 1-9

在不加偏转电场时, 电子枪发出的高速电子流, 沿直线飞抵荧光屏, 在荧光屏中央 O 处出现一个小亮点。若在水平放置的偏转电极间加上竖直向上的偏转电场, 电子将向下发生偏转, 荧光屏上的亮点下移。

如果再安装一对竖直放置的偏转电极，接上相应电压，电子束将在水平方向偏移。

如果两组偏转电极分别加以相应的变化电压，带电粒子束将同时受水平和竖直放置的偏转电极的控制，荧光屏上将出现相应的波形，这就是示波管。

在涉及示波管电子偏转的问题中，应当注意管中电子的运动特点，电子从阴极抵达荧光屏，不同阶段的运动性质是不同的。在电子枪内，电子作加速运动，然后以某一速度进入偏转电场。在偏转电场中作类似平抛运动。离开电场后，电子以穿出的即时速度作匀速直线运动。

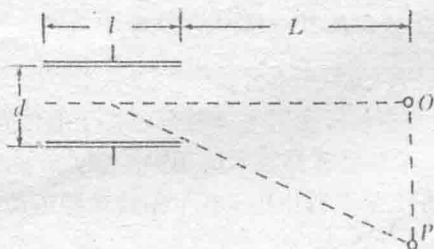


图 1-10

例如，在示波管中，偏转电极板长 $l=4$ 厘米，板间距 $d=1$ 厘米，极板边缘至荧光屏间距 $L=18$ 厘米（如图 1-10）。若电子在电子枪中获得速度 $v=2.4 \times 10^7$ 米/秒，沿水平方向进入偏转电极间电场，最后落到荧光屏的 P 点，已知加在偏转电极间的电场场强 $E=1.6 \times 10^4$ 伏/米，试问，偏转距离 OP 是多大？

分析：电子束打在荧光屏的亮点在竖直方向上的偏移距离（ OP ）包括两部分：在偏转电场作用下，在竖直方向上的侧移 s_1 与电子穿出电场后作匀速直线运动在竖直方向上产生的位移 s_2 ，即 $OP=s_1+s_2$ 。