国家工科基础课程力学教学基地系列教材·教辅

工程流体力学(水力学)学习指导

Gongcheng Liuti Lixue
Shuilixue Xuexi Zhidao

禹华谦 ◎ 主编
西南交通大学国家工科基础课程力学教学基地 ◎ 组编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

工程流体力学（水力学）
学习指导

禹华谦　主编
西南交通大学国家工科基础课程力学教学基地　组编

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 简 介

本书是为高等院校土建类或近土类各专业编写的教学辅导书，可供土建类或近土类各专业本科、专科（包括自学考试、网络教育、成人教育）等学生使用，也可作为教师教学及有关科技人员报考硕士研究生或参加注册工程师等的参考用书。

全书采用本章导学、典型例题、自测试题等结构编写。内容包括：绪论，流体静力学，流体动力学理论基础，量纲分析与相似理论，流动阻力与水头损失，孔口、管嘴及恒定有压管流，明渠恒定流，堰流，渗流，综合性模拟试题等。为便于使用，书末附有自测试题及综合性模拟试题的解答及提示。

图书在版编目（CIP）数据

工程流体力学（水力学）学习指导/禹华谦主编. —成都：西南交通大学出版社，20010.10
ISBN 978-7-5643-0867-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①禹… Ⅲ.①工程力学：流体力学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①TB126

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 172323 号

国家工科基础课程力学教学基地系列教材 · 教辅

工程流体力学（水力学）学习指导

禹华谦 主编

*

责任编辑 万 方
特邀编辑 麦继婷
封面设计 墨创文化
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蓉军印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm 印张: 7.125
字数: 178 千字
2010 年 10 月第 1 版 2010 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0867-4
定价: 12.00 元

前　言

自 1999 年 1 月出版了《水力学学习指导》以来，承蒙国内部分高等院校选作土建类或近土类专业工程流体力学或水力学课程的教学辅导书，深受读者好评。在此基础上，为配合教材《工程流体力学（水力学）》（第二版）的教学需求，根据读者反馈的意见和作者们近年来的教学实践，编写了本学习指导书。

本学习指导采用本章导学、典型例题和自测试题等结构修编，其中自测试题按客观性试题和主观性试题两种类型设计。为便于读者检验学习效果，书末还附有一套综合性模拟试题。

本学习指导由禹华谦教授主编，参加修编工作的有禹华谦（一、三、八章及综合性模拟试题）、陈春光（二、四、九章）、麦继婷（五、七章）、杨庆华（六章）和罗忠贤、王耀琴、郭瑞（自测试题、综合性模拟试题解答及提示）。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者给予指正。

编　者

2010 年 8 月于西南交通大学

目　　录

第 1 章　绪　论

§1.1　本章导学

本章主要介绍工程流体力学的研究内容及流体的相关概念。

1. 流　体

自然界中容易流动的物质称为流体，它包括液体和气体。从形态上看，流体与固体的主要区别在于固体具有固定的形状，而流体则随容器而方圆。从力学分析的角度看，固体一般可承受拉、压、弯、剪、扭，而流体则几乎不能承受拉力，处于静止状态下的流体还不能抵抗剪力，即流体在很小剪力作用下将发生连续不断的变形。至于气体与液体的差别则主要在于气体容易压缩，而液体难以压缩，另外液体能形成自由表面而气体则不能。

2. 流体连续介质模型

流体连续介质模型假定流体是由质点（或微团）毫无间隙的组成，其物理性质各向同性，且在空间和时间上具有连续性，因此可采用数学中的连续函数作为分析的工具。

工程流体力学在研究流体运动时，由于只研究外力作用下的机械运动规律，而流体分子除稀薄气体外，相互间一般是极为密集的，因此将流体视为连续介质既有必要又有可能。

3. 流体的主要物理性质

流体的主要物理性质主要包括惯性（密度、重度）、黏滞性（黏度）和压缩性等。其中，表征惯性的密度 ρ 和重度 γ 是大家较为熟悉的，主要掌握 γ 与 ρ 的关系 $\gamma = \rho g$ 及影响因素，应熟记在常温下，淡水的密度 $\rho = 1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}$ 和重度 $\gamma = 9\ 800\ \mathrm{N/m^3}$。

黏滞性是流体在运动状态下抵抗剪切变形速率能力的量度，是流体的固有属性，是流体运动中产生机械能损失的根源。流体的黏滞性具有传递运动和阻碍运动的双重性，实际中我们见到的流体流动就是这对矛盾的统一。黏滞性是本章学习的重点，要求掌握牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ 及两个黏度系数 μ（动力黏度）与 ν（运动黏度）的关系 $\mu = \rho\nu$，理解液体和气体的黏度随温度变化的差异以及 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ 的物理意义，了解流体内摩擦力与固体间摩擦力的区别。

压缩性应了解体积压缩系数（或称体积压缩率）κ 和体积弹性系数（或称体积模量）K 的意义及关系，建立“不可压缩流体”概念。在工程流体力学中，一般视流体为不可压缩。

4. 作用在流体上的力

在工程流体力学中，通常将作用在流体上的力分为表面力和质量力两大类。

表面力作用在被研究流体的表面上，其大小与被作用的面积成正比，如法向压力和切向摩阻力。

质量力作用在被研究流体的每个质点上，其大小与被研究流体的质量成正比，如重力和惯性力。

在工程流体力学中，质量力常用单位质量力表示，所谓单位质量力，是指作用在单位质量流体上的质量力。

§1.2 典型例题

【例 1-1】 将体积 $V=2.5\text{m}^3$ 的 20℃ 水（密度 $\rho=998.23\text{kg/m}^3$）加温至 80℃（密度 $\rho'=971.83\text{kg/m}^3$），其体积将增加多少？

【解】 据质量守恒定律 $m=\rho V=\rho' V'$ 得体积增加量

$$\mathrm{d}V=V'-V=(\frac{\rho}{\rho}-1)V=(\frac{998.23}{971.83}-1)\times 2.5=0.0679\ \text{m}^3$$

本题若从 $\mathrm{d}m=\mathrm{d}(\rho V)=\rho\mathrm{d}V+V\mathrm{d}\rho=0$ 出发，解得

$$\mathrm{d}V=-\frac{V}{\rho}\mathrm{d}\rho=-(\frac{\rho'}{\rho}-1)V$$

$$=-\left(\frac{971.83}{998.23}-1\right)\times 2.5=0.066\ 1\text{m}^3$$

试问解答错在何处？为什么？请改正之。

【例 1-2】 当空气温度从 0℃ 增加至 20℃ 时，其运动黏度 ν 增加 15%，密度 ρ 减少 10%，试问相应的动力黏度 μ 增加多少（百分数）？

【解】 据

$$\begin{cases}\mu=\rho\nu\\ \mu+\mathrm{d}\mu=(\rho+\mathrm{d}\rho)(\nu+\mathrm{d}\nu)\end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=(1+\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho})(1+\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu})-1=(1-10\%)(1+15\%)-1$$

$$=3.5\%$$

本题若从 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}(\rho\nu)=\rho\mathrm{d}\nu+\nu\mathrm{d}\rho$ 出发，解得

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}=-10\%+15\%=5\%$$

试问解答错在何处？为什么？请改正之。

【例 1-3】 有一矩形断面的宽渠道，其水流速度分布为

$$u=0.002\frac{\gamma}{\mu}\left(hy-\frac{y^2}{2}\right)$$

式中，γ 为水的重度；μ 为水的动力黏度；h 为水深，$h=0.5$ m。试求渠底（$y=0$）处的切应力 τ_0。

【解】 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.002\frac{\gamma}{\mu}(h-y)$$

将其代入牛顿内摩擦定律可得断面上切应力分布

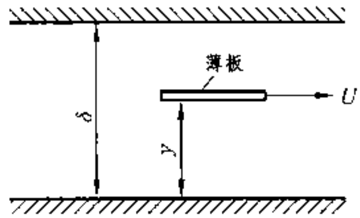
$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.002\gamma(h-y)$$

故 $\tau_0 = \tau|_{y=0} = 0.002\gamma h = 0.002 \times 9\,800 \times 0.5 = 9.8\ \text{N/m}^2(\text{Pa})$

【例 1-4】 如图所示，在 $\delta = 40\text{mm}$ 的两平行固定壁面间充满动力黏度 $\mu = 0.7\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的液体，其中有一面积 $A = 3\,600\ \text{mm}^2$ 的薄板（平行于壁面）以 $U = 15\ \text{m/s}$ 的速度沿薄板所在平面内运动，假定壁面间速度呈线性分布。

① 试求当 $y = 10\text{mm}$ 时，薄板运动的液体阻力 F；

② 若 y 可变，试求薄板运动的最小阻力 $F_{\min}$。



【例 1-4】图

【解】 运动薄板两侧受力大小不等，但方向相同。在忽略薄板厚度情况下，根据牛顿内摩擦定律可得薄板运动的液体阻力计算式

$$F = \mu\frac{U}{y}A + \mu\frac{U}{\delta - y}A = \frac{\mu UA\delta}{y(\delta - y)}$$

① 将题设数据代入上式可得薄板运动的液体阻力

$$F = \frac{0.7 \times 15 \times 0.0036 \times 0.04}{0.01 \times (0.04 - 0.01)} = 5.04\ \text{N}$$

② 若 y 可变，令

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = \mu UA\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\delta y - y^2}\right) = -\mu UA\delta\frac{(\delta - 2y)}{(\delta y - y^2)^2} = 0$$

得 $y = \delta/2$ 时薄板运动的液体阻力为极值。因

$$\left.\frac{d^2F}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=\delta/2} > 0$$

知该极值为极小值。故薄板运动的最小阻力

$$F_{\min} = F|_{y=\delta/2} = \frac{4\mu UA}{\delta}$$

$$= \frac{4 \times 0.7 \times 15 \times 0.0036}{0.04} = 3.78\ \text{N}$$

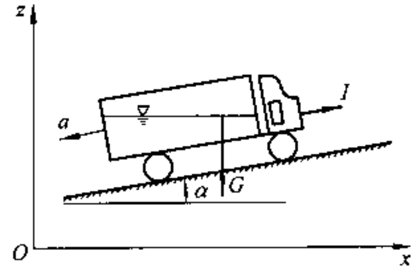
【例 1-5】 欲使水的体积减小 1.0%，则压强应增加多少？

【解】 取水的体积弹性系数 $K = 2 \times 10^9\ \text{N/m}^2$，则

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} = -2 \times 10^9 \times (-1.0\%) = 2 \times 10^7\ \text{N/m}^2 \approx 200 \text{ 个大气压}$$

由此可知，水的压缩性是极其微小的，因此在实际工程中，一般将水看作不可压缩流体，在实用上是完全允许的。

【例 1-6】 如图所示为一运水汽车，沿与水平面成 $\alpha = 15^\circ$ 角的路面行驶，其加速度为 $a = 2\ \text{m/s}^2$，试求作用于单位质量水体上的质量力在 x、y、z 方向的分量。



【例 1-6】图

【解】 车中水体受力如图所示，其质量力有重力 $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ 和惯性力 $\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{a}$，总质量力 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{I} = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}$，单位质量力为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$$

其各分量为 $f_x = a\cos\alpha = 2\cos 15^\circ = 1.93\ \text{m/s}^2$

$f_y = 0$

$f_z = -g + a\sin\alpha = -9.8 + 2\sin 15^\circ = -9.28\ \text{m/s}^2$

§1.3 自测试题

一、单项选择题

1-1 理想流体是指忽略(　　)的流体。

A 密度　　B 密度变化　　C 黏度　　D 黏度变化

1-2 不可压缩流体是指忽略(　　)的流体。

A 密度　　B 密度变化　　C 黏度　　D 黏度变化

1-3 在工程流体力学中,单位质量力是指作用在单位(　　)流体上的质量力。

A 面积　　B 体积　　C 质量　　D 重量

1-4 下面关于流体黏性的说法中,不正确的是(　　)

A 黏性是流体的固有属性

B 黏性是运动流体抵抗剪切变形速率能力的量度

C 流体的黏性具有传递运动和阻滞运动的双重性

D 流体的黏性随着温度的升高而减小

1-5 理想流体和平衡流体的(　　)等于零。

A 切向应力　　B 法向应力　　C 表面力　　D 质量力

1-6 作用在静止流体上的单位质量力(　　)。

A $f_x=0, f_y=0, f_z=0$　　B $f_x=-g, f_y=0, f_z=0$

C $f_x=0, f_y=-g, f_z=0$　　D $f_x=0, f_y=0, f_z=-g$

1-7 在国际单位制中,运动黏度 ν 的单位为(　　)。

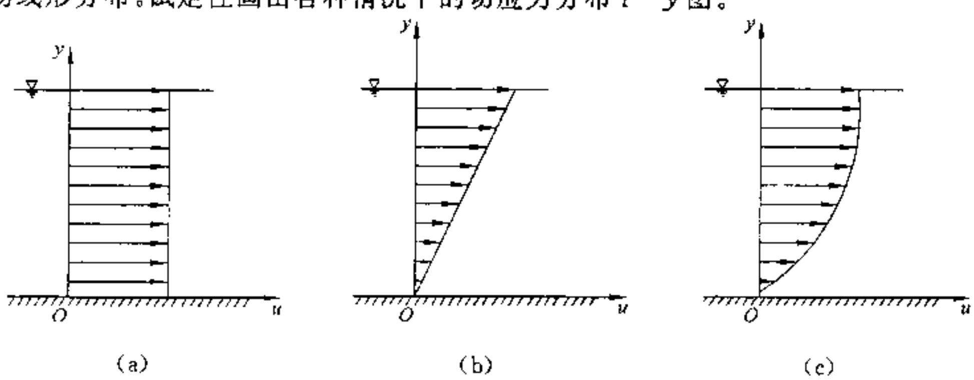
A m^2/s　　B N/m^3　　C kg/m^3　　D $N\cdot s/m^2$

1-8 某种流体的密度变化率 $\frac{d\rho}{\rho}=-1.0\%$,则该流体的体积变化率 $\frac{dV}{V}=$(　　)。

A -1.0%　　B 1.0%　　C -10%　　D 10%

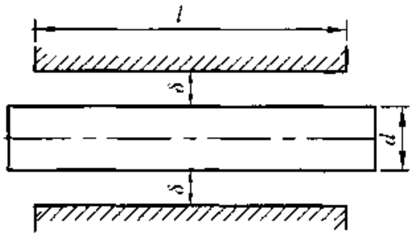
二、计算分析题

1-9 已知液体中的流速分布 u—y 如图中所示三种情况:(a) 均匀分布;(b) 线性分布;(c) 抛物线形分布。试定性画出各种情况下的切应力分布 τ—y 图。



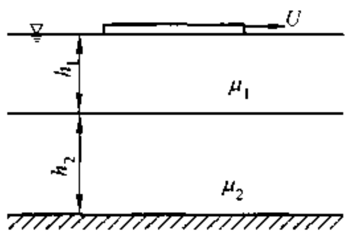
题 1-9 图

1-10　如图所示，已知转轴直径 $d=360\ \text{mm}$，轴承长度 $l=1\,000\ \text{mm}$，转轴与轴承之间的缝隙 $\delta=0.2\ \text{mm}$，其中充满动力黏度 $\mu=0.72\ \text{Pa}\cdot\text{s}$ 的润滑油，若轴的转速 $n=200\ \text{rpm}$，试求转轴克服润滑油黏性阻力所消耗的功率 N。



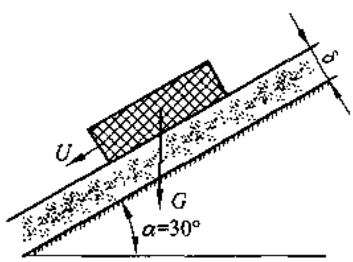
题 1-10 图

1-11　如图所示，液面上有一面积 $A=1\,200\ \text{cm}^2$ 的平板以速度 $U=0.5\ \text{m/s}$ 作水平移动，平板下液体分上下两层，其动力黏度和厚度分别为 $\mu_1=0.142\ \text{Pa}\cdot\text{s}$，$h_1=1.0\ \text{mm}$ 和 $\mu_2=0.235\text{Pa}\cdot\text{s}$，$h_2=1.4\ \text{mm}$，试求作用在平板上的内摩擦力 F。



题 1-11 图

1-12　一底面积为 40 cm × 45 cm，高为 1 cm 的木块，质量为 5 kg，沿着涂有润滑油的斜面向下作等速运动，如图所示。已知木块的运动速度 $U=1\ \text{m/s}$，油层厚度 $\delta=1\ \text{mm}$，由木块所带动的油层运动速度呈直线分布，试求油的动力黏性系数 μ。



题 1-12 图

第 2 章　流体静力学

§2.1　本章导学

本章主要介绍流体处于平衡状态时的力学规律及静止液体作用于平面和曲面上总压力的计算方法。

1. 流体静压强及其特性

流体处于平衡状态时，表面力只有压力，平衡流体的压力简称为静压力，单位面积上作用的静压力称为静压强。

静压强有两个重要特性：

① 静压强垂直于作用面，并沿着作用面内法线方向；

② 平衡流体中任何一点的压强大小与其作用面的方位无关。

2. 流体平衡微分方程

流体处于平衡时的力学规律可以通过建立流体微分体的力学方程得到，这就是

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

式中，f_x、f_y、f_z 为流体在 x、y、z 方向的单位质量力；p 为流体静压强。

平衡微分方程的综合形式为

$$\mathrm{d}p = \rho(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z)$$

3. 重力作用下流体静压强的分布规律

(1) 静压强分布规律

流体静止时质量力只有重力，即 $f_x = f_y = 0$，$f_z = -g$，代入流体平衡微分方程求解，并整理得如下流体静力学基本方程或静压强分布规律：

$$z + \frac{p}{\gamma} = C$$

$$p = p_0 + \gamma h$$

式中，p_0 为液面压强；h 为液面下深度；γ 为流体重度。

静水压强公式为本章重要公式之一，学习中必须掌握。另外在压强计算中还需掌握压强的单位、绝对压强、相对压强、真空值、等压面等概念。

(2) 绝对压强、相对压强、真空值

以绝对真空状态作为起量点的压强，称为绝对压强，以 p' 表示；以当地大气压起量的压强称为相对压强，以 p 表示。两者的关系为

$$p = p' - p_a$$

绝对压强 p' 小于当地大气压强 p_a 的数值称为真空值 p_v，即

$$p_v = p_a - p'$$

(3) 测压管高度、测压管水头及真空度

相对压强用液柱高度表示，称为测压管高度，即

$$h_A = \frac{p_A}{\gamma}$$

工程流体力学上，把任一点 A 的相对压强高度（即测压管高度）与该点在基准面以上的位置高度之和称为测压管水头，以 $z_A + \frac{p_A}{\gamma}$ 表示。

真空值用液柱高度表示，称为真空度，即

$$h_v = \frac{p_v}{\gamma} = \frac{p_a - p'}{\gamma}$$

(4) 等压面

液体中各点压强相等的面称为等压面。在重力作用下的静止液体中，等压面是水平面，但一定是同种、连续液体。等压面概念常用于压强的测量和计算中。

4. 液体的相对平衡

如果液体相对于地球是运动的，但各液体质点彼此之间及液体与器皿之间无相对运动，这种运动状态称为相对平衡，如等速直线运动、等加速直线运动和等角速度旋转的液体。

液体相对平衡时，服从流体平衡微分方程。液体相对平衡问题，一般先写出平衡时流体所受的质量力，再由平衡微分方程的综合形式求出压强的表达式、液面方程等。如对等角速度 ω 旋转的液体，其压强的表达式和液面方程分别是

$$p = p_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

和

$$z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

式中，r 为旋转液体计算点的半径。

5. 作用在平面上的静水总压力

(1) 解析法

静水总压力大小：

$$P = \gamma h_C \cdot A = p_C \cdot A$$

即受压面形心处相对压强 p_C 乘以受压面面积 A。

静水总压力的作用点：

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A}$$

计算中应注意 y_C、y_D 是从自由液面算起，并平行于作用面。

(2) 图算法

对于矩形平面上的静水总压力还可用下式计算：

$$P = A_P \cdot b$$

式中,A_P 为静水压强分布图的面积;b 为矩形平面宽度。

6. 作用在曲面上的静水总压力

作用在曲面上的静水总压力的计算分成水平方向分力和铅垂方向分力。

水平方向的分力

$$P_x = \gamma h_C \cdot A_x = p_C \cdot A_x$$

铅垂方向的分力

$$P_z = \gamma V_P$$

式中,V_P 是压力体的体积。压力体的确定是曲面上静水压力计算的重点,需要重点掌握。

总压力的大小与方向:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P_z}{P_x}\right)$$

式中,α 为总压力 P 的作用线与水平线间的夹角。

§2.2 典型例题

【例 2-1】 重度为 γ_1 和 γ_2 的两种不相溶液体装在如图所示的容器中,各液体深度如图所示。若 $\gamma_2 = 10\ \text{kN/m}^3$,当地大气压 $p_a = 98\ \text{kPa}$,试求 γ_1 和 A 点的绝对压强及相对压强。

【解】 首先求 γ_1,因为自由液面的压强均等于大气压强,又根据静止、连续、同种液体的水平面为等压面的规律,则 $p_M = p_N$。

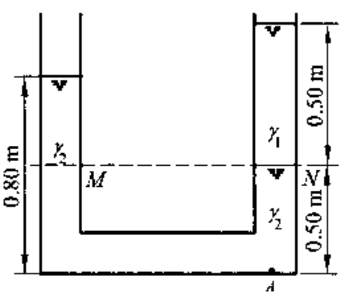
$$p_N = p_a + \gamma_1 \times 0.5$$

$$p_M = p_a + \gamma_2 (0.8 - 0.5)$$

由于 $p_M = p_N$,得

$$0.5\gamma_1 = (0.8 - 0.5)\gamma_2 = 0.3\gamma_2$$

所以 $$\gamma_1 = (0.3/0.5)\gamma_2 = 0.6 \times 10\ \text{kN/m}^3 = 6.0\ \text{kN/m}^3$$



【例 2-1】图

下面再求 A 点的压强:

A 点的压强无论从左侧液面还是右侧液面都可求出。

绝对压强

$$p'_A = p_a + 0.80\text{m} \times \gamma_2$$
$$= 98\ \text{kPa} + 0.80\ \text{m} \times 10\ \text{kN/m}^3 = 106\ \text{kPa}$$

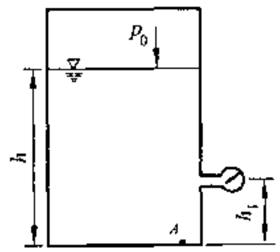
相对压强

$$p_A = p'_A - p_a = 106\ \text{kPa} - 98\ \text{kPa} = 8\ \text{kPa}$$

【例 2-2】 如图所示封闭水箱,已知液面的绝对压强 $p'_o = 81.5\ \text{kPa}$,当地大气压 $p_a = 98\ \text{kPa}$,水箱内水深 $h = 2.8\ \text{m}$,水箱右侧壁上的金属压力计距水箱底 $h_1 = 0.8\ \text{m}$。试求:

① 水箱内相对压强最小值和真空度最大值;

② 金属压力计的读数。



【例 2-2】图

【解】 ① 根据静水压强分布规律 $p = p_0 + \gamma h$ 可知，压强最小值是在液面，而液面上真空度最大。则

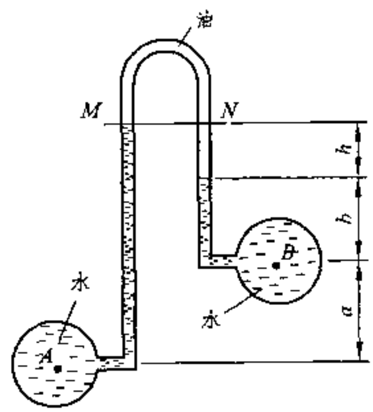
$$p_0 = p'_0 - p_a = 81.5\ \text{kPa} - 98\ \text{kPa} = -16.5\text{kPa}$$

真空度 $$\frac{p_{0v}}{\gamma} = \frac{p_a - p'_0}{\gamma} = \frac{98 - 81.5}{9.8} = 1.68\ \text{m}$$

② 由静水压强分布规律 $p = p_0 + \gamma h$ 可求得金属压力计测得的压强，注意压力计的读数是相对压强，所以

$$\begin{aligned} p_{计} &= p_0 + \gamma(h - h_1) \\ &= -16.5\text{kPa} + 9.8\text{kN/m}^3 \times (2.8\ \text{m} - 0.8\text{m}) \\ &= 3.1\ \text{kPa} \end{aligned}$$

【例 2-3】 如图所示差压计，上部为油，$\gamma_{油} = 9.0\ \text{kN/m}^3$，下部为水，已知 $h = 0.10\ \text{m}$，$a = 0.10\ \text{m}$。试求 A、B 两点的压强差及测压管水头差。



【例 2-3】图

【解】 取等压面 $N-M$，根据压强公式

$$p_A = p_M + \gamma(h + b + a)$$

$$p_B = p_N + \gamma_{油} h + \gamma b$$

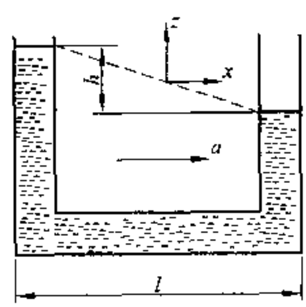
因 $p_M = p_N$，则

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= \gamma(h + b + a) - \gamma_{油} h - \gamma b \\ &= \gamma a + (\gamma - \gamma_{油})h \\ &= 9\ 800 \times 0.1 + (9\ 800 - 9\ 000) \times 0.1 \\ &= 1\ 060\ \text{Pa} = 1.06\ \text{kPa} \end{aligned}$$

又因 $z_A - z_B = -a$，则测压管水头差

$$\begin{aligned} (z_A + \frac{p_A}{\gamma}) - (z_B + \frac{p_B}{\gamma}) &= (\frac{\gamma - \gamma_{油}}{\gamma})h \\ &= (\frac{9\ 800 - 9\ 000}{9\ 800}) \times 0.1 \\ &= 0.008\ 2\ \text{m} = 8.2\ \text{mm} \end{aligned}$$

【例 2-4】 为了测定运动物体的加速度，在运动物体上装一直径为 d 的 U 形管，测得管中液面差 $h = 0.05\ \text{m}$，两管的水平距离 $l = 0.3\ \text{m}$，如图所示。求加速度 a 的大小。



【例 2-4】图

【解】 等加速直线运动时，流体除受重力作用外还受惯性质量力的作用。单位质量力应为

$$f_x = -a,\quad f_y = 0,\quad f_z = -g$$

代入流体平衡微分方程为

$$\mathrm{d}p = \rho(-a\,\mathrm{d}x - g\,\mathrm{d}z)$$

等压面方程为 $-a\,\mathrm{d}x - g\,\mathrm{d}z = 0$

由此可解得液面方程为

$$z = -\frac{a}{g}x$$

将 $x=-\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{2}h$ 代入，得加速度

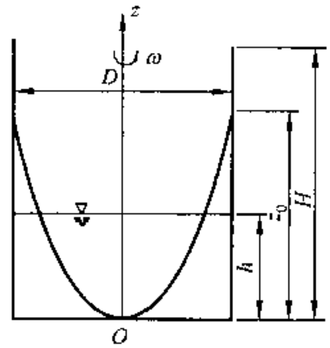
$$a=g\frac{h}{l}=9.8\times\frac{0.05}{0.3}=1.633\ \mathrm{m/s^2}$$

【例 2-5】 如图所示，圆柱形容器的直径 $D=800$ mm，高度 $H=700$ mm，原有水深 h 为 300 mm，现使容器绕其中心轴旋转，问转速 n 为多大时，圆柱形容器底面开始露出水面？此时边壁的水深为多少？

【解】 容器绕中心轴等角速度旋转时，液面方程为

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

当 $r=\frac{D}{2}$ 时，$z=z_0=\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{D}{2}\right)^2$，其中 ω 未知。



【例 2-5】图

根据旋转前后水的体积相等的原则来求出 ω，进而再求出 $n=60\ \frac{\omega}{2\pi}$。旋转前水的体积 $V_0=\frac{\pi}{4}D^2h$，旋转后水的体积 $V_1=\frac{\pi}{4}D^2\ z_0-V_{抛}$。

旋转抛物体的体积可由下式求出：

$$V_{抛}=\int_0^{z_0}\pi r^2\mathrm{d}z=\int_0^{z_0}\pi\ \frac{2g}{\omega^2}\ z\ \mathrm{d}z=\frac{\pi\omega^2D^4}{64g}$$

因为 $V_0=V_1$，所以有

$$\frac{\pi}{4}D^2\ h=\frac{\pi}{4}D^2\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{D}{2}\right)^2-\frac{\pi\omega^2D^4}{64g}$$

得 $\qquad\omega=4\ \sqrt{gh}/D=4\ \sqrt{9.8\times0.3}/0.8=8.57\ \mathrm{rad/s}$

则 $\qquad n=60\times\frac{\omega}{2\pi}=60\times\frac{8.57}{2\pi}=81.88\ \mathrm{r/min}$

侧壁水深 $\qquad h_0=z_0=\frac{\omega^2(D/2)^2}{2g}=\frac{8.57^2}{2g}\left(\frac{0.8}{2}\right)^2\approx0.60\ \mathrm{m}$

因为 $H>h_0$，故没有溢出，以上计算正确。

补充说明：将 $\omega=4\ \sqrt{gh}/D$ 代入 $z_0=\omega^2(D/2)^2/2g$，有 $z_0=2h$。这说明开口旋转容器内只要液体没有溢出，旋转轴上液面降低的数值等于容器壁上液面升高的数值，根据这一推论，上题可直接从 $z_0=(\omega^2/2g)(D/2)^2=2h$ 求出 ω，这一点可以推广到其他情况，读者可以验证。

【例 2-6】 一铅直矩形闸门，如图(a) 所示。已知 $h_1=1$ m，$h=2$ m，门宽 $b=1.5$ m，试用解析法及图算法求静水总压力 P 的大小及作用点。

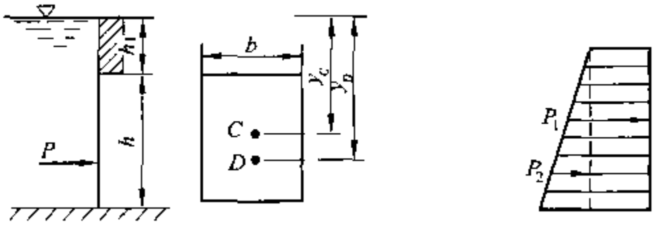
【解】

① 用解析法求：

$$P=\gamma h_C\cdot A$$

式中，$\gamma=9\ 800\ \mathrm{N/m^3}$；$h_C=h_1+h/2=1+2/2=2$ m；$A=bh=1.5\times2=3\ \mathrm{m^2}$，代入上式得

$$P=9\ 800\times2\times3=58.8\times10^3\ \mathrm{N}=58.8\ \mathrm{kN}$$



【例 2-6】图

作用点　　$y_D = y_C + \dfrac{I_C}{y_C \cdot A}$

$$y_C = h_C = 2\ \text{m},\ I_C = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 1.5 \times 2^3 = 1\ \text{m}^4$$

代人式中得

$$y_D = 2 + \frac{1}{2 \times 3} = 2.17\ \text{m}$$

② 用图算法求：

首先绘出平面闸门的压强分布图见图(b)。将压强分布图分解为矩形和三角形，则矩形部分压力为

$$P_1 = A_{P_1} b = \gamma h_1 hb = 9.8\ \text{kN/m}^3 \times 1\ \text{m} \times 2\ \text{m} \times 1.5\text{m} = 29.4\ \text{kN}$$

P_1 的作用点

$$y_{D_1} = h_1 + \frac{h}{2} = 1.0 + \frac{2}{2} = 2.0\ \text{m}$$

三角形部分压力为

$$P_2 = A_{P_2} b = \frac{1}{2}\gamma h^2 b = \frac{1}{2} \times 9.8\ \text{kN/m}^3 \times 2^2\ \text{m}^2 \times 1.5\text{m} = 29.4\ \text{kN}$$

P_2 的作用点

$$y_{D_2} = h_1 + \frac{2}{3}h = 1.0 + \frac{2}{3} \times 2 = 2.33\ \text{m}$$

则静水总压力　$P = P_1 + P_2 = 29.4 + 29.4 = 58.8\ \text{kN}$

再利用合力矩定理，可得

$$y_D = \frac{y_{D_1} \times P_1 + y_{D_2} \times P_2}{P} = \frac{2.0 \times 29.4 + 2.33 \times 29.4}{58.8} = 2.165\ \text{m}$$

【例 2-7】　一圆形闸门如图所示，闸门直径 $D = 1.2$ m，$\alpha = 60°$，$l = 2.5$ m，门的顶端有铰固定，若不计门重，求启动闸门所需的向上拉力 T。

【解】　闸门所受静水总压力

$$P = \gamma h_C \cdot A$$

式中，　$h_C = \left(l + \dfrac{D}{2}\right)\sin\alpha$；$A = \dfrac{\pi}{4}D^2$

故　　$P = \gamma\left(l + \dfrac{D}{2}\right)\sin\alpha\,\dfrac{\pi}{4}D^2$

$$= 9.8\ \text{kN/m}^3 \times \left(2.5\ \text{m} + \frac{1.2\ \text{m}}{2}\right)\sin 60° \times \frac{\pi}{4}(1.2\ \text{m})^2 = 29.756\ \text{kN}$$