

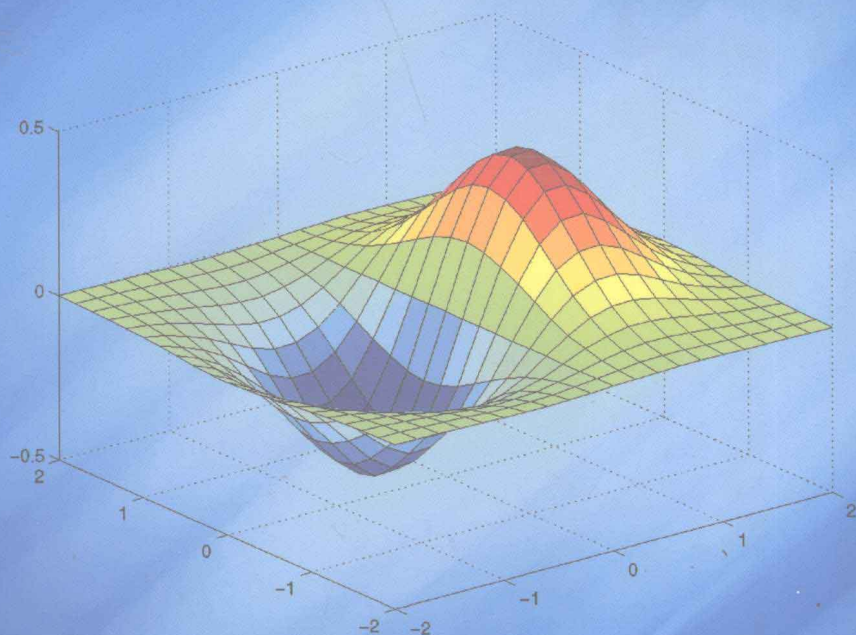


浙江省“十一五”重点教材建设项目

MATLAB 版

大学物理

马 涛◎著





浙江省“十一五”重点教材建设项目

MATLAB 版

大学物理

马 涛 © 著

 浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 版大学物理 / 马涛著. — 杭州: 浙江工商大学出版社, 2011. 12

ISBN 978-7-81140-437-1

I. ①M… II. ①马… III. ①物理学—高等学校—教材 IV. ①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 254605 号

MATLAB 版大学物理

马 涛 著

责任编辑 陈维君 孙一凡

封面设计 陈思思

责任印制 汪 俊

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail: zjgsupress@163.com)

(网址: <http://www.zjgsupress.com>)

电话: 0571-88904980, 88831806(传真)

排 版 杭州朝曦图文设计有限公司

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 12.75

字 数 300 千

版 印 次 2011 年 12 月第 1 版 2011 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-81140-437-1

定 价 29.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88804227

前 言

在人类上下求索的漫漫历史过程中,如果说自然科学的诞生是一缕让人们摆脱了蒙昧的曙光,那物理学则是一颗冉冉升起的璀璨智慧之星,照亮了人类的前行之路。

物理学发展至今,其展现出的科学世界观和方法论,深刻影响着人类对物质世界的基本认识,影响着人类的思维方式和社会生活,其基本理论渗透在自然科学的各个领域,应用于生产技术的许多部门,是自然科学和工程技术的基础。物理学以其严谨的逻辑、精确的数学表述、自洽的理论体系,令人感叹。

基于上述共识,物理学成为国内外当代理工科大学本科教育中最重要和最经典的一门基础课程。但是,一旦奉为经典,在让人肃然起敬的同时,也会让人敬而远之。教师不敢摆脱束缚,学生视其为畏途。物理学的教与学要么陷入应试教育的过度学习,使学生迷失在细枝末节而不能自拔,要么就是毕恭毕敬地复制“经典”,而僵化了其中蕴含的创造性。

从 5000 年人类文明史的历程来看,自然科学如果从哥白尼 1543 年发表的《天体运行论》算起至今还不到 500 年,物理学即使从伽利略 1623 年发表《关于两大世界体系的对话》算起,也不到 400 年的历史。物理学发展的历史就是一个不断创新、探索的历史,自然科学的秘密是无限的,人类探求知识的能力也是无止境的。经典物理学优美大厦的建立就是基于不断的除旧布新,而从经典物理到相对论和量子物理的嬗变,无不是破茧而出、羽化成蝶的过程。从使用的工具上看,物理学初创时和几何学有着紧密的联系,牛顿和莱布尼茨发明的微积分,使物理学产生了一个质的飞跃,而现代计算机技术又使物理学的发展如虎添翼。尽管接受大学教育后,更多的人并不从事科学研究事业,但是培养一种探究的思维方式,训练一种严密的逻辑分析能力,掌握一种研究自然科学的现代工具,应该是物理学这门课程责无旁贷的责任。众所周知,实验研究、理论演算和计算机模拟是目前科学研究的三种主要方法,作为大学物理理论课,如何将经典物理学中严谨的逻辑、精确的数学表述和当代的计算机技术有效地结合起来?如何在这些经典的领域中找到创新点?对此,我们经过多年的探索和实践,在并不尽如人意的大环境下,无论如何我们也不愿放弃一直秉承的理念:学校最基本的、最重要的功能就是育人,培养创新型人才是我们的天职。我们一直做最耐心、最努力、最不懈的坚持。一门课程可能改变不了什么,但是,执著和放弃却有云泥之别。

为了降低使用计算机的门槛,我们选择了高校中比较流行的 MATLAB 语言。MATLAB 有“数字化演算草稿纸”的美称,其语言简单,函数库丰富,图形化功能强,容易自学,上手简单。基于数学上的考虑,通常在大学物理中,只能通过微积分求出特定点的物理值,数学这个利器往往又反过来变成束缚人们的枷锁,但是利用 MATLAB 语言的计算机数值计算技术,我们不仅可以求出经典的电场、磁场的空间分布,还可以将其直观地图示出来;我们不仅可以重复开普勒的计算,还可以通过计算机动态设计同步卫星轨道、规划飞行器登月的轨迹;你可以模拟分子热运动直接“观察”其微观运动规律,也可以亲耳“聆听”多普勒效应;你可以动态演示干涉

图样的变化,也可以深入原子内部,探究电子的分布规律。计算机技术的引入突破了大学物理教学中单向、静态的模式,使其恢复立体、动态的原貌,恢复其研究、探索的本质。当然任何工具都只能是人脑思考的延伸,工具可以解决复杂问题,解决一些手算无法解决的问题,但电脑代替不了人脑的分析,我们引入计算机的原则可视为与实验探索一样,与物理研究的基本精髓是一致的。

一部精炼的、将计算机 MATLAB 语言与大学物理紧密结合的专著尚不多见,我们的工作具有创新性,本书以大学物理为先修课程,可作为数学建模参考教材,也可作为单独的选修课教材,书中的程序仅供参考,对于书中选择的物理范例,及编制的每一个 MATLAB 程序都不一定是最佳的,希望得到专家和同行的批评指正,也希望有老师和同学能加入其中,编制出更优秀的程序来。书中如有疏漏或错误请专家不吝指正,作者的邮箱地址是 matao@zjgsu.edu.cn。如需要书中程序,可用 e-mail 与作者联系,也可登录本课程网站 www.ejpkc.com/physics 下载。

若使用本书作为选修课教材,作者建议设为 32 课时,教师可用 6 课时左右讲解上篇中有关 MATLAB 的基础知识;下篇中每章可设定 3 课时左右,每章教师仅讲解一个选题,其他问题由学生自由选择。如下篇第六章教师可以只讲解平抛小球跳跃问题,其他内容让学生根据兴趣自主选择、独立研究,学生既可对书中程序进行修改甚至重新编程,也可利用所学知识解决教科书中其他类似问题,这样本课程就可以认为达到教学基本要求了。

本书获得浙江省教育厅重点教材项目资助,获得浙江省精品课程资助,写作期间得到浙江省教育厅新世纪教改项目《整合式、探究型大学物理 TEC 教学方法研究与实践》经费和浙江省自然科学基金经费(项目号 Y1080264)的资助,在此一并深表感谢。感谢浙江工商大学信息与电子工程学院领导对大学物理教学工作的支持,感谢教研室全体同事在课程建设上的共同努力和在相关问题上的有益讨论。

最后,作者还要感谢浙江工商大学出版社对本书出版的支持,感谢责任编辑为本书付出的辛勤劳动。

马 涛

2011. 11. 6 于杭州

目 录

上篇 MATLAB 应用基础

第 1 章	MATLAB 简介	2
1.1	MATLAB 操作界面	2
1.2	基本演算功能	5
1.3	在线帮助(help)功能	7
第 2 章	数值的运算	8
2.1	矩阵的构造	8
2.2	矩阵元素的操作	11
2.3	矩阵的基本计算	13
2.4	矩阵的指令函数计算	17
2.5	元素群的构造	19
2.6	元素群的基本计算	20
2.7	元素群的函数计算	23
第 3 章	常用绘图指令	26
3.1	二维图形	26
3.2	三维图形	31
3.3	特殊图形	35
第 4 章	程序编制	43
4.1	指令文件(Script File)	43
4.2	函数文件(Function File)	45
4.3	流程控制	46
第 5 章	常用指令函数	54
5.1	数据分析	54
5.2	多项式	61
5.3	函数功能及数值分析	66
5.4	数据类型	72

下篇 MATLAB 大学物理应用范例

第 6 章 质点运动学	76
6.1 概念及规律	76
6.2 范例解析	78
第 7 章 质点动力学	86
7.1 概念及规律	86
7.2 范例解析	87
第 8 章 机械振动	100
8.1 概念及规律	100
8.2 范例解析	101
第 9 章 机械波	122
9.1 概念及规律	122
9.2 范例解析	124
第 10 章 气体分子运动论和热力学基础	132
10.1 概念及规律	132
10.2 范例解析	134
第 11 章 电磁学	147
11.1 概念及规律	147
11.2 范例解析	150
第 12 章 波动光学	168
12.1 概念及规律	168
12.2 范例解析	170
第 13 章 量子物理基础	183
13.1 概念及规律	183
13.2 范例解析	185
参考文献	198

上 篇

MATLAB 应用基础

第 1 章 MATLAB 简介

1.1 MATLAB 操作界面

MATLAB 是由 Matrix(矩阵)和 Laboratory(实验室)两个单词的前三个字母组成的,是一款用于科学和工程计算的交互式计算机软件包。关于该软件的最新信息,读者可以登录 MathWorks 公司的网站进行了解。MATLAB 随着版本的不断升级,功能也不断加强,但本书基本定位在大学一、二年级具有高等数学和大学物理基础的入门者,因而只涉及各个版本都通用的基本语法,不涉及那些专门的工具箱,目的是指给读者一条独特的路径,希望读者能沿着这条路径尽快走进数字世界的大门。

1.1.1 命令窗口

在 Windows 操作系统的桌面上,用鼠标双击 MATLAB 图标,即可进入 MATLAB 的工作环境,如图 1.1.1 所示。

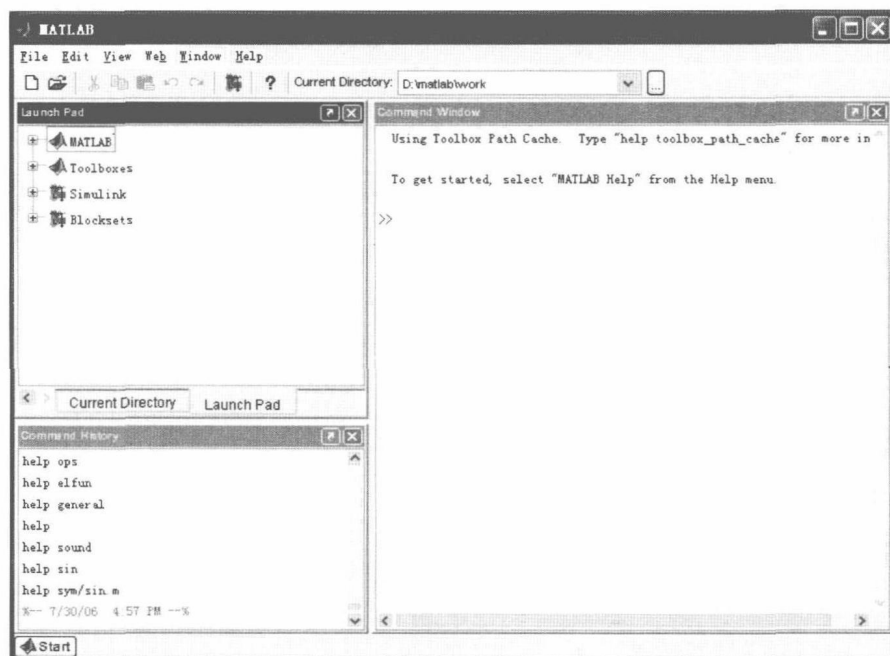


图 1.1.1 MATLAB 工作窗口

MATLAB 默认的设置是显示三个窗口。左侧分割为上下两个子窗口,左上为资源目录窗口(Launch Pad),左下为历史命令窗口(Command History),右侧为命令窗口(Command Window)。命令窗口是人机对话的主要环境,在提示符“>>”后键入有关的命令即可得出相应

的结果。窗口的布局可以通过点击菜单:View\Desktop Layout 来改变,读者可按照各自的使用习惯做出相应的选择。

为了使用方便,MATLAB 内部只有一种数据格式,即双精度的格式(64 位二进制,对应十进制 16 位有效数字和 ± 308 次幂)。MATLAB 采用这种唯一的双精度数据格式进行存储和运算,但数字显示格式却可以根据使用习惯来设定,不同的数字显示格式并不影响内部的计算。数字显示格式有 8 种,缺省的是 5 位数字的定点表示(Numeric format short),在此缺省的显示下,如圆周率 π 显示为

```
>> pi
```

```
ans=
```

```
3.1416
```

若选择了 Numeric format long 的数字显示方式,则圆周率 π 显示为

```
>> pi
```

```
ans=
```

```
3.14159265358979
```

另外,在不同数字显示格式下,屏幕的数字显示形式还有两种选择,默认显示形式是稀疏形式(Numeric display loose),屏幕上显示的每行之间有空行,若以紧凑显示形式(Numeric display compact),则屏幕上显示的每行之间便没有空行了。

若想改变这些显示格式,可通过点击菜单:File\Preferences,然后在对话框 Command Window Preferences 中,通过 Text display 的选项做出相应选择。

在命令窗口中,初学者应注意如下几点:

- (1)所有的输入需按下回车键才能执行。
- (2)用 Esc 键可以清除当前的输入,↑键可调出上一行命令,↓键可调出下一行命令。
- (3)命令、变量区分大小写。
- (4)若不需要在屏幕上显示计算结果,可在命令后加上分号“;”。
- (5)在命令窗口有一些常用命令:

clc	清除工作窗口中的显示内容	clf	清除图形窗口中的显示内容
clear	清除内存	cd	改变当前工作目录
dir	列出指定目录下的文件	who	列出内存中的变量名等

- (6)退出命令窗口可通过点击菜单 File\Exit MATLAB,或在命令窗口键入 quit 来实现。

1.1.2 图形窗口

若想建立一个图形窗口,可在命令窗口键入:figure,每次键入该命令 MATLAB 会产生一个空白的图形窗口并自动编号,键入绘图指令便可在该图形窗口上绘制计算结果了。若要人为规定或调用第 i 个新图形窗口,则可键入 figure(i)。图形窗口上相应的菜单和按钮可对图形进行相应的处理。如图 1.1.2 所示,是键入 logo 命令后显示的图形。

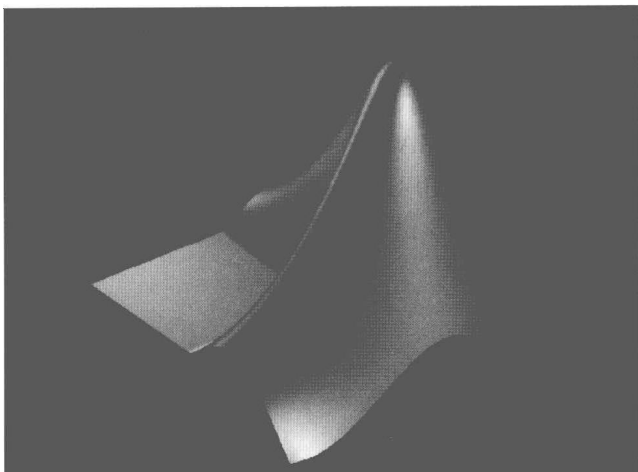


图 1.1.2 Logo 命令显示图形

1.1.3 文本编辑窗口

MATLAB 有两种操作方式,一种是在命令窗口中一行一行地输入命令,计算机对每一行命令作出反应,这种方式只能解决较简单的问题。当要利用 MATLAB 处理较为复杂的问题时,如既要进行数值计算,同时又要绘制计算结果,这类包含很多命令的综合问题就要通过文本编辑器编制扩展名为 .m 的文本文件来解决。启动 MATLAB 后,文本编辑窗口可以通过点击 MATLAB 命令窗口工具栏上相应按钮来打开,命令窗口工具栏第一个按钮是用 MATLAB 建立一个空白的文本文件,第二个按钮是用来打开原有的程序文件。编辑有关 M 文件时,也可以不启动 MATLAB,在 Windows 桌面上,通过点击:开始\程序\MATLAB 6. x\M-file editor来启动文本编辑窗口,M-file editor 是 MATLAB 自带的文本编辑工具,是一个独立的可执行文件。打开了一个 M 文件的文本编辑窗口如图 1.1.3 所示。



图 1.1.3 M 文件文本编辑窗口

1.2 基本演算功能

每个人在开始使用一款较为复杂的软件时,多少都会有无从下手的感觉。MATLAB 是一个标准 Windows 下的软件,与其他 Windows 下的软件有相仿的使用方法,在做较为复杂的应用前,可以先把它当成一个万能的计算器。使用 MATLAB 进行数学计算,就像在草稿纸上演算数学题一样方便,一样随心所欲,故有“科学计算演算草稿纸”的美称。

在 MATLAB 的命令窗口中可以执行与科学计算器非常相似的计算。大多数的语法甚至是相同的。

例如要计算 4 的 3 次方,输入命令

```
>> 4^3
```

显示的输出结果是

```
ans=
```

```
64
```

计算 5 的平方根,输入命令

```
>> sqrt(5)
```

显示输出结果是

```
ans=
```

```
2.2361
```

计算 4 的自然对数,输入命令

```
>> log(4)
```

则显示结果

```
ans=
```

```
1.3863
```

MATLAB 将对数、指数、三角函数等初等函数,作为内建函数工具箱,放在安装盘的目录 matlab\toolbox\matlab\elfun 下,现将其主要内容列于表 1.2.1。

表 1.2.1 MATLAB 内建函数列表

函数名	含义	函数名	含义
sin/cos	正弦/余弦函数	exp	指数函数
tan/cot	正切/余切函数	log	自然对数函数
sec/csc	正割/余割函数	log10	常用对数函数
sinh/cosh	双曲正弦/双曲余弦函数	log2	以 2 为底的对数函数
tanh/coth	双曲正切/双曲余切函数	sqrt	平方根函数

续表

函数名	含义	函数名	含义
sech/csch	双曲正割/双曲余割函数	pow2	2 的幂函数
asin/acos	反正弦/反余弦函数	fix	朝零方向取整
atan/acot	反正切/反余切函数	floor	朝负无穷方向取整
asec/acsc	反正割/反余割函数	ceil	朝正无穷方向取整
asinh/acosh	反双曲正弦/反双曲余弦函数	mod(a,b)	取余,与 b 同号
atanh/acoth	反双曲正切/反双曲余切函数	rem(a,b)	取余,与 a 同号
asech/acsch	反双曲正割/反双曲余割函数	round	四舍五入
abs	绝对值函数	sign	符号函数
angle	相位角函数	perms	排列
conj	共轭复数函数	nchoosek	组合
real	复数实部函数	lcm	最小公倍数
imag	复数虚部函数	gcd	最大公约数

MATLAB 的运算次序与标准的代数规则相同,这在进行混合运算时非常重要。

初学时我们往往会发现,必须正确地输入一条命令,然后执行该命令,而当发现输入错误命令不能执行时,却无法“撤消”进行修改。这时,通常可用键盘右侧的“↑”键在已经执行过的命令列表中向上移动,一旦找到合适的命令,则可以对该命令重新编辑,然后敲回车执行新的正确命令。另外,当退出 MATLAB 或执行了 clc 命令后,命令窗口将被清空。但是,历史命令子窗口(Command History)会保留所有使用过的命令列表(除非当使用一台公用计算机,出于安全的考虑,在菜单 file\preferences 下将 Command History 设置为:Don't save history file)。历史命令窗口非常有用,它可以重现以前在 MATLAB 中执行过的命令,并且可将其复制到命令窗口。复制的方法有两种:一种是双击历史窗口某命令,即可直接在命令窗口执行;另一种是单击并拖动相应的代码行到命令窗口,回车执行或重新编辑再执行。当命令窗口中进行的计算越来越复杂时,利用上述历史命令窗口的方法将非常有效。

在熟悉了 MATLAB 的演算纸功能后,读者可能会不满足这些基本的计算,能不能求一些自定义函数的函数值呢? 在后面的章节我们会专门介绍用编程的方法来构造函数,这里先介绍一个非常实用的内联函数指令 inline 构造函数的方法。

如要建立一个函数

$$fy = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

使用 inline 指令的操作方法如下

```
>> fy=inline('v0 * sin(alpha) * t-0.5 * g * t^2','v0','alpha','g','t')
fy=
Inline function:
fy(v0,alpha,g,t)=v0 * sin(alpha) * t-0.5 * g * t^2
```

若要求 $v_0 = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $g = 9.8$, $t = 0.5$ 时的函数值, 做如下输入

```
>> y=fy(5,pi/2,9.8,0.5)
y=
    1.2750
```

读者可以仿照上述方法, 随意构造自己所需的函数。

1.3 在线帮助(help)功能

MATLAB 的指令繁多, 要把这些指令全部掌握才开始使用 MATLAB 是不可能也是完全没有必要的, MATLAB 这样的科学软件要在使用中学习, 边学边用, 熟能生巧。即使是在熟悉了 MATLAB 的一些基本功能后, 读者还会发现一些函数的深入用法及功能。另外, MATLAB 版本不断更新, 功能不断加强, 不断有新的指令及新的工具箱推出, 因此借助 MATLAB 的在线帮助系统, 读者可以方便地找到自己想要的信息。充分利用在线帮助功能, 是学习这款有数千条指令且不断更新的科学软件的捷径。

在命令窗口直接键入 help, 屏幕上将显示系统中已经装入的指令函数库的名称。

键入 help+函数库名字, 如 help ops, 即显示出 ops 函数库, 也就是“运算符和特殊字符函数库”中各函数名。

键入 help+指令函数名, 就能把该指令函数的语法和功能等基本信息在命令窗口中显示出来。读者在阅读本书或学习 MATLAB 时, 如若遇到对某指令函数用法不清楚时, 用上述方法就可以最快捷地获得 MATLAB 的在线帮助。

如想查询指令 ode23 的用法, 可做如下操作

```
>> help ode23
```

由此可在命令窗口得到如下显示

ODE23 Solve non-stiff differential equations, low order method.

[T,Y]=ODE23(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN=[T0 TFINAL] integrates the system of differential equations $y'=f(t,y)$ from time T0 to TFINAL with initial conditions Y0. Function ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding to $f(t,y)$. Each row in the solution array Y corresponds to a time returned in the column vector T. To obtain solutions at specific times T0,T1,...,TFINAL (all increasing or all decreasing), use TSPAN=[T0 T1 ... TFINAL].

帮助系统会告诉我们, 这个指令函数是用于求解非刚性微分方程的, 是低阶的一种方法, 帮助系统同时给出了详细的参数用法, 并且举了一个例子, 最后还列出与此相关的其他微分方程求解函数, 如 ode45、ode113、ode15s 等。

除了用上述方法获得帮助外, 还可以在主菜单中点击 Help\MATLAB help, 由此打开一个帮助窗口从中获得所需的帮助, 另外, 还可以在安装目录 matlab\help\pdf_doc\matlab 文件夹中找到一个 PDF 格式的说明书, 从中获得所需内容。

第 2 章 数值的运算

MATLAB 语言是由早期专门用于矩阵运算的计算机语言发展而来的,它最基本也最重要的功能是进行实数和复数的矩阵运算。因矢量(vector)可作为矩阵的一列或一行,标量(scalar)可作为只含一个元素的矩阵,故矢量和标量都可以作为特殊的矩阵来处理。

2.1 矩阵的构造

矩阵可以用不同的方式在 MATLAB 中构造,如直接列出矩阵元素的方法和通过 MATLAB 构造矩阵指令函数的方法等,其中最基本的方法是以直接列出元素的形式输入。

输入小矩阵通常使用直接排列元素的形式,把矩阵的元素直接排列到方括号中。每行内的元素间用空格或逗号分开,矩阵行与行之间用分号隔开。在定义矩阵的方括号后,用回车就会立即显示运算结果,如果不希望显示结果,就在方括号后以分号结尾。此时运算仍然执行,只是不作显示。定义矩阵不需要说明维数,可以直接使用复数。

例如在指令窗口输入

```
>> A=[1 3 5;2 4 6;7 8 9]
```

或输入

```
>> A=[1,3,5;2,4,6;7,8,9]
```

也可以分行输入,用回车键代替分号(或分号后回车)。这样的输入形式更接近我们平时使用矩阵的数学格式

```
>> A=[1,3,5
```

```
2,4,6
```

```
7,8,9]
```

都可得出输出结果

A=

```
1    3    5
```

```
2    4    6
```

```
7    8    9
```

输入后的 **A** 矩阵将一直保存在工作空间中,除非被替代或用 clear 指令清除,**A** 矩阵可以随时调出来备用。

如果矩阵一行的元素太多需要换行时,在换行处使用一个省略号“...”,回车后在下一行继续输入。注意省略号要放在表示矩阵元素间隔的空格(逗号)或表示行分隔的分号后。

可定义 **F** 矩阵

```
>> F=[16,2,3,13;5,11,10,8;9,7,6,12;...
4,14,15,1]
F=
```

```
16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
```

为了构造含有大量元素的矩阵, MATLAB 提供了一些基本矩阵的生成函数及运算符:

zeros	零矩阵	ones	么矩阵
eye	单位矩阵	rand	随机数矩阵
randn	正态随机数矩阵	cell	空矩阵
meshgrid	画三维曲面时的 X,Y 网格	magic	魔方矩阵
linspace	等间距矢量	logspace	对数均分矢量
:	冒号运算符		

这些函数及运算符的有关用法试举例如下。

零矩阵 zeros 是 $m \times n$ 维矩阵, 矩阵中所有元素均为 0。

```
>> T=zeros(3,2)
```

```
T=
```

```
0     0
0     0
0     0
```

么矩阵 ones 是 $m \times n$ 维矩阵, 矩阵中所有元素均为 1。

```
>> U=ones(3,2)
```

```
U=
```

```
1     1
1     1
1     1
```

单位矩阵 eye 是 $n \times n$ 元方阵, 其对角线上的元素为 1, 其余元素均等于 0。

```
>> V=eye(3)
```

```
V=
```

```
1     0     0
0     1     0
0     0     1
```


魔方矩阵 magic 是 $n \times n$ 元方阵, 其元素由 1 到 $n \times n$ 的自然数组成, 每行、每列及两对角线上的元素之和均等于 $(n^3 + n)/2$ 。

```
>> W=magic(3)
```

W=

```
8     1     6
3     5     7
4     9     2
```

等间距矢量函数 linspace(a,b,n), 在 a 与 b 之间均分地产生 n 个点值, 形成 $1 \times n$ 元矢量。

```
>> L=linspace(1,25,5)
```

L=

```
1     7    13    19    25
```

冒号运算符 是一个功能强大的运算符, 可用于定义新矩阵和修改现有矩阵。当冒号分隔两个数时, 可定义一个等间距矩阵, 其间距为 1, 如

```
>> H=1:8
```

H=

```
1     2     3     4     5     6     7     8
```

当冒号分隔三个数时, 则中间一个数成为间距, 即步长, 如

```
>> S=0:pi/3:pi
```

S=

```
0     1.0472    2.0944    3.1416
```

MATLAB 还允许用若干已经定义的小矩阵来定义一个大矩阵, 但必须保证行列数正确, 恰好填满全部元素。例如, 以下语句

```
>> M=[U,V;W,T]
```

M=

```
1     1     1     0     0
1     1     0     1     0
1     1     0     0     1
8     1     6     0     0
3     5     7     0     0
4     9     2     0     0
```