高等教育“十二五”规划教材

Probability and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

刘应安 主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

刘应安　主　编
夏业茂　副主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是一本高等院校非数学专业(本科三批,简称本三)的概率论与数理统计教材.全书共10章,内容包括随机事件、一维随机变量、二维随机变量、数字特征、大数定律与极限定理、样本与统计量、参数估计、假设检验、方差分析和一元线性回归分析等,各章均配有适量习题,书后附有习题答案,书末给出了6个附录.本书一方面力求使用较少的数学知识,注重从实际问题出发,导引出概率统计概念,并用多样性的实例加以阐释;另一方面针对本三学生的基础和农林院校专业特点,保留概率论与数理统计的基本内容但适当降低难度,尽量与农林实际相结合.

本书可作为高等院校工科、农学、经济、管理等专业的概率统计课程的教材,也可作为实际工作者的自学参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘应安主编.—北京:科学出版社,2013
(高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-03-036533-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第016541号

责任编辑:张振华 / 责任校对:刘玉靖
责任印制:吕春珉 / 封面设计:科地亚盟

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年1月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2014年1月第二次印刷 印张:12 1/4
字数:275 000

定价:27.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈骏杰〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62132124 (VA03)

前　　言

近些年来，为了满足人们对高等教育的迫切需求，开拓高等教育资源，扩大高校办学规模，由普通本科院校和社会力量合作办学的独立学院应运而生．教材建设是独立学院保证人才培养质量的重要工作，也是独立学院可持续发展的关键．目前，全国一本、二本和高职高专类院校都有系统的教材，而唯独独立学院由于办学时间相对较短，教材建设还处于起步阶段，还没有属于自己的系统教材，开设课程时很难选择合适的教材．大多独立学院选用母体学校的本科教材或高职同类教材，而母体高校的本科教材，显得过于有难度，选用高职高专教材又显得过于浅显．普通本科院校人才培养定位是“宽基础，强能力”，高职高专定位是“理论够用，实践为重”，而独立学院则是“小理论，大应用”．独立学院的教材，不仅应针对本科三批院校学生的特点，着眼于加强学生动手能力的培养，符合培养应用型人才的办学定位，而且要针对独立学院的师资特性，适合不同特点和层次的教师使用，具有较强的可教性．

近几十年，我国的实际工作者对概率统计的认识和实际应用的自觉性与日俱增．概率统计不仅理论研究硕果累累，一些新的理论和方法不断涌现，而且实际应用都得到了长足发展，已经广泛应用于工程技术、经济金融、农林科学及矿业、气象等领域．根据独立学院学生的特点和定位要求，编者试图为独立学院非数学类专业的学生编写一本熟悉概率论与数理统计的基本内容，同时能为后继课程学习储备必需的解决随机问题的理论和方法的概率论与数理统计教材．

教材内容的选择和写作手法上，一方面力求使用较少的数学知识，注重从实际问题出发，导引出概率统计概念，并用多样性的实例加以阐释，另一方面针对独立学院学生的基础和农林院校专业特点，保留概率论与数理统计的基本内容但适当降低难度，尽量与农林实际相结合．根据我们近年来讲授这门课程的经验积累，并参考国内外有关著作编写了本书．教材叙述均按由浅入深、由简到繁、循序渐进的模式展开，每章都配备了比较充分的典型例题，便于自学和应用参考，内容充实，具有较强可教性和很强的实用性．

本书的第 1 章、第 2 章、第 6 章、第 7 章和第 10 章由刘应安编写，第 3～5 章由韩秋红编写，第 8 章、第 9 章由夏业茂编写，全书由刘应安统稿、韦博成审稿．书中的部分内容及例子还参考了国内外其他一些图书资料，谨此向有关的作者表示由衷的谢意！

由于作者水平有限，书中难免有不妥与谬误之处，敬请同行专家和广大读者提供宝贵的批评和建议，以使本书不断得以完善．

刘应安
2012 年 8 月于南京

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的学科. 概率论侧重于对随机现象出现的可能性大小做出数量上的描述,形成一整套数学理论和方法;数理统计是在概率论的基础上研究,收集数据、分析数据并据以对所研究的问题做出一定的结论的科学和艺术. 概率论与数理统计是既有理论基础又有应用潜力的学科,其理论与方法已广泛应用于林业、农业、工程、社会学、经济学等领域中,还在不断向新兴学科渗透并与之结合发展. 从本章开始,将引出概率论的基本概念,给出概率论的基本性质,并逐步展开概率论与数理统计理论和方法的研究.

1.1　随机事件及其统计规律性

客观世界的各种现象大体可分为两类. 一类称为决定性现象,即在一定的条件下,只出现一个结果. 例如,在标准大气压下,水升温至 100℃时沸腾;每天清晨,太阳总从东方升起;向空中抛一物体,必然下落等. 另一类称为非决定性现象,即在一定的条件下,并不总是出现相同结果,在概率论中称为随机现象,例如,播种一粒银杏种子,可能发芽,也可能不发芽;掷一颗骰子,可能出现 1~6 点. 该类现象有以下两个特点:结果不止一个;事先不能确定出现的结果. 随机现象是概率论与数理统计的研究对象.

1.1.1　随机试验

例 1.1　随机现象的例子:

(1) 播种一粒银杏种子,观察银杏种子是否发芽;

(2) 掷一颗骰子,观察出现的点数;

(3) 单位时间内,某手机被呼叫的次数;

(4) 某种型号冰箱的使用寿命;

(5) 测量课本的长度,观测其误差.

在一定条件下,对自然与社会现象进行的观察或实验称为**试验**,在概率论中,将满足下述条件的试验称为**随机试验**:

(1) 试验在相同的条件下是可以重复进行的;

(2) 试验的结果不止一个,但全部可能结果事先是知道的;

(3) 每一次试验都会出现上述全部可能结果中的某一个结果,至于是哪一个结果则事先无法预知.

1.1.2　随机现象的统计规律性

对一个随机试验来说,每次试验结果具有不确定性,规律性不强,但大量重复性试验

的结果就存在一定的规律性. 例如,若抛掷一枚均匀硬币,一次抛掷,出现正面还是出现反面很难确定,但重复大量次抛掷,出现正面次数占抛掷总次数的$\frac{1}{2}$. 历史上有许多科学家做过抛掷硬币的试验. 抛掷均匀硬币,其结果见表 1-1.

表 1-1　历史上抛掷硬币试验

实验者	抛硬币次数	出现正面次数	频率
德摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费勒(Feller)	10000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

可以看出,试验中出现正面次数与抛硬币次数的比值,当试验次数较小时,随机波动较大;当试验次数较大时,随机波动较小. 随着试验次数的增大,出现正面次数与抛硬币次数的比值逐渐稳定于固定值 0.5,出现很强的规律性.

随机现象在大量次试验中所呈现出的规律性,称为随机现象的**统计规律性**.

事实上,随机现象的统计规律是随机现象本质特征的一种反映,因此,我们可以通过研究随机现象的统计规律来揭示随机现象本质特性. 概率论就是研究随机现象统计规律的一门学科,数理统计则以概率论为基础研究如何根据试验数据,推断随机现象本质规律的理论和方法.

由于概率论和数理统计所研究的试验都是随机试验,所以随机试验简称为**试验**.

1.2　随机事件及其关系

1.2.1　样本空间与随机事件

1. 样本空间

随机现象一切可能的基本结果组成的集合称为**样本空间**,用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.

例 1.2　给出例 1.1 中随机现象的样本空间.

(1) 播种一粒银杏种子的样本空间:$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示银杏种子发芽,ω_2 表示银杏种子不发芽.

(2) 掷一颗骰子的样本空间:$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,其中 ω_i 表示出现 i 点,$i=1,2,\cdots,6$. 也可更直接记此样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,\cdots,6\}$.

(3) 单位时间内某手机被呼叫次数的样本空间:$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

(4) 某种型号冰箱使用寿命的样本空间:$\Omega_4=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

(5) 测量课本的长度,测量误差的样本空间:$\Omega_5=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$.

2. 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，一般用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示. 例如，掷一颗骰子，A："出现奇数点"是一个事件，即 $A=\{1,3,5\}$.

关于事件的定义，有以下几点说明.

(1) 任一事件 A 是样本空间 Ω 的子集. 在概率论中我们可用维恩(Venn)图表示(见图 1-1)，类似集合表示，可以帮助理解.

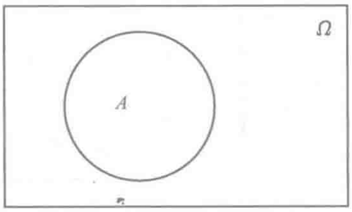

图 1-1

(2) 当 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了.

(3) 事件既可以用语言描述，也可以用集合表示. 应学会两种表示相互翻译.

(4) 由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**.

样本空间的最大子集，即其本身称为**必然事件**，记作 Ω. 样本空间的子集之一，空集称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$.

例 1.3　掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

事件 A："出现 2 点"，即 $A=\{2\}$，它是一个基本事件.

事件 B："出现的点数不超过 6"，即 $B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$，它就是必然事件.

事件 C："出现的点数小于 1"，即 $C=\varnothing$，它就是不可能事件.

1.2.2　事件的关系及运算

假设以下的讨论是在同一个样本空间 Ω 中进行的.

1. 事件间的关系

1) 包含关系

如果 A 中的样本点都是 B 中的样本点，则称 A 包含于 B(见图 1-2)，或称 B 包含 A，也称 A 为 B 的子事件，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 用概率论语言描述：事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

例如，冰箱的使用寿命 T 超过 3000h，记为事件 $A=\{T>3000\}$，使用寿命 T 超过 3500h，记为事件 $B=\{T>3500\}$，则 $A\supset B$.

对任一事件 A，必有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

2) 相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足：A 中的样本点都是 B 中的样本点，同时 B 中的样本点又都是 A 中的样本点，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

例如，掷两颗骰子，记事件 A 为"两颗骰子的点数之和为奇数"，事件 B 为"两颗骰子的点数为一奇一偶"，则 $A=B$.

3) 互不相容关系

如果 A 与 B 没有相同的样本点(见图 1-3)，则称 A 与 B 互不相容. 用概率论语言描

述为:事件 A 与事件 B 不能同时发生.

例如,掷一颗骰子,记事件 A 为"出现偶数点",记事件 B 为"出现奇数点",则 A 与 B 互不相容.

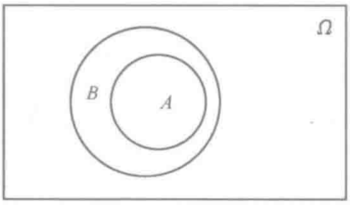

图 1-2

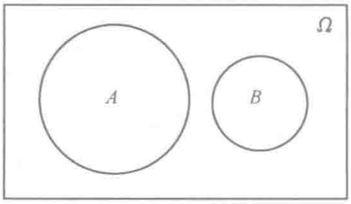

图 1-3

例 1.4 掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

A:"出现 2 点",即 $A=\{2\}$;B:"出现偶数点",即 $B=\{2,4,6\}$,显然有 $A\subset B$.

C:"出现非奇数点",即 $C=\{2,4,6\}$,显然有 $B=C$.

D:"出现奇数点",$C=\{1,3,5\}$,显然 D 与 A,B,C 都互不相容.

2. 事件间的运算

事件的运算与集合的运算类似,有和、积、差等运算.

(1) 事件 A 与 B 的**和**,记为 $A\cup B$. 其含义为"由事件 A 与 B 中所有样本点(相同的只计入一次)组成的新事件"(见图 1-4). 用概率论语言描述为:事件 A 与 B 中至少有一个发生.

事件的和运算可推广至有限个或可列个的情形:$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(2) 事件 A 与 B 的**积**,记为 $A\cap B$ 或简记为 AB. 其含义为"由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件"(见图 1-5). 用概率论语言描述为:事件 A 与 B 同时发生.

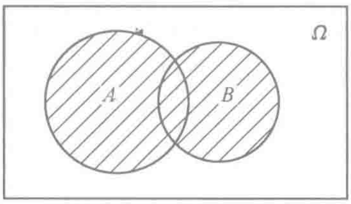

图 1-4

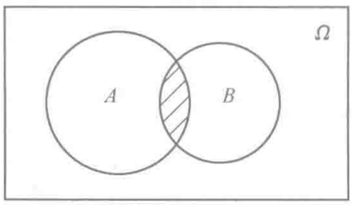

图 1-5

事件的积运算可推广至有限个或可列个的情形:$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$. 其含义为"由事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的新事件"(见图 1-6). 用概率论语言描述为:事件 A 发生而 B 不发生.

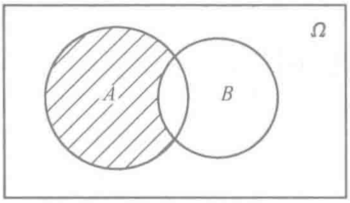

图 1-6(1)

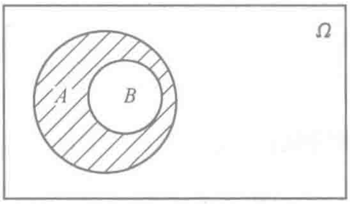

图 1-6(2)

(4) 对立事件.

事件 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$,即"由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件"(见图 1-7). 用概率论语言描述为:A 不发生,即 $\overline{A}=\Omega-A$;

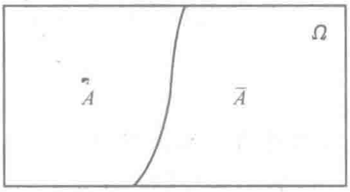

图 1-7

注:(1) $\overline{\overline{A}}=A,\overline{\Omega}=\varnothing,\overline{\varnothing}=\Omega$;

(2) A 与 B 为对立事件的充分必要条件是 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$.

例 1.5　掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$. 设 $A=\{1,2,4\}$,$B=\{1,4,5\}$,则 $A\cup B=\{1,2,4,5\}$;$A\cap B=\{1,4\}$;$A-B=\{2\}$;$\overline{A}=\{3,5,6\}$.

例 1.6　设 A,B,C 是某个随机现象的三个事件,则

(1) "A 发生,B,C 都不发生"的事件可表示为 $A\overline{B}\overline{C}=A-B-C$.

(2) "A,B 都发生,C 不发生"的事件可表示为 $AB\overline{C}=AB-C$.

(3) "三个事件都发生"的事件可表示为 ABC.

(4) "三个事件中至少有一个出现"的事件可表示为 $A\cup B\cup C=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$.

3. 事件的运算性质

(1) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA. \tag{1.1}$$

(2) 结合律:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC). \tag{1.2}$$

(3) 分配律:

$$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC,\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{1.3}$$

(4) 对偶律(德摩根公式):

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{1.4}$$

对偶律可推广至有限个及可列个的情形:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i, \tag{1.5}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i. \tag{1.6}$$

1.3 事件的概率及其性质

1.3.1 概率的定义

1. 概率的频率定义

定义 1.1 设在 n 次随机试验中，事件 A 出现的次数为 $n(A)$，这里的 $n(A)$ 又被称为事件 A 出现的**频数**. 称事件 A 出现的频数与随机试验总数之比，即

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n} \tag{1.7}$$

为事件 A 出现的**频率**.

容易验证频率满足：

(1) **非负性** $f_n(A)\geqslant 0$；

(2) **正则性** $f_n(\Omega)=1$；

(3) **有限可加性** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_n(A_i)$.

随机现象的统计规律性表明，随着试验重复次数 n 的增加，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 会稳定在某一常数 p 附近，即频率的稳定值，这个频率的稳定值就是事件 A 发生的概率，因此我们可以用事件 A 的频率来定义事件 A 的概率，即

$$P(A)\approx f_n(A)(n\text{ 足够大}).$$

下面用例子进一步说明频率的稳定性.

例 1.7 考虑某树种发芽率试验. 从一大批树种中随机抽取 7 批树种做发芽试验，其结果如表 1-2 所示.

表 1-2 树种发芽试验的频率

树种粒数	10	70	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	9	60	282	639	1339	1806	2715
发芽率	0.9	0.857	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表 1-2 可以看出，树种发芽的频率也具有随机波动性. 当树种粒数较小时，随机波动较大；当树种粒数较大时，随机波动较小. 最后，随着树种粒数的增大，发芽率逐渐稳定于固定值 0.9. 用概率的频率定义描述为：该树种发芽的概率为 0.9.

2. 概率的古典定义

古典概型满足：

(1) 样本空间 Ω 中只有有限个样本点，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个样本点发生的可能性相等，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$，若事件 A 含

有 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\Omega \text{ 中所有样本点的个数}}=\frac{k}{n}. \tag{1.8}$$

例 1.8　抛两枚硬币，记事件 A 为“一个正面朝上，一个反面朝上”，事件 B 为“两个正面朝上”，C 为“至少一个正面朝上”，求，$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$.

解　此试验的样本空间为 $\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，即样本空间 Ω 有 4 个样本点.

由于 $A=\{$(正，反)，(反，正)$\}$，即 A 含有两个样本点，所以 $P(A)=\frac{1}{2}$；

由于 $B=\{$(正，正)$\}$，即 B 含有一个样本点，所以 $P(B)=\frac{1}{4}$；

由于 $C=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$，即 C 含有三个样本点，所以 $P(C)=\frac{3}{4}$.

在计算古典概型时，一般不需要把样本空间详细写出，但一定要保证样本点为等可能，并且能够求出相应的 n 和 k.

例 1.9　设有两种树苗栽成一排，每种树苗都是 4 棵，为了美观，树苗必须交叉排列，求栽植概率.

解　利用排列组合知识，有

$$P=\frac{4!\cdot A_4^3\cdot A_2^1}{8!}=\frac{1}{35}.$$

例 1.10　今年有 12 名同学进行暑期社会实践，其中有 3 名同学是女生，现将它们随机地平均分配到三个小组中去，问：

(1) 每个小组都分配到一名女同学的概率是多少？

(2) 3 名女同学分配在同一小组的概率是多少？

解　12 名同学平均分配到三个小组中的分法总数为

$$\binom{4}{12}\binom{4}{8}\binom{4}{4}=\frac{12!}{4!4!4!}.$$

(1) 每个小组分配到一名女同学的分法有 3! 种. 对应每种分法，其余 9 名同学平均分配到三个小组的分法共有 $\binom{3}{9}\binom{3}{6}\binom{3}{3}=\frac{9!}{3!3!3!}$ 种，故所求的概率为

$$p_1=\frac{3!9!}{3!3!3!}\Big/\frac{12!}{4!4!4!}=\frac{16}{55}.$$

(2) 将 3 名女同学分配在同一小组的分法有 3 种，对应每种分法，其余 9 名同学的分法共有 $\binom{1}{9}\binom{4}{8}\binom{4}{4}=\frac{9!}{1!4!4!}$ 种，故所求的概率是

$$p_2=\frac{3\cdot 9!}{1!4!4!}\Big/\frac{12!}{4!4!4!}=\frac{3}{55}.$$

例 1.11　设袋中有 a 只白球，b 只黑球. 每次从中任取一只，取后放回袋中，共取 n 次，试求 $A_k=$“n 次取球中有 k 次取到白球”的概率.

解　利用排列组合知识，有

$$P(A_k)=\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

若记$\frac{a}{a+b}=p$，则

$$P(A_k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

例 1.12　设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的任一个，每个盒子所放球数不限. 试求：

(1) 指定的 $n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球的概率 p_1；

(2) 恰好有 $n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球的概率 p_2.

解　利用排列组合知识，有

(1) $p_1=\frac{n!}{N^n}$；

(2) $p_2=\frac{\binom{N}{n}n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$.

例 1.13　n 个人生日全不相同的概率 p_n 是多少？

解　把 n 人看成 n 球，将一年 365 天看成 $N=365$ 个盒子，则“n 个人生日全不相同”就相当于“恰好有 $n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球”，所以 n 个人生日全不相同的概率为

$$p_n=\frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

当 $n=60$ 时，$1-p_{60}=0.9922$，表明在 60 个人的群体中至少有两个人生日相同的概率超过 99%.

3. 概率的几何定义

几何概型满足：

(1) 样本空间 Ω 充满某个区域，其度量(长度、面积或体积等)大小可用 S_Ω 表示；

(2) 任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的，与子区域的形状及子区域在 Ω 中位置无关，若事件 A 为 Ω 中的某个子区域(见图 1-8)，其度量大小可用 S_A 表示，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.\tag{1.9}$$

例 1.14(会面问题)　甲、乙两人约定在 8 时到 9 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人 20min，过时即可离去. 求两人会面的概率.

解　以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间，则两人能够会面的充要条件为$|x-y|\leqslant 20$.

在平面上建立直角坐标系(见图 1-9)，则

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

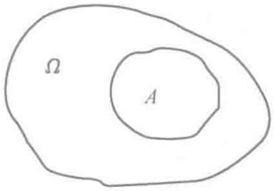

图 1-8

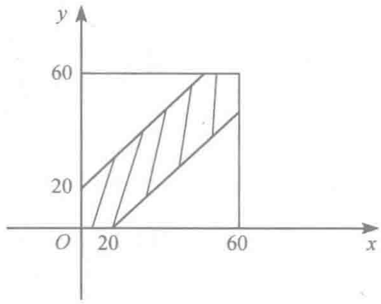

图 1-9

4. 概率的公理化定义

定义 1.2　设 Ω 为一个样本空间，对 Ω 中的任一随机事件 A，定义一个实数值 $P(A)$ 满足：

(1) **非负性**　$P(A)\geqslant 0$；

(2) **正则性**　$P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性**　若 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.10}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的公理化定义知，概率是事件(集合)的映射，当这个映射能满足上述公理的三条，就被称为概率.

概率的频率定义、古典定义和几何定义是形象具体的，概率的公理化定义是抽象的，但抽象的公理化定义揭示了概率的本质.

1.3.2　概率的性质

概率具有一系列性质，以下给出概率的几个常用性质，其他性质都可以由它们推出.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

因为 $P(\Omega)=1$，所以 $P(\varnothing)=1-P(\Omega)=0$.

性质 2(有限可加性)　若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.11}$$

性质 3　对任一事件 A 有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.12}$$

例 1.15　设袋中有 5 只白球，7 只黑球. 从中任取 3 只，求至少取到 1 只白球的概率.

解　记事件 A 为“取出的 3 只中至少有 1 只白球”，则 A 包括三种情况：取到 1 只白球 2 只黑球，或取到 2 只白球 1 只黑球，或取到 3 只白球 0 只黑球. 而 $\overline{A}$ 只包括一种情况，即“取到的 3 只全是黑球”，从而

$$P(\overline{A})=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{7}{44}\approx 0.159,$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{37}{44}\approx 0.841.$$

由此可见,应用性质 3 进行概率计算较为简便.

性质 4 若 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B). \tag{1.13}$$

证明 因为 $A\supset B$,所以 $A=B\cup(A-B)$,且 $A-B$ 与 B 互不相容,则

$$P(A)=P(B)+P(A-B),$$

即

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

推论(单调性) 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$.

注: *以上推论的逆命题不成立,请读者自己举例说明.*

性质 5 对任意两个事件 A,B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.14}$$

例 1.16 从 $1,2,\cdots,100$ 中任取一数,求它能被 2 整除但不能被 3 整除的概率.

解 记事件 A 为“取到的数能被 2 整除”,事件 B 为“取到的数能被 3 整除”,则事件“能被 2 整除但不能被 3 整除”可表示为 $A-B$. 由性质 5,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{50}{100}-\frac{16}{100}=\frac{17}{50}.$$

性质 6(加法公式) 对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.15}$$

应用数学归纳法可以证明,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.16}$$

推论(半可加性) 对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B). \tag{1.17}$$

例 1.17 从 1～1000 中随机取一整数,问取到的整数能被 4 或 6 整除的概率是多少?

解 记事件 A 为“取到的整数能被 4 整除”,事件 B 为“取到的整数能被 6 整除”,则所求概率为