"十一五"浙江省重点教材建设项目

微积分应用基础

（第二版）

云连英　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"浙江省重点教材建设项目

微积分应用基础

（第二版）

Weijifen Yingyong Jichu

主　编　　云连英

副主编　　付艳茹　曹　勃　陶正娟　汪荣伟

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是根据高职教育的目标，充分调研我国高职教育现状，认真总结吸收高职数学课程改革的经验，在第一版的基础上修订的。在保持本书第一版的特色的前提下，进一步完善了数学体系，增强了其完整性，调整并且增加了适当的例题、习题，以保证对基本知识点的学习和掌握。将原本分散在各章最后一部分的MATLAB学习，集中成新的一章，放在最后，以便根据各自不同的教学环境进行教学。

本书内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分学、常微分方程、MATLAB在微积分中的应用。书后附有基本初等函数的图像及其主要性质、习题参考答案。

图书在版编目(CIP)数据

微积分应用基础/云连英主编 .—2版 .—北京:高等教育出版社，2011.6

ISBN 978-7-04-031613-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①云… Ⅲ.①微积分-高等职业教育-教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第081782号

策划编辑	邓雁城	责任编辑	边晓娜	封面设计	张　志	版式设计	王　莹
插图绘制	杜晓丹	责任校对	杨凤玲	责任印制	张福涛		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京印刷一厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×1092　1/16		
印　　张	11.25	版　　次	2006年5月第1版
字　　数	270 000		2011年6月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2011年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	19.80元

物 料 号　31613-00

第二版前言

本书是银领工程——高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材之一《微积分应用基础》的修订版，是“十一五”浙江省重点教材建设项目教材。

自2006年本书第一版出版以来，一些高职高专院校都将其作为工科类、财经类等专业的教材，还有部分两年制学校以及成人教育也将其作为少学时高等数学的必修教材。

此次修订版在第一版的基础上，根据五年来的使用情况，扬长避短，既保留了原有的特色，又根据高职教育的培养目标，进一步完善了数学体系，增强了其完整性，去掉第一版中比较牵强的实例，增加了简单的公式及理论推导，比如在导数的应用一章里，用通俗的语言描述了微分中值定理及其简单应用；在积分学一章补充了变上限函数的积分以及函数在无穷区间上的广义积分；在常微分方程一章补充了可分离变量的微分方程以及二阶常系数线性微分方程的概念及解法。全书调整并且增加了适当的例题、习题，以保证对基本知识点的学习和掌握；将原本分散在各章最后一部分的MATLAB学习，集中成新的一章，放在最后，以便根据各学校不同的教学环境进行教学。

本书的修订由浙江台州职业技术学院的云连英、陶正娟、汪荣伟、宁波职业技术学院的曹勃、浙江警官职业学院的付艳茹等老师完成。

在第二版出版之际，编者向关心本书的师生致以谢意。由于编者水平有限，不妥之处仍难以避免，敬请读者和同行继续批评指正。

编　者

2011年1月

第一版前言

本教材是根据高职院校的人才培养目标编写的,并辅之以适合工科、经管类学生使用的后续教材《工程应用数学》和《经济应用数学》,是适合高职院校学生使用的基础教材。

在我国,高等职业技术教育是一类新型的高等教育类型,它培养的是初步掌握高新技术、面向生产和管理第一线的应用性人才。这类人才对基础理论的要求是以应用为导向,以必需、够用为度。高职院校的数学教学要为人才培养目标服务,基于此,该教材的编写具有以下特色:

1. 突出培养学生的贯通能力 全书采用“案例驱动式”编写模式,无论是引例还是案例均以学生的专业知识或日常生活知识为背景,强调培养学生将数学知识专业化和将专业知识数学化的相互贯通能力,既注重了数学方法的训练,又明确指出了知识点的应用;

2. 突出教学内容对高职学生认知基础的适应性 教学内容和难度均考虑到高职学生数学基础薄弱,逻辑思维能力不强的状况,更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习难度,提高内容的可读性,以适应高职教育的要求;

3. 突出教学内容与高职教学需要的相适应性 教学内容及其难度均以高职各专业的需要为基础,以学生的专业学习和工作需要为准绳;我们把多元函数的微积分内容融入到一元函数对应内容的章节里,通过对偶、比较,既化解了多元微积分内容的难度,又减少了教材的篇幅,为学生后继课程的学习奠定了基础;

4. 突出与高职整体培养目标体系相适应 高等数学在高职整体教学体系中是一种文化基础课,更是一种基础“工具”课,鉴于此,教材的编写体系、课时安排等与不同专业的培养需要相适应,体现数学为专业服务的功能;

5. 突出与现代教育技术的整合及应用 在全书中融入了MATLAB软件的应用,有利于学生多维度理解、掌握数学知识点,和主教材同步设计了配套的网络课程、试题库、电子教案和学生自测学习系统,满足教学过程中的各种需要,以体现高职教学实践性的特点;

6. 突出数学教学中的人文性 每章都辅之以阅读材料,通过阅读材料渗透数学思想,让学生了解一些数学发展史,从而对学生进行人文素质教育;

7. 突出与区域经济社会的适应性 适应高职教育为区域经济社会发展培养应用型人才之需,本教材在选编教学“案例”时,充分注意到所选“案例”与区域经济社会发展的相关度,提高了学生的定向解决问题的能力;

8. 突出数学建模思想的融入 将数学建模融入了主干教学,每章不仅渗透了建模思想,而且均有建模应用案例。这样不仅教会了学生学习数学,而且训练了学生用数学方法解决现实问题的能力,从而通过基础课的教学培养学生的实践能力;

9. 突出“必需够用”的特点 根据对专业课程的深入调查,编写了适合高职学生的《微积分应用基础》,并将《工程应用数学》和《经济应用数学》两本教材作为不同专业的选修教材,满足了高职院校专业对数学内容的特殊需求;

10. 突出教学资源的完整性 整个教学资源系统的设计为教师按系统教、学生按系统学提

供完整、周到的教学资源服务。

教材的编写得到了台州职业技术学院、宁波职业技术学院、浙江警官职业学院以及浙江东方职业技术学院等四所院校有关领导和部门的支持，院内外同行专家提出了许多指导性意见，在此一并表示感谢。

限于水平，教材中不足之处，恳请批评指正。

编　者

2006年3月1日

目　　录

第 1 章　极限与连续

在自然界中，存在着各种各样变化着的量，这些量之间往往不是孤立地存在着，一些变量之间相互联系、相互制约. 函数是对变量的变化关系最基本的数学描述，它是高等数学研究的主要对象，而极限揭示了变量在一定的变化过程中的终极状态，极限的思想和方法不仅是高等数学的基础，而且在其他学科中也有着广泛的应用. 本章将在复习和加深有关函数知识的基础上，讨论函数极限与函数连续性等问题.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

引例 1【汽车租赁】　一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每千米收费 15 元. 租用一辆该种汽车一天，行车 x km 时的租车费(元)为

$$y=200+15x \tag{1.1}$$

在(1.1)式中，x 的取值范围是数集 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$，对每一个 $x\in D$，按(1.1)式所示规则，都有唯一确定的 y 与之对应.

引例 2【电压波】　考察脉冲发生器所产生的一个单三角脉冲电压波(图 1-1)，其电压 U(伏)与时间 t(微秒)之间的关系为

当 $0\leqslant t\leqslant \frac{\tau}{2}$ 时 $U=\frac{2E}{\tau}t$；当 $\frac{\tau}{2}<t\leqslant \tau$ 时 $U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$；

当 $t>\tau$ 时，$U=0$. 这一波形的数学表达式可统一写为

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{\tau}{2},\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & \dfrac{\tau}{2}<t\leqslant \tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases} \tag{1.2}$$

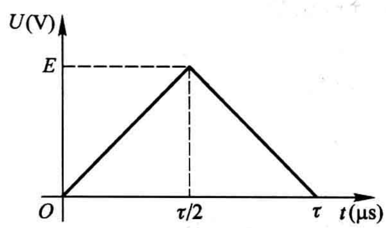

图 1-1

在(1.2)式中，t 的取值范围是数集 $D=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$，对于每一个 $t\in D$，按(1.2)式所示规则，都有唯一确定的 U 与之对应.

引例 3【气温与时间】　(1) 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化(图 1-2)，由图可知，对于一昼夜内每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应.

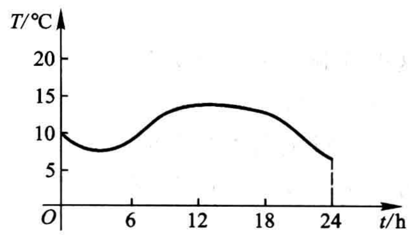

图 1-2

(2) 小王在游上海世博会前查询了 2010 年 7 月 13 日

至 7 月 17 日上海每天的最高气温,如表 1-1 所示.

表 1-1 上海 5 日最高气温

日期 t(日)	13	14	15	16	17
最高气温 T(℃)	31	34	35	36	36

由上表可知,对每一个 $t\in D=\{13,14,15,16,17\}$,都有唯一确定的 T 与之对应.

以上各引例,都是一个变量在一个非空集合内每取一个值,按一定的规则,另一变量都有唯一确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系,在数学上就是函数关系.

定义 1 设 D 是一个实数集,如果对于 D 中的每一个数 x,按照某种对应规则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,那么 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,$x\in D$,x 称为**自变量**,数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 取某一定值 x_0 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 中的一切实数时,对应的函数值的集合称为**函数的值域**.

从函数的定义可知,函数的**定义域**和**对应法则**是确定**函数的两个基本要素**. 一旦确定了对应法则和定义域,变量关系就确定了,至于变量用什么字母无关紧要.

函数常用**解析法**(如引例 1、引例 2)、**图像法**(如引例 3 中(1))、**表格法**(如引例 3 中(2))来表示.

注意 (1) 引例 2 是用解析法表示的一个函数,但在其定义域的不同区间内,所对应的 U 值是用不同的解析式来表示的,这种在其定义域的不同区间上用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**. 在实际生活与工程实践中,这是一类常见的函数.

(2) 在函数的定义中,并没有要求自变量变化时,其函数值一定要变化,因此 $y=C$(C 为常数)也符合函数的定义,称 $y=C$(C 为常数)为**常数函数**.

例 1 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 要使函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\ln(x-1)$ 有意义,必须

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1,\\ x-1>0.\end{cases}$$

解得 $1<x\leqslant 5$,于是定义域为 $(1,5]$.

引例 4【圆柱体积】 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r 及高 h 之间的关系为

$$V=\pi r^2 h \tag{1.3}$$

这里,V 随着 r,h 的变化而变化. 当 r,h 在一定范围内($r>0,h>0$)取定一对数值 (r,h) 时,按(1.3)式所示规则,V 都有唯一确定的值与之对应.

引例 5【导线的电流】 在远距离输送交流电的过程中,通过导线某点的电流 i 不仅与该点离导线的始端的距离 x 有关,而且还随时间 t 而变化. 对某种理想的输电线有

$$i=i_0\cos\alpha x\cdot\sin\omega t\ (i_0,\alpha,\omega\text{ 为常数}), \tag{1.4}$$

对于 x,t 的每一对值 $(x,t)\in\{(x,t)\,|\,0<x<+\infty,0<t<+\infty\}$,按(1.4)式所示规则,$i$ 都有唯一确定

的值与之对应.

引例 6【广告费用】 某公司通过电台和报刊两种方式做某种商品的推销广告宣传，根据统计资料销售收益 R(万元)与电台广告费 x(万元)和报刊广告费 y(万元)之间有如下的经验公式：

$$R=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2, \tag{1.5}$$

对于 x,y 的每一对值 $(x,y)\in\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$，按(1.5)式所示规则，$R$ 都有唯一确定的值与之对应.

以上各引例，从数量关系来说，都是根据某种对应规则，一个变量随着两个变量的变化而变化，仿照一元函数(一个自变量的函数)的定义引入二元函数的定义.

定义 2 设有变量 x,y,z，如果当变量 x,y 在一定范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照一定的对应法则，总有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x,y 的**二元函数**，记作 $z=f(x,y)$，其中 x,y 叫做**自变量**，x,y 的变化范围叫做二元函数的**定义域**.

例 2 求函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域.

解 要使函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 有意义，必须

$$\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0.\end{cases}$$

解得 $1<x^2+y^2\leqslant 4$，于是定义域为 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$.

1.1.2 函数的几种特性

一、 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 是奇函数，而 $f(x)=x^2-2x+1$ 是非奇非偶函数.

二、 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大(或减少)，即对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加(或单调减少)**的，区间 (a,b) 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间(或单调减少区间)**.

单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升；

单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降.

例如，由图 1-3 可知，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，而在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

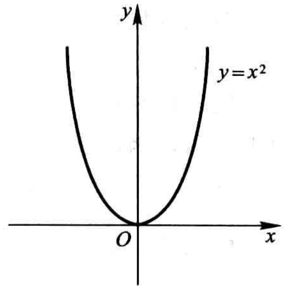

图 1-3

案例 1【需求函数】 在经济学中，某一商品的需求量是指在一定的价格水平下，消费者愿意而且有支付能力购买的商品量. 影响商品

需求的因素很多，商品的价格是影响需求的一个主要因素，还有其他因素，如消费者收入的增减、季节的变换以及消费者的偏好等都会影响需求. 如果把价格以外的其他因素都看成是常量，则需求量 D 可视为该商品的价格 P 的函数，即 $D=f(P)\ (P\geqslant 0)$，这个函数称为**需求函数**.

一般情况下，商品的价格越低，需求量越大；商品的价格越高，需求量越小. 因此，需求函数 $D=f(P)$ 是单调减少函数. 商场可通过采取降低价格、增加商品的销售量（需求量）等营销策略，增加销售收入.

案例2【成本函数】 成本是指生产特定产量的产品所需要的费用总额. 它包括固定成本和可变成本. 固定成本是尚未生产产品时的支出，在一定限度内是不随产量变动而变动的费用. 可变成本是随产量变动而变动的费用. 设 Q 表示产量，C 表示成本，则 C 与 Q 之间的函数关系称为成本函数，记作

$$C=C(Q)=C_0+V(Q),\ Q\geqslant 0,$$

其中 $C_0\geqslant 0$ 是固定成本，$V(Q)$ 是可变成本.

由于当产量增加时，成本必然增加，所以成本函数是单调增加函数.

三、 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**，否则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**.

例如，对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 又如，对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 都成立，所以 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

四、 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于定义域内的一切 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的一个**周期**，通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.3　基本初等函数

常数函数　$y=C$（C 为常数）.

幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 为常数）.

指数函数　$y=a^{x}$（$a>0,a\neq 1$，a 为常数）.

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$，a 为常数）.

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

以上这六种函数统称为**基本初等函数**.

有关基本初等函数的图形及主要性质见**附录1**.

1.1.4　复合函数

某商场经营一种允许价格浮动的商品，那么营业额是价格的函数，而价格又是需求量的函数. 对于这种在一个变化过程中有着确定对应关系的三个变量，我们有如下的定义.

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$的值域包含在函数 $y=f(u)$的定义域内,那么 y(通过 u 的关系)也是 x 的函数,这个函数叫做 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**.

注意　不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 u 的值域为$[2,+\infty)$,不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内,因而不能复合.

正确分析复合函数的构成,是今后正确运用求导法则的基础.

例 3　已知 $y=e^u$,$u=\sqrt{x}$,试把 y 表示成 x 的复合函数.

解　$y=e^u=e^{\sqrt{x}}$.

例 4　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$;　(2) $y=\sin x^2$;　(3) $y=\sin^2 x$;　(4) $y=\arcsin(\ln 2x)$;　(5) $y=x^x$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1+x^2$ 复合而成的.

(2) 函数是 $y=\sin x^2$ 由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=\arcsin(\ln 2x)$是由 $y=\arcsin u$,$u=\ln v$,$v=2x$ 复合而成的.

(5) $y=x^x=e^{x\ln x}$,故函数 $y=x^x$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=x\ln x$ 复合而成的.

1.1.5　初等函数

引例 7【生产利润】　某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-4)}$元,如果每件玩具卖 48 元,那么公司生产 x 件玩具获得的净利润 $y=48x-[400+5\sqrt{x(x-4)}]$.

引例 8【双曲函数】　工程技术上常用的双曲函数:

(1) 双曲正弦函数,$y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,其图像如图 1-4 所示.

(2) 双曲余弦函数,$y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,其图像如图 1-5 所示.

(3) 双曲正切函数,$y=\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$,其图像如图 1-6 所示.

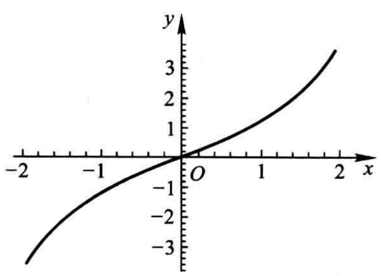

图 1-4

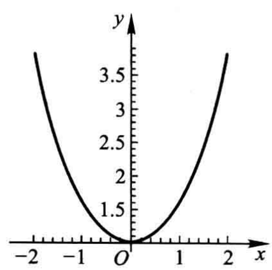

图 1-5

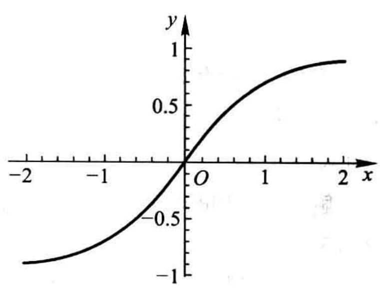

图 1-6

容易验证,双曲函数有类似三角函数的一些恒等式:

$\text{sh}(x\pm y)=\text{sh}x\text{ch}y\pm\text{ch}x\text{sh}y$，特别地，$\text{sh}2x=2\text{sh}x\text{ch}x$；

$\text{ch}(x\pm y)=\text{ch}x\text{ch}y\pm\text{sh}x\text{sh}y$，特别地，$\text{ch}2x=\text{ch}^2x+\text{sh}^2x$；

$\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$；等等.

定义 4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的，且可用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\arcsin\dfrac{x}{2}$，$y=\ln(x+\sin x)$，$y=e^{x^2}\tan x$ 等都是初等函数.

分段函数若可以表示成一个式子，则为初等函数，否则不是.

例如，$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数，它可以看成是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的函数.

又如，$y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 不能用一个式子表示，所以不是初等函数.

1.1.6 建立函数关系举例

运用数学知识解决实际问题，往往需要先建立该问题中各变量之间的函数关系，然后再进行进一步的研究.

一般地，建立函数关系（这里指的是能用解析式表示的函数）的步骤为：

(1) 分析问题中的常量与变量，并用字母表示；

(2) 根据所给条件，运用数学、物理等相关知识，确定等量关系；

(3) 写出函数解析式，并指明定义域.

案例 3【刹车痕迹】 已知汽车刹车后轮胎摩擦的痕迹长 s(m) 与车速 v(km/h) 的平方成正比，当车速为 30 km/h 时刹车，测得痕迹长为 3 m，求痕迹长 s 与车速 v 的函数关系.

解 由题意可设 $s=kv^2$.

由于当 $v=30$ km/h 时，$s=3$ m，所以 $3=k\,30^2$，解得 $k=\dfrac{1}{300}$，故 $s=\dfrac{1}{300}v^2$，因此痕迹长 s 与车速 v 的函数关系为

$$s=\frac{1}{300}v^2\ (v>0).$$

案例 4【销售利润】 某商店将每套进价为 180 元的西服按每套 280 元销售时，每天只卖出 10 套，若每套售价降低 m 元，当 $m=20x(x\in\mathbf{N})$ 时，其日销售量就增加 $15x$ 套，试写出日利润 y 与 x 的函数关系.

解 日利润=每套利润×日销售量，而每套利润=现价−进价=$(280-20x)-180$，日销售量为 $10+15x$，

所以总利润 $y=(280-20x-180)(10+15x)=100(5-x)(2+3x)$.

又由题意知，降价数只能是 20 元的整数倍，且降价不能超过 280 元，所以该函数的定义域为 $\{0\leqslant x\leqslant 14, x\in\mathbf{N}\}$.

案例 5【货运方案】 某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机床 12 台和 6 台. 现销售

给 A 地 10 台，B 地 8 台．已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元．

（1）设从乙地调运至 A 地的台数为 x，求总运费 y 关于 x 的函数关系式；

（2）若总运费不超过 9 000 元，问共有几种调运方案？

分析　甲、乙两地调运至 A、B 两地的机床台数及运费如表 1–2 所示．

表 1–2　机床调运方案

调出地	甲地		乙地	
调至地	A 地	B 地	A 地	B 地
台数	$10-x$	$12-(10-x)$	x	$6-x$
每台运费(元)	400	800	300	500
运费合计(元)	$400(10-x)$	$800[12-(10-x)]$	$300x$	$500(6-x)$

解　（1）依题意得 $0\leqslant x\leqslant 6, x\in\mathbf{Z}$，

$$y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x),$$

即

$$y=200(x+43)\ (0\leqslant x\leqslant 6, x\in\mathbf{Z}).$$

（2）由 $y\leqslant 9\,000$，解得 $x\leqslant 2$．

由于 $x\in\mathbf{Z}, 0\leqslant x\leqslant 6$，所以 $x=0,1,2$．因此共有三种调运方案．

案例 6【邮件资费】　我国 2004 年 1 月 1 日起执行的国内投寄外埠平信的邮件资费如下：首重 100 克内，每重 20 克（不足 20 克按 20 克计算）付邮资 0.80 元，续重 101 克—2 000 克，每重 100 克（不足 100 克按 100 克计算）付邮资 2.00 元．那么投寄重 x 克（$0\leqslant x\leqslant 120$）的外埠平信应付多少邮资？

解　设投寄外埠平信邮资为 y 元，则

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 20,\\ 1.60, & 20<x\leqslant 40,\\ 2.40, & 40<x\leqslant 60,\\ 3.20, & 60<x\leqslant 80,\\ 4.00, & 80<x\leqslant 100,\\ 6.00, & 100<x\leqslant 120.\end{cases}$$

案例 7【如何纳税】　“依法纳税是每个公民应尽的义务”，我国于 1993 年 10 月 31 日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定国家征收个人所得税是分段计算的：月收入不超过 800 元的，免征个人所得税；超过 800 元部分为应纳税所得额，税率如下：

级数	全月应纳税所得额	税率
1	不超过 500 元部分	5%
2	超过 500 元至 2 000 元部分	10%
3	超过 2 000 元至 5 000 元部分	15%
…………		
9	超过 100 000 元部分	45%

自 1993 年个人所得税法实施以来至今已将近 20 年，其间中国政治经济形势发生了很大变化，国民生产总值持续、快速增长，城乡居民收入大幅度提高. 1993 年，就业者中月收入在 800 元以上的仅为 1% 左右，到 2004 年已升至 60% 左右. 在职工工资收入提高的同时，职工家庭生活消费支出也呈上升趋势，2004 年居民消费价格指数比 1993 年提高了 67%，加之近几年教育、住房、医疗等改革的深入，居民消费支出明显增长，超过了现行个人所得税法规定的每月 800 元的费用扣除标准，导致职工消费支出不能在税前完全扣除，税负有所加重. 为解决社会反映比较突出的个人所得税工薪所得费用扣除额偏低、居民生计费用扣除不足的问题，有必要修改个人所得税法的规定. 为此十届全国人大常委会第十七次会议于 2005 年 8 月 23 日开始审议个人所得税法修正案草案，十届全国人大常委会第十八次会议于 2005 年 10 月 27 日通过关于修改个人所得税法的决定，从 2006 年 1 月 1 日起，个人所得税免征额从 800 元调整为 1 600 元. 随着物价的上涨，为了适应居民基本生活消费支出增长的新情况，2007 年 6 月 29 日，第十届全国人民代表大会常务委员会第二十八次会议通过了《关于修改〈中华人民共和国个人所得税法〉的决定》，2007 年 12 月 29 日，十届全国人大常委会第三十一次会议表决通过了关于修改个人所得税法的决定. 个人所得税免征额自 2008 年 3 月 1 日起由 1 600 元提高到 2 000 元. 修改后的个人所得税法，只是对个人所得税的免征额进行调整，并没有对税率进行调整.

如果某单位所有人的月收入都不超过 5 000 元，

（1）试分别按照免征额为 1 600 元及 2 000 元建立月收入 x 与纳税金额 y 之间的函数模型；

（2）计算月收入为 4 000 元者，按照免征额为 1 600 元及 2 000 元计算二者的纳税金额相差多少元？

解　（1）按照免征额为 1 600 元来计算，有如下模型：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\,600,\\ 0.05(x-1\,600), & 1\,600<x\leqslant 2\,100,\\ 0.1(x-2\,100)+25, & 2\,100<x\leqslant 3\,600,\\ 0.15(x-3\,600)+175, & 3\,600<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

按照免征额为 2 000 元来计算，有如下模型：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0.05(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500,\\ 0.1(x-2\,500)+25, & 2\,500<x\leqslant 4\,000,\\ 0.15(x-4\,000)+175, & 4\,000<x\leqslant 5\,000.\end{cases}$$

（2）当月收入为 4 000 元时，按照免征额为 1 600 元来计算，需缴税 $0.15(4\,000-3\,600)+175=235$（元）；按照免征额为 2 000 元来计算，需缴税 $0.1(4\,000-2\,500)+25=175$（元）. 因此月收入为 4 000 元者，按照免征额为 1 600 元及 2 000 元计算二者的纳税金额相差 $235-175=60$（元）.

案例 8【销售收入】　一家销售公司批发某种小商品. 该公司提供以下价格折扣：订购量不超过 50 000 件，每千件价格为 300 元；订购量超过 50 000 件，每超过 1 000 件价格可下浮 1.25%，试写出销售收入与订购量的函数关系.

解　设订购量为 Q 千件时销售收入为 R 元，则当 $Q\leqslant 50$ 时，$R=300Q$；当 $Q>50$ 时，每千件价格为 $300-300\times(Q-50)\times 1.25\%=-3.75Q+487.5$，则

$$R=(-3.75Q+487.5)Q,$$

故销售收入与订购量的函数关系为

$$R=\begin{cases}300Q, & 0\leqslant Q\leqslant 50,(Q\in\mathbf{N})\\(-3.75Q+487.5)Q, & Q>50,\end{cases}.$$

1.2 函数的极限

极限是高等数学中最基本的概念,高等数学中的一些重要概念,如导数、积分、级数等都是利用极限来定义的.

中学数学里已学过极限的一部分内容,下面对极限作一些简要的复习与补充.

1.2.1 函数极限的概念

为了叙述方便,我们先给出关于 x 的变化趋势的有关记号(如表 1-3 所示).

表 1-3 x 变化趋势及其含义

记号	含义
$x\to\infty$	x 的绝对值无限增大
$x\to+\infty$	x 取正值无限增大
$x\to-\infty$	x 取负值而绝对值无限增大
$x\to x_0$	x 无限趋近于 x_0
$x\to x_0^+$	x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0
$x\to x_0^-$	x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0

一、 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例 1【水温的变化趋势】 将一壶沸腾的开水放在一间室温恒为 25 ℃的房间里,水温将逐渐降低,随着时间 t 的推移,水温会越来越接近于室温 25 ℃.

引例 2【熟练工的工时数】 生产同一产品熟练工所需的工时数比新手要少. 因为当你不断重复地做同一种工作时,你的操作方法会不断得到改善,操作时间也在逐渐地减少并逐渐接近于一个确定的时间.

上面两个引例有一个共同的特点:当自变量逐渐增大时,相应的函数值逐渐接近于一个确定的常数.

定义 1 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记为

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$.

例 1 考察当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

由图 1-7 可以看出,曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 沿 x 轴的正向和负向无限远伸时,与 x 轴越来越接近,即当 x

的绝对值无限增大时，$f(x)$的值无限接近于零，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

有时，我们仅讨论 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$（如引例 1 与引例 2）时，函数的变化趋势.

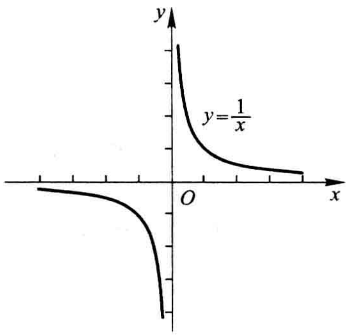

图 1-7

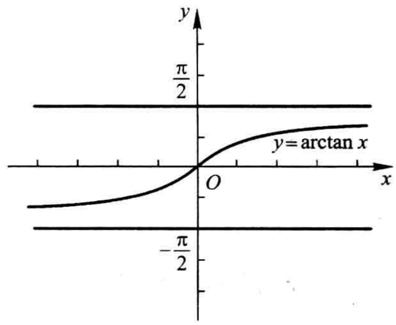

图 1-8

定义 2 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to A$.

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$.

由上述定义可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

又如，由图 1-8 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，而当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 不能无限接近于一个确定的常数，所以当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 的极限不存在.

根据定义 1 与定义 2 可以得出以下结论：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

（2）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，但 $A\neq B$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 至少有一个不存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 就不存在.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$.

解 由图 1-9 可看出，

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$不存在，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}$不存在.

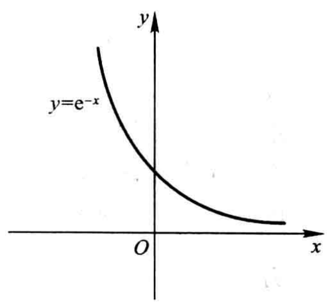

图 1-9

案例 1【设备折旧费】 某工厂对一生产设备的投资额是 1 万元，每年的折旧费为该设备账面价格（即以前各年折旧费用提取后余下的价格）的$\frac{1}{10}$，那么这一设备的账面价格（单位：万元）第一年为 1，第二年为$\frac{9}{10}$，第三年为$\left(\frac{9}{10}\right)^2$，第四年为$\left(\frac{9}{10}\right)^3$，……，第 n 年为