2010—2012

主编 钟吉洛 缪加立

小学创新数学分析与解

五年级

四川出版集团·四川辞书出版社

2010—2012

五年级

WU NIANJI

XIAOXUE CHUANGXIN SHUXUE FENXI YU JIE

小学创新数学分析与解

主　编　钟吉洛　缪加立

编　委　江　雪　陈锦天　刘朝生　张明君
程　郑　韩永芳　黄国建　苏　晗
陈　巧　张传淑　李　霞　陈　涛
林光旭　谢　洋　袁　洁　江春梅
白　雅　田学宾

四川出版集团·四川辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学创新数学分析与解.五年级/钟吉洛,缪加立主编.
—成都:四川出版集团·四川辞书出版社,2010.1
ISBN 978-7-80682-559-4

Ⅰ.小…　Ⅱ.①钟…②缪…　Ⅲ.数学课—小学—解题
Ⅳ.G624.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第231552号

小学创新数学分析与解(五年级)

钟吉洛　缪加立　主编

丛书策划/方光琅
责任编辑/方光琅
复　　审/刘　玲
终　　审/唐瑾怀
检　　查/田学宾
版式设计/王　跃
封面设计/武　韵
责任印制/严红兵　肖嗣兰
出版发行/四川出版集团
　　　　　四川辞书出版社
地　　址/成都市三洞桥路12号
邮政编码/610031
印　　刷/成都金星彩色印务有限责任公司
开　　本/880 mm×1230 mm　1/32
版　　次/2010年1月第1版
印　　次/2010年1月第1次印刷
印　　张/9.5
书　　号/ISBN 978-7-80682-559-4
定　　价/15.80元

·本书如有印装质量问题,请寄回出版社掉换。
·市场营销部电话:(028)87734330　87734332

前　言

今天，数学正以前所未有的方式向社会的一切领域渗透，高新技术的本质是数学。长大想成为科学家的小朋友大部分都喜欢数学。如何保持小学生的学习热情和兴趣是学习好数学的关键问题。本书的目的是教会小学生分析数学问题，而不是无休止地做题，这是维持小学生学习热情和兴趣的最好方法。

本书内容主要选自国内外各级各类创新数学培训教材中的题目，以及各地重点中学和外国语学校的招生试题，按试题的类型和思维方式分类，每一类型给出例题和习题。每一道例题都从题目的要求和小学生的认知特点出发，给出了“思路分析”，其目的是教会小学生用最基本的数学思维方法来思考问题，同时领略到“创新数学”的丰富多彩，体会到“创新数学”充满了智慧和趣味。书中习题均给出了解答，部分习题还给出了详细的“解题思路”。

本书选题主要考虑题目思维方法的训练价值和典型性。这些题目包括了小学数学要求的所有训练方法、思维方法和解题方法，以满足读者查检需要。

按照小学生的认知特点和九年义务教育新课标课程，首先，选题目的主要是培养学习数学的感觉和兴趣，初步培养数学语言的使用方法；其次，对于高年级选题主要是考虑小学数学的思维方法、解题方法和技巧，同时也满足小学毕业生参加省、市重点中学和各类外语学校的考试（如果要考的话）需要。

本书供对数学有兴趣的小朋友选读。

编　者

2010 年元月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一　数的整除

例题 1

在□内填上合适的数字,使五位数$\overline{5\square13\square}$能被 9 整除。

【思路分析】设千位数字为 a,个位数字为 b,若一个数能被 9 整除,则应有 $5+a+1+3+b$ 能被 9 整除,即 $a+b$ 能被 9 整除。讨论 a、b 不同的取值,可得解。

【解】 设千位数字为 a,个位数字为 b。因为$\overline{5a13b}$能被 9 整除,所以 $5+a+1+3+b$ 能被 9 整除,即 $a+b$ 能被 9 整除。$a+b$ 只可能是 0、9、18。

用逐个列出法。

$a=0,b=0;a=0,b=9;a=1,b=8;a=2,b=7;$

$a=3,b=6;a=4,b=5;a=5,b=4;a=6,b=3;$

$a=7,b=2;a=8,b=1;a=9,b=0;a=9,b=9$。

所以,五位数$\overline{5\square13\square}$能被 9 整除的有:

50130,50139,51138,52137,53136,54135,55134,56133,57132,58131,59130,59139。

注意:下面列出的有关整数的几个特征,在后面的题目中都会遇到。

(1)9 的倍数的特征:

如果一个自然数的各个数位上的数字和是 9 的倍数,那么这个数就是 9 的倍数。

(2)4(或 25)的倍数的特征:

如果一个自然数的末两位是 4(或 25)的倍数,那么这个数就是 4(或 25)的倍数。

(3)8(或 125)的倍数的特征:

如果一个自然数的末三位是8(或125)的倍数,那么这个数就是8(或125)的倍数。

(4)7或(11,13)的倍数的特征:

如果一个自然数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差(以大减小)是7(或11,13)的倍数,那么这个数就是7(或11,13)的倍数。

若一个数奇数位上的数字和与偶数位上的数字和的差(以大减小)能被11整除,这个数就能被11整除。

例题2

如果 a、b 都不是3的倍数,并且 $a>b$,那么 $a+b$、$a-b$ 中一定有一个是3的倍数,这是为什么?

【思路分析】将 a 写成 $a=3q_1+1$ 或 $a=3q_1+2$;同理 $b=3q_2+1$ 或 $b=3q_2+2$(q_1、q_2是 a 和 b 分别除以3的不完全商)。再分两种情况讨论:a、b 除以3后余数相同或余数不同。

【解】 $a=3q_1+1$ 或 $a=3q_1+2$

$b=3q_2+1$ 或 $b=3q_2+2$

(q_1、q_2是 a 和 b 分别除以3的不完全商)

如果 a、b 除以3后余数相同:

$a-b=3(q_1-q_2)$,$a-b$ 是3的倍数

如果余数不同:

$a+b=3(q_1+q_2+1)$,$a+b$ 是3的倍数。

例题3

七位数“$\overline{\square 1995 \square\square}$”能同时被4,9和25整除。请问,“$\square$”里各该填什么数?

【思路分析】我们先考虑“能被25整除”这一条件,可知,这个七位数的

末两位必须是00、25、50或75；再考虑"能被4整除"这一条件，也只需看它的末两位，并从上面的四种情况中挑选出"00"这一种。

最后考虑"能被9整除"这一条件，应看它各位上的数字之和，因为$1+9+9+5+0+0=24$，即可知它的首位数只能填"3"（$24+3=27$，27能被9整除）。

【解】 答案为:3199500。

例题 4

一个三位数能被3整除，去掉它的末位数后，所得的两位数是17的倍数。这样的三位数中，最大的是几？

【思路分析】这个数的前两位数字所组成的数应是17的倍数中最大的。

【解】 在两位数中，是17的倍数的数中最大的为$17\times5=85$，则所求数的前两位数字为85。

因为$8+5=13$，故所求数的个位数字为2、5、8时，该数能被3整除，若该数最大，其个位数字应为8。

所求之数为:858。

例题 5

从51~59九个自然数中，任选两个不同数，使它们两个数的积既能被2整除，又能被3整除，这样的两个数有多少组？

【思路分析】要找出51~59九个自然数中，两个数的积能被2整除，又能被3整除的组数，先要找出能被2整除的数，后找出能被3整除的数，再找出能满足同时被2和3整除的数，最后分别组合可得出几组不同的数。

【解】 在51~59九个自然数中，能被2整除的数:52、54、56、58；能被3整除的数:51、54、57；能同时被2和3整除的数:54。分别组合可得：

51×52　　51×54　　51×56　　51×58

54×52　　54×56　　54×58

57×52　　57×54　　57×56　　57×58

54×53　　54×55　　54×59

例题6

已知$45\mid\overline{x1993y}$，求所有满足条件的六位数$\overline{x1993y}$。

【思路分析】因为$45=5\times9$，所以根据整除性质可转化为$5\mid\overline{x1993y}$和$9\mid\overline{x1993y}$。

【解】 因$45=5\times9$

有$5\mid\overline{x1993y}$，$9\mid\overline{x1993y}$

可知y可取0或5。

当$y=0$时，根据$9\mid\overline{x1993y}$及数的整除特征可知$x=5$；

当$y=5$时，根据$9\mid\overline{x1993y}$及数的整除特征可知$x=9$。

可知满足条件的六位数是519930或919935。

例题7

判断5873556能否被13或7整除。

【思路分析】根据能被13或7整除的数的特征，只要看5873556的末三位数与末三位数以前的数所组成的数的差能否被13或7整除就行了。

【解】 $5873-556=5317$，$317-5=312$

因$312\div13=24$

所以5873556能被13整除。

因$312\div7=44\cdots\cdots4$

所以5873556不能被7整除。

例题8

从0、3、5、7这4个数字中任选3个数排成能同时被2、3、5整除的三位数，这样的三位数有多少？

【思路分析】这个三位数能同时被 2 和 5 整除，这个三位数的个位数字一定是 0。设这个三位数为$\overline{ab0}$，根据能被 3 整除的数的特征可知：则 $a+b+0=a+b$ 一定是 3 的倍数。在 0、3、5、7 中已选用了 0，还剩 3、5、7 三个数字可用，其中只有 5 与 7 的和是 3 的倍数。适当调换 5 与 7 的位置可得到所要求的三位数。

【解】 因为这个三位数能同时被 2 和 5 整除。

所以个位数字一定是 0。

设这个三位数为$\overline{ab0}$，$a+b+0=a+b$ 一定是 3 的倍数。在 3、5、7 中，只有 $5+7=12$ 是 3 的倍数。

所以这样的三位数有两个：570、750。

例题 9

学校一共买了 28 支价格相同的钢笔，共付人民币$\overline{9\square.2\square}$元。已知$\square$处数字相同，请问每支钢笔多少元？

【思路分析】$\overline{9\square.2\square}$元 $=\overline{9\square2\square}$分，$28=4\times7$。根据整除性质可知，要求 4 和 7 均能整除$\overline{9\square2\square}$。

【解】 因$\overline{9\square.2\square}$元 $=\overline{9\square2\square}$分

$28\mid\overline{9\square2\square}$，$28=4\times7$

有 $4\mid\overline{9\square2\square}$，$7\mid\overline{9\square2\square}$

由 $4\mid\overline{2\square}$可知，$\square$处只能填 0 或 4 或 8。

因 $7\nmid9020$，$7\nmid9424$，$7\mid9828$

可知$\square$处不能填 0 和 4，只能填 8。

又因 9828 分 $=98.28$ 元

$98.28\div28=3.51$(元)

所以每支钢笔 3.51 元。

例题 10

方芳买了 7 支铅笔、1 支钢笔、12 个笔记本和 4 块橡皮。方芳只知道每支铅笔 2 角 4 分，每支钢笔 3 元 2 角 8 分，笔记本和橡皮的单价方芳不太清楚，售货员要方芳一共付 9 元 3 角，方芳想了想说售货员算错了。方芳是对的吗？方芳是怎么判断的？

【思路分析】首先把单价全变成以分作单位的，铅笔单价 24 分，钢笔单价 328 分，而 12 个笔记本和 4 块橡皮的数量都是 4 的倍数，它们的钱数也应是 4 的倍数，所以四件商品的总价应该是 4 的倍数。但是 9 元 3 角 = 930 分，不是 4 的倍数，所以方芳说售货员算错了。

【解】因为铅笔单价 24 分，钢笔单价 328 分，而 12 个笔记本和 4 块橡皮的数量都是 4 的倍数，应付的钱数应是 4 的倍数，所以四件商品的总价应该是 4 的倍数。9 元 3 角 = 930 分，不是 4 的倍数，所以方芳是对的，售货员算错了。

例题 11

一个整数乘以 13 后，积的最后三位数是 123，那么，这样的整数中最小是几？

【思路分析】如果列出可能的竖式：

$$
\begin{array}{r}
\cdots\square\square\square\square\square \\
\times \qquad\qquad 1\ \ 3 \\
\hline
\cdots\square\square\square\square\square \\
\cdots\square\square\square\square\square\ \ \\
\hline
\cdots\square\square\square\ 1\ 2\ 3
\end{array}
$$

可见，积的末位数字“3”只能是被乘数的末位数字与 3 相乘的积的个位数字，有 1 × 3 = 3，这说明被乘数的个位数字只能是 1，于是该竖式可改写为：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{array}{r} \cdots\square\square\square\square1 \\ \times\qquad 13 \\ \hline \cdots\square\square\square\square3 \\ \cdots\square\square\square\square1 \\ \hline \cdots\square\square\square123 \end{array}$$

为使被乘数的十位数字与3相乘后取末位数字再与1相加得2,则该十位数字与3相乘的积的末位数字为1,从而被乘数的十位数字必为7。

$$\begin{array}{r} \cdots\square\square\square71 \\ \times\qquad 13 \\ \hline \cdots\square\square\square13 \\ \cdots\square\square\square71 \\ \hline \cdots\square\square\square123 \end{array}$$

但 $71\times13=923$,其百位数字不为1,故被乘数至少还有一位数字。由 $7\times3=21$,为使结果的百位数字得1,只有 $4+7$ 的末位数字为1,由 $7\times3=21$,进到百位数上有一个2,故被乘数的百位数字与3相乘得数的末位数为2,即被乘数的百位数字必为4,此时有 $471\times13=6123$。

【解】这样的整数最小是471。

例题12

一个三位数减去它的各位数字之和,其差还是一个三位数 $\overline{73\square}$,$\square$ 内的数字是几?

【思路分析】设原来的三位数是 $\overline{abc}$,则多位数字之和是 $a+b+c$,那么 $\overline{abc}-(a+b+c)=\overline{73\square}$,可求出 $\square$ 内的数字。

【解】设原来的三位数是 $\overline{abc}$。

$\overline{abc}-(a+b+c)$

$=a\times100+b\times10+c-a-b-c$

$=99a+9b$

$=(11a+b)\times 9$

$(11a+b)\times 9$ 是 9 的倍数，这说明$\overline{73\square}$是 9 的倍数。根据能被 9 整除的数的特征可知$\square$内只能填 8。

例题 13

已知一个六位数$\overline{6x6x6x}$能被 11 整除，x 是 0 至 9 中的数，这样的六位数有几个？它们各是多少？

【思路分析】所给数的奇位数字之和是$3x$，偶位数字之和是 18。只有当 $x=6$ 时，$3x-18$ 才能被 11 整除。

【解】 满足条件的六位数只有 1 个，它是 666666。

例题 14

将 1、2、3、…30 从左到右依次排列成一个 51 位数：123456…2930，试求这个 51 位数除以 11 的余数。

【思路分析】这个 51 位数奇数位上的数字分别是 0、9、8、7、6、5、4、3、2、1、0、9、8、7、6、5、4、3、2、1、0、9、7、5、3、1。这些数字之和为：$1+3+5+7+9+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 2=115$。

这个数的偶数位上的数字分别是 3、$\overbrace{2、2、2、2、\cdots 2}^{10个2}$、$\overbrace{1、1、\cdots、1}^{10个1}$、8、6、4、2。这些数字之和为：$2\times 10+1\times 10+3+8+6+4+2=53$。根据整除性质可求出 51 位数除以 11 的余数。

【解】 123456…282930 这个 51 位数奇数位上的数字之和为：$1+3+5+7+9+(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 2=115$。

偶数位上的数字之和为：

$2\times 10+1\times 10+3+8+6+4+2=53$。

$115-53=62$，$62\div 11=5\cdots\cdots 7$

所以这个 51 位数除以 11 的余数是 7。

例题 15

如果两个两位数的和为64,此两数积可以整除4875,那么这两数的差是多少?

【思路分析】两数积可以整除4875,即此二数的积是4875的约数,所以应先分解4875,在其约数中寻找和为64的两个约数。

【解】 $4875=3\times5^3\times13$

4875的小于64的约数是两位数的有15,13,25,39。

在这四个数中,和为64的两个数只有25与39,而$39\times25=3\times5^2\times13$是4875的约数。

此二数为39与25。

两数之差:$39-25=14$。

例题 16

从1数到10000,在这10000个数中,既不能被8整除,也不能被125整除的数有多少个?

【思路分析】解答本题的关键是先求出这10000个数中能被8和125整除的数各有多少个,再从10000个数中减去能被8和125整除的数的个数,此题得解。

【解】 观察能被8整除的数,如8、16、24、32…在连续自然数列里,每隔8个数就有一个数能被8整除。因此在1~10000中就有$10000\div8=1250$(个)被8整除。同样可以知道,在连续自然数列里每隔125个数就有一个能被125整除的数。在1~10000中就有$10000\div125=80$(个)能被125整除的数。又因为$8\times125=1000$,所以凡是1000的倍数既能被8整除,也能被125整除,这样就有重复计算两次的数,应从1250+80个数中减去。

即:$10000\div8+10000\div125-10000\div1000$

$=1330-10$

$=1320$(个)

能被 8 或 125 整除的数共有 1320 个，所以在 1 ~ 10000 这 10000 个数中既不能被 8 整除，也不能被 125 整除的数有

$10000-1320=8680$（个）。

例题 17

说明 12 位数$\overline{abbaabbaabba}$一定能被 3、7、11、13 整除。

【思路分析】要判别$\overline{abbaabbaabba}$能否被 3、7、11、13 整除，可先将此 12 位数进行改写：$\overline{abbaabbaabba}=\overline{abba}\times 100010001$，再判断$\overline{abba}$或 100010001 能否被 3、7、11、13 整除。

【解】 $\overline{abbaabbaabba}=\overline{abba}\times 100010001$

100010001 各个数位上数字和是 3，能够被 3 整除，所以这个 12 位数能被 3 整除。

四位数$\overline{abba}$的奇数位数字和与偶数位数字和 $a+b=b+a$，所以 $11\mid\overline{abba}$，原来的 12 位数一定能被 11 整除。

根据能被 7 或 13 整除的数的特征，100010001 与（$100010-1$）即 100009 要么都能被 7 或 13 整除，要么都不能被 7 或 13 整除。

同理，100009 与（$100-9$）即 91 要么都能被 7 或 13 整除，要么都不能被 7 或 13 整除。

因为 $91=7\times 13$，所以 100010001 能被 7 和 13 整除，可知这个 12 位数能被 7 和 13 整除。

注意：除了上面的形式外，我们经过检验可以发现：

（1）形如$\overline{ABCABC}$的六位数能被 7，11，13 整除。

（2）形如 $\underbrace{\overline{ABCABC\cdots ABC}}_{2n\text{个}ABC(n\text{是整数})}$ 的多位数都能被 7，11，13 整除。

例题 18

（1）364 能被 7 整除，168 也能被 7 整除，532 是否能被 7 整除？

（2）57 能被 19 整除，228 能否被 19 整除？

(3)1155 能被 5 整除,1155 也能被 11 整除,1155 能否被 55 整除?

【思路分析】(1)$532 = 364 + 168$。根据"如果两个数都能被同一个数整除,那么这两个数的和或差,也能被这个数整除"可知 532 也能被 7 整除。

(2)$228 = 57 \times 4$。根据"如果一个数能被另一个数整除,那么这个数的整倍数也一定能被另一个数整除"可知 228 也能被 19 整除。

(3)1155 能被 5 整除,1155 也能被 11 整除,5 和 11 互质。根据"如果一个数能同时被另外两个数整除,而且这两个数互质,那么这个数一定能被另外两个数的积整除"可知,1155 能被 55 整除。

【解】 (1)532 能被 7 整除。

(2)228 能被 19 整除。

(3)1155 能被 55 整除。

例题 19

在算式$\overline{1abcde} \times 3 = \overline{abcde1}$中,不同的字母表示不同的数字,相同的字母表示相同的数字,求$\overline{abcde}$。

【思路分析】$\overline{1abcde} = 100000 + \overline{abcde}$,而$\overline{abcde1} = \overline{abcde} \times 10 + 1$,于是可以把$\overline{abcde}$看做一个整体,用 x 来表示,就可以用方程来解本题。

本题还可以用逐步推理的方法,利用乘法的性质及末位数的特点来得出该数,见解法二。

【解法一】 设$\overline{abcde} = x$,于是$\overline{1abcde} = 100000 + x$,$\overline{abcde1} = 10x + 1$,于是得方程

$(100000 + x) \times 3 = 10x + 1$

$300000 + 3x = 10x + 1$ 即 $7x = 299999$

$x = 42857$

【解法二】 由于 $e \times 3$ 的末位数字为 1,故 $e = 7$。

因 $7 \times 3 = 21$,故 $d \times 3 + 2$ 的末位数字为 7,于是 $d \times 3$ 的末位数字为 5,故 $d = 5$。

因 $5\times3=15$，故 $c\times3+1$ 的末位数字为 5，于是 $c\times3$ 的末位数字为 4，故 $c=8$。

因 $8\times3=24$，故 $b\times3+2$ 的末位数字为 8，于是 $b\times3$ 的末位数字为 6，故 $b=2$。

因 $2\times3=6$，故 $a\times3$ 的末位数字为 2，于是 $a=4$，而 $14\times3=42$，满足题意。

可得 $\overline{abcde}=42857$。

检验：$142857\times3=428571$　推理正确。

例题 20

下面这个 41 位数 55…5 □ 99…9（其中 5 和 9 各有 20 个）能被 7 整除，那么中间方格内的数字是几？

【思路分析】根据能被 7 整除数的特征，一个各位上数字都相同的六位数一定能被 7 整除，那么这 41 位数的前 18 位与后 18 位都能被 7 整除。

我们只要满足 55 □ 99 能被 7 整除就行了。

【解】 41 位数的前 18 位与后 18 位都能被 7 整除。

因为 $550\div7=78\cdots\cdots4$，$7-4=3$，可见 553 能被 7 整除。由于 □ 99 能被 7 整除，而 □ 中的数加上 3 不能满 10，即小于 7，于是应考虑 □□ $\times7=$ □ 99，试算得 $57\times7=399$，就是说 399 能被 7 整除，因此，55 □ 99 的 □ 中的数是 $3+3=6$，即所求 41 位数的中间方格内的数字是 6。

例题 21

三位数的百位、十位、个位数字分别是 5、a、b，将它连续重复写 99 次成为：

$$\underbrace{\overline{5ab5ab\cdots5ab}}_{99个5ab}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com