高等教育自学考试全国统一命题考试
历年试卷完全详解

高等数学（一）微积分

朝华出版社

梯田自考真题解析系列

高等教育自学考试全国统一命题考试

历年试卷完全详解

高等数学(一)微积分

主　编　朱文举
王　宏
李其霖

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等教育自学考试全国统一命题考试高等数学(一)微积分历年试卷完全详解/朱文举,王宏,李其霖主编. —北京:朝华出版社,2003.11

ISBN 7-5054-0845-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①朱…②王…③李… Ⅲ.微积分—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.O172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082198 号

高等数学(一)微积分

主　　编 朱文举　王　宏　李其霖
责任编辑 王　磊　凌舒昉
特约编辑 吴伶芝
封面设计 朱　珊
责任印制 赵　岭
出版发行 朝华出版社
社　　址 北京市车公庄西路 35 号　　**邮政编码** 100044
电　　话 (010)68433166
(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真 (010)88415285
印　　刷 北京高岭印刷有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 16 开　　**字　　数** 200 千字
印　　数 0—10000　　**印　　张** 10.25
版　　次 2003 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
装　　别 平
书　　号 ISBN 7-5054-0845-3/G.0281
定　　价 15.00 元

Introduction 说 明

梯田品牌自考系列丛书，由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可，全国每年约有800万人次的考生使用本品牌，销量居全国同类书之榜首，被誉为最受欢迎的自考辅导丛书。

梯田自考真题解析系列——《历年试卷完全详解》丛书涉及公共课程共13门，每门课程汇集了从新教材启用时的全国统考试卷，并对每套试卷加以详尽的分析和解答。

本丛书的宗旨是：在临考冲刺阶段内，考生通过对历届试卷的大量强化训练提高自己的解题技巧、实战应试能力，同时强化已经学过的知识要点、考核重点，从而在最短的时间内取得理想的成绩。

本丛书具有如下特点：

1. 以每年统考的时间为序进行编写，对于每套试卷不仅给出了参考答案，而且提供了每道试题的详细分析及解题思路，解析过程精炼、针对性强，以攻克难点、突出考点为主，从而帮助考生全面掌握考试重点。

2. 以考题为线索，在解析过程中对重要知识点及考点进行了归纳总结，重在培养考生掌握和灵活运用考核知识点的能力。

3. 解答过程详细，并对每道试题探索多种解法，重在提高考生解题能力，拓宽解题思路。

4. 考生在临考阶段使用本书，可较好地进行自我考核、自我评估以及自我调整复习的方向，有利于提高考生的自信心与实战应试能力，从而成功地通过全国自学统一考试。

5. 人性化处理模式。精心进行了版式设计，采用国际流行开本，同时采用双色印刷，利于考生翻阅学习。

本套丛书的编者都是长期从事高等教育自学考试的一线教学工作的权威专家，具有丰富的自考辅导经验，所辅导的学生的单科通过率均在90%以上，受到广大考生的赞誉和推崇。我们相信本丛书的出版发行会对广大考生顺利通过考试起到积极的推动作用。我们预祝每一位考生在考试中取得理想的成绩。

编 者

2003年 11月

CONTENTS 目 录

1998年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一)微积分试卷

第一部分　选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共40小题,每小题1分,共40分)在每小题列出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是

A. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

B. $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$

C. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

D. $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$　【　】

2. 已知 $f(x+1)=x^2$,则 $f(x)=$

A. x^2　　B. $(x+1)^2$

C. $(x-1)^2$　　D. x^2-1　【　】

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,下列函数中必为奇函数的是

A. $y=-|f(x)|$　　B. $y=xf(x^2)$

C. $y=-f(-x)$　　D. $y=f(x)+f(-x)$　【　】

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}=$

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. ∞　【　】

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=$

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2　【　】

6. 若 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=A$,则对于给定的任意小的正数 ε,总存在一个正数 δ,使得当满足何条件时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

A. $0<x-x_0<\delta$　　B. $0<x-2<\delta$

C. $0<2-x<\delta$　　D. $0<|x-2|<\delta$　【　】

7. $\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2$,对于给定的正数 $\varepsilon=\dfrac{1}{500}$,则定义中的 δ 必须

A. $\delta\geqslant\dfrac{1}{1000}$　　B. $\delta=\dfrac{1}{1000}$

C. $\delta<\dfrac{1}{1000}$　　D. $\delta\leqslant\dfrac{1}{1000}$　【　】

8. $\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}=$

1

A. 2　　B. 0　　C. ∞　　D. $-\sqrt{3}$　　【　】

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$　　【　】

10. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义，是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限的

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充分必要条件　　D. 无关的条件　　【　】

11. 下列极限存在的有

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$　　【　】

12. 根据函数在一点的连续与可导的关系，判别函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leqslant0\\2x, & 0<x<1\\\dfrac{1}{x}, & x\geqslant1\end{cases}$ 在下列哪一点处不可导？

A. $x=-1$　　B. $x=0$

C. $x=1$　　D. $x=2$　　【　】

13. 将半径为 R 的球加热，如果球的半径伸长 ΔR，则球的体积增加了多少？即 $\Delta V\approx$

A. $\dfrac{4}{3}\pi R^3\Delta R$　　B. $4\pi R^2\Delta R$

C. $4\pi R^2$　　D. $4\pi R\Delta R$　　【　】

14. 设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $\mathrm{d}y=$

A. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$　　B. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$

C. $\dfrac{\ln x-1}{x^2}$　　D. $\dfrac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x$　　【　】

15. 设 $f(x)=\ln\cos x$，则 $f'(x)=$

A. $\dfrac{1}{\cos x}$　　B. $\tan x$　　C. $\cot x$　　D. $-\tan x$　　【　】

16. 设 x 为自变量，当 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时，$\mathrm{d}(x^3)=$

A. $3x^2\mathrm{d}x=3\times1^2\times0.1=0.3$　　B. 0

C. $(\Delta x)^2=(0.1)^2=0.001$　　D. $3\mathrm{d}x=3\times0.1=0.3$　　【　】

17. 幂函数的原函数一定是

A. 幂函数　　B. 指数函数

C. 对数函数　　D. 幂函数或对数函数　　【　】

18. 函数 $y=x^2+1$ 在区间[0,2]上

A. 单调增　　B. 单调减

C. 不增不减　　D. 有增有减　　【　】

19. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都有 $f'(x)=g'(x)$，则在 (a,b) 内必有

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f(x)=C_1, g(x)=C_2$（C_1, C_2 常数）

C. $f(x)=g(x)+1$　　D. $f(x)=g(x)+C$（C 常数）　【　】

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可微，且 $xf''(x)-f'(x)>0$，则 $\frac{f'(x)}{x}$ 在区间 $(0,a)$ 内是

A. 不增的　　B. 不减的

C. 单调增加的　　D. 单调减少的　【　】

21. 用下面的符号连接表达式：e^x ____ $e\cdot x$，其中 $x>1$.

A. $\geqslant$　　B. $\leqslant$　　C. $>$　　D. $<$　【　】

22. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(1+x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$，则计算

A. 正确

B. 错误，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x^2}$ 不是“$\frac{0}{0}$”型待定式

C. 错误，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(1+x^2)'}$ 不存在

D. 错误，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x^2}$ 本来不存在　【　】

23. 用微分近似公式计算 $e^{-0.1}\approx$

A. -0.1　　B. 0.1　　C. 0　　D. 0.9　【　】

24. 若 $\int f(x)\,dx=x^2e^{2x}+C$，则 $f(x)=$

A. $2xe^{2x}$　　B. $2x^2e^{2x}$

C. xe^{2x}　　D. $2xe^{2x}(1+x)$　【　】

25. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\,dx=$

A. $e^{-x}(1-x)+C$　　B. $e^{-x}(x+1)+C$

C. $e^{-x}(x-1)+C$　　D. $-e^{-x}(x+1)+C$　【　】

26. 若 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})\,dx=$

A. $F(e^x)+C$　　B. $-F(e^{-x})+C$

C. $F(e^{-x})+C$　　D. $\frac{F(e^{-x})}{x}+C$　【　】

27. 若 $\int f(x)\,dx=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\,dx=$

A. $2(1-x^2)^2+C$　　B. $-2(1-x^2)^2+C$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　D. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　【　】

28. $\int_0^1(2x+k)\,dx=2$，则 $k=$

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$　【　】

29. 设函数 $y=\int_0^x(t-1)\,dt$，则 y 有

A. 极小值$\frac{1}{2}$　　B. 极小值$-\frac{1}{2}$

C. 极大值$\frac{1}{2}$　　D. 极大值$-\frac{1}{2}$　　【　】

30. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=$

A. 发散　　B. -2　　C. 2　　D. 0　　【　】

31. 在下列级数中发散的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$

C. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$　　D. $\frac{3}{5}-\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}-\frac{3^4}{5^4}+\frac{3^5}{5^5}-\cdots$　　【　】

32. 若已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，S_n是它的前n项部分和，则它的和是

A. S_n　　B. u_n　　C. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$　　【　】

33. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\neq0)$收敛，则必有下列何式成立

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$必发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$必收敛　　【　】

34. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$的和函数是

A. e^x　　B. $\arctan x$　　C. $\ln(1+x)$　　D. e^{-x}　　【　】

35. 当$|x|$很小时，$\sqrt{1+x}\approx$

A. x　　B. $1+x$　　C. $1+\frac{1}{2}x$　　D. $1+\sqrt{x}$　　【　】

36. 过y轴上的点$(0,1,0)$且平行于xOz平面的平面方程是

A. $x=0$　　B. $y=1$　　C. $z=0$　　D. $x+z=1$　　【　】

37. 设$z=\sqrt{xy}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=$

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1　　【　】

38. 设$u=e^{xyz}$，则$du=$

A. $yze^{xyz}dx$　　B. $xze^{xyz}dy$

C. $xye^{xyz}dz$　　D. $e^{xyz}(yzdx+xzdy+xydz)$　　【　】

39. 函数$z=x^2+y^2$在点$(0,0)$处

A. 有极大值　　B. 有极小值

C. 无极值　　D. 不是驻点　　【　】

40. 方程$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$的通解为$y=$

A. Cx　　B. $\frac{C}{x}$　　C. $\frac{1}{x}+C$　　D. $x+C$　　【　】

第二部分　非选择题(共 60 分)

二、计算题(一)(本大题共 3 小题,每小题 4 分,共 12 分)

41. 求$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

42. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$.

43. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解.

三、计算题(二)(本大题共 4 小题,每小题 7 分,共 28 分)

44. 设$y=(1+x)\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})-\sqrt{2x+x^2}$,求 dy.

45. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$的收敛区间.

46. 已知$z=u^2v-uv^2$,且$u=x\cos y, v=x\sin y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

47. 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中 D 是圆 $x^2+y^2=2y$ 围成的区域.

四、应用题(本大题共 2 小题,每小题 8 分,共 16 分)

48. 某商品的边际成本为$K_M=7.5e^{0.15Q}$,且固定成本为 80,求总成本函数.

49. 设某商品需求函数为$Q=f(P)=12-\frac{1}{2}P$.

(1) 求需求弹性函数;(2) 求当 $P=6$ 时的需求弹性.

五、证明题(本题 4 分)

50. 设$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x<1\\(1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,证$f'(1)=-1$.

1998年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一)微积分试卷完全详解

一、单项选择题

1.【解析】 因为对数函数的真数大于0,又分母不能为0,由此可求出函数的定义域.

由$\begin{cases}|x-5|>0\\|x-5|\neq 1\end{cases}$,得$\begin{cases}x>5\text{ 或 }x<5\\x\neq 4\text{ 或 }x\neq 6\end{cases}$,于是得其定义域为

$$(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty).$$

【答案】 选D.

2.【解析】 已知$f(x+1)=x^2$,可令$x+1=t$,解出$x=t-1$.然后把t换成x即得出$f(x)$.

另法,也可由$f(x+1)=x^2$,把x^2化成$(x+1-1)^2$,即配成$x+1$的函数,然后把$x+1$换成x.

由$f(x+1)=x^2$,并令$x+1=t$,得$f(t)=(t-1)^2$.于是$f(x)=(x-1)^2$.

另法,因$f(x+1)=x^2=(x+1-1)^2$,故 $f(x)=(x-1)^2$.

【答案】 选C.

3.【解析】 由奇函数的定义判定,即定义域关于原点对称,且$y(-x)=-y(x)$成立.

因定义域为$(-\infty,+\infty)$,它关于原点对称,又$y(-x)=-xf[(-x)^2]=-xf(x^2)=-y(x)$.

【答案】 选B.

4.【解析】 分子分母同除以n^3,再利用极限的四则运算法则得到.

因 $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{5}.$$

【答案】 选A.

5.【解析】 由重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$可得到.

因 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x}\right)=2.$$

【答案】 选D.

6.【解析】 由$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=A$的极限定义得到.

因 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=A$,故对于任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$0<2-x<\delta$时,

$|f(x)-A|<\varepsilon$而知.

【答案】 选C.

7.【解析】 因为$\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2$,故要使$|-2x+2|<\frac{1}{500}$,只需$|x-1|<\frac{1}{1000}$,取$\delta\leqslant\frac{1}{1000}$即可.

【答案】 选D.

8.【解析】 分子分母同除以n,再利用极限四则运算法则.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{8n^3}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}-1}=-2\cdot\dfrac{1}{-1}=2.$

【答案】 选 A.

9.【解析】 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=1$，从而

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1)=2.$

【答案】 选 C.

10.【解析】 由定义知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关，故选 D.

【答案】 选 D.

11.【解析】 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}=+\infty$ 而不存在，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}=1$ 存在，故选 A.

【答案】 选 A.

12.【解析】 因 $x=0$，$x=1$ 是该函数的分界点，有可能不可导，必须利用定义验证，而 $x=-1$，$x=2$ 是 $f(x)$ 定义域内的点，显然可导.

因 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{2x-0}{x}=2$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x^2+2x-0}{x}=2$，即 $f'(0)=2$；

又 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x-1}{x-1}=\infty$，故 $f'(1)$ 不存在，即 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导.

【答案】 选 C.

13.【解析】 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$\mathrm{d}V=4\pi R^2\Delta R$，即 $\Delta V\approx 4\pi R^2\Delta R$.

【答案】 选 B.

14.【解析】 由 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$ 得到.

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

【答案】 选 B.

15.【解析】 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}(\cos x)'=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x.$

【答案】 选 D.

16.【解析】 当 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时，$\mathrm{d}(x^3)=3x^2\Delta x\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=3\times 1^2\times 0.1=0.3.$

【答案】 选 A.

17.【解析】 由导数公式 $(x^a)'=ax^{a-1}$ 及 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ 知.

【答案】 选 D.

18.【解析】 由导数符号即判定函数单调的充分条件判定.

因 $(x^2+1)'=2x>0$，$x\in(0,2)$，且在 $[0,2]$ 上 x^2+1 连续，

故 $y=x^2+1$ 在 $[0,2]$ 上单调增加.

【答案】 选 A.

19.【解析】 $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0, x\in(a,b)$，由拉格朗日中值定理的推论知，在 (a,b) 内，$f(x)-g(x)=C$，即 $f(x)=g(x)+C$.

【答案】 选 D.

20.【解析】 由单调的充分条件可得.

在 $(0,a)$ 内 $\left[\dfrac{f'(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf''(x)-f'(x)}{x^2}>0$，得 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内单调增加.

【答案】 选 C.

21.【解析】 由单调的充分条件或拉格朗日中值定理均可得出.

设 $f(x)=e^x-e\cdot x$，$f'(x)=e^x-e>0$，$x\in(1,+\infty)$. 故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内单增，即当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，因此当 $x>1$ 时，$e^x>e\cdot x$.

【答案】 选 C.

22.【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1+x^2}$ 不是“$\dfrac{0}{0}$”型待定式.

【答案】 选 B.

23.【解析】 当 $|x|$ 很小时，$e^x\approx1+x$，故 $e^{-0.1}\approx1-0.1=0.9$.

【答案】 选 D.

24.【解析】 由不定积分定义知，$f(x)=(x^2e^{2x})'=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2x(1+x)e^{2x}$.

【答案】 选 D.

25.【解析】 因 $f(x)=(e^{-x})'$，故 $\int xf(x)dx=\int xd(e^{-x})=xe^{-x}-\int e^{-x}dx=(x+1)e^{-x}+C$.

【答案】 选 B.

26.【解析】 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})d(e^{-x})=-F(e^{-x})+C$.

【答案】 选 B.

27.【解析】 $\int xf(1-x^2)dx=-\dfrac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$.

【答案】 选 D.

28.【解析】 因 $\int_0^1(2x+k)dx=[x^2+kx]_0^1=1+k$，由条件知 $1+k=2$，$k=1$.

【答案】 选 C.

29.【解析】 因 $y'=x-1=0$，得 $x=1$，又 $y''=1>0$，故

$y(1)=\int_0^1(t-1)dt=\left[\dfrac{t^2}{2}-t\right]_0^1=-\dfrac{1}{2}$ 为其极小值，即应选 B.

【答案】 选 B.

30.【解析】 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，故 $\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^2}dx$ 为广义积分，

又 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\int_\varepsilon^1\dfrac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty$，因此 $\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^2}dx$ 发散.

【答案】 选 A.

31.【解析】 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$，由级数收敛的必要条件知，

级数 $0.01+\sqrt{0.01}+\sqrt[3]{0.01}+\cdots$ 发散.

【答案】 选 C.

32.【解析】 由级数收敛发散的定义知，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

【答案】 选 C.

33.【解析】 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，又$u_n\neq 0$，于是有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=\infty\neq 0$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$发散.

【答案】 选 A.

34.【解析】 因$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x}$.

【答案】 选 D.

35.【解析】 由近似公式知，当$|x|$很小时，$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$.

【答案】 选 C.

36.【解析】 由条件，所求平面平行xOz平面，从而垂直于Oy轴，且又过点$(0,1,0)$，故所求平面方程为$y=1$.

【答案】 选 B.

37.【解析】 由$z=\sqrt{xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

【答案】 选 B.

38.【解析】 $$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yze^{xyz}dx+xze^{xyz}dy+xye^{xyz}dz\\&=e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz).\end{aligned}$$

【答案】 选 D.

39.【解析】 函数$z=x^2+y^2$，当$(x,y)\neq(0,0)$时，$x^2+y^2>0$，即$z(x,y)>z(0,0)$，故$(0,0)$是$z=x^2+y^2$的极小值点.

【答案】 选 B.

40.【解析】 由$y=Cx$得$\dfrac{dy}{dx}=C$，于是$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=C-\dfrac{Cx}{x}=C-C=0$，即$y=Cx$满足方程$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$，故$y=Cx$是$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$的解；又$y=Cx$含一个任意常数，而$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$是一阶微分方程，因而$y=Cx$是$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$的通解.

【答案】 选 A.

二、计算题(一)

41.【解析】 因为$\dfrac{xdx}{\cos^2x}=x\cdot\sec^2x dx=x\,d\tan x$，利用分部积分公式$\int u dv=uv-\int v du$可计算出结果.

【答案】 $$\begin{aligned}\int\frac{xdx}{\cos^2x}&=\int x\,d\tan x=x\tan x-\int\tan x dx\\&=x\tan x+\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

42.【解析】 属于“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，利用罗必塔法则，只要注意随时对其整理化简即可.

【答案】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x-\cos x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{\sin x}$
$=\lim\limits_{x\to0}(2\sec^3 x+1)=3.$

43.【解析】 这是一阶线性非齐次微分方程. 由公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$可求得其通解.

【答案】 这是一阶线性非齐次微分方程,且 $P(x)=1,Q(x)=e^{-x}$,故所求通解为

$$y=e^{-\int dx}\left[\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right]=e^{-x}\left(\int dx+C\right)=e^{-x}(x+C),$$

其中 C 为任意常数.

三、计算题(二)

44.【解析】 利用导数四则运算法则及复合函数的求导数法则可求得 y',而 $dy=y'dx$.

【答案】 $y'=(1+x)'\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})+(1+x)[\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})]'-(\sqrt{2x+x^2})'$

$$=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})+\frac{1+x}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}\left(1+\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}\right)-\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}$$

$$=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})+\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}-\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2}).$$

注意 $[\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})]'=\dfrac{1}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}\left(1+\dfrac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}}\right)$

$$=\frac{1}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+x^2}+1+x}{\sqrt{2x+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}.$$

45.【解析】 由条件知系数 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$可求得收敛半径 R,再讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nR^n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-R)^n$ 的敛散性可求得收敛区间.

【答案】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$,即 $R=1$ 为收敛半径,又当 $x=1$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,这个级数收敛;又当 $x=-1$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,显然这个级数发散,故所给级数的收敛区间为$(-1,1]$.

46.【解析】 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$可求得.

【答案】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=(2uv-v^2)\cos y+(u^2-2uv)\sin y$

$=(2x^2\sin y\cos y-x^2\sin^2 y)\cos y+(x^2\cos^2 y-2x^2\sin y\cos y)\sin y$

$=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y).$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^3(\sin y+\cos y)(1-3\sin y\cos y).$

47.【解析】 由条件知 $D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\rho\leqslant2\sin\theta\end{cases}$,以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$代入将二重积分化为极坐

标系下的累次积分.

【答案】 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\int_0^{\pi}\frac{8}{3}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$

$=-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta=-\frac{8}{3}\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$

$=-\frac{8}{3}\left[\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{32}{9}$

四、应用题

48.【解析】 已知 $K'(Q)=K_M=7.5\mathrm{e}^{0.15Q}$,且 $K(0)=80$,求 $K(Q)$,显然 $K(Q)=\int K_M\mathrm{d}\theta$,再由 $K(0)=80$ 定出常数即可.

【答案】 $K(Q)=\int 7.5\mathrm{e}^{0.15Q}\mathrm{d}Q=\frac{7.5}{0.15}\mathrm{e}^{0.15Q}+C=50\mathrm{e}^{0.15Q}+C$. 由 $K(0)=80$,得 $80=50+C, C=30$. 故 $K(Q)=50\mathrm{e}^{0.15Q}+30$.

49.【解析】 利用公式求需求弹性函数

$\eta(P)=\dfrac{-f'(P)}{\dfrac{f(P)}{P}}$,再把 $P=6$ 代入即得 $\eta(6)$.

【答案】 (1)$f'(P)=-\frac{1}{2}$,所求需求弹性函数为

$$\eta(P)=\frac{-f'(P)}{\dfrac{f(P)}{P}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{12-\dfrac{P}{2}}{P}}=\frac{P}{24-P}.$$

(2)$\eta(6)=\frac{6}{24-6}=\frac{1}{3}$.

五、证明题

50.【解析】 按导数定义,先求出 $f'_-(1)$,再求出 $f'_+(1)$,当 $f'_-(1)=f'_+(1)=-1$,即证得 $f'(1)=-1$.

【证明】 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{1-x-0}{x-1}=-1$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{(1-x)(2-x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}(x-2)=-1$.

故 $f'(1)=-1$.

1998年下半年高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一)微积分试卷

第一部分 选择题(共40分)

一、单项选择题(本大题共40小题,每小题1分,共40分)在每小题列出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设集合 $M=\{x \mid x^2-x-6>0\}$,$R=\{x \mid x-1\leqslant 0\}$,则 $M\cap R=$

A. $\{x \mid x>3\}$　　B. $\{x \mid x<-2\}$

C. $\{x \mid -2<x\leqslant 1\}$　　D. $\{x \mid x\leqslant 1\}$　　【　】

2. 已知 $f(x+1)=x^2$,则 $f(x)=$

A. x^2　　B. $(x+1)^2$

C. $(x-1)^2$　　D. x^2-1　　【　】

3. 函数 $f(x)=3+2\cos x$ 的值域是

A. $[2,4]$　　B. $[1,5]$

C. $[-1,1]$　　D. $[-2,2]$　　【　】

4. 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 是定义域内的

A. 周期函数　　B. 单调函数

C. 有界函数　　D. 无界函数　　【　】

5. 函数 $y=x(1+\cos^3 x)$ 的图形对称于

A. Ox 轴　　B. 直线 $y=x$

C. 坐标原点　　D. Oy 轴　　【　】

6. 若 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=A$,则对于给定的任意小正数 ε,总存在一个正数 δ,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,变量 x 应满足的条件是

A. $0<|x-x_0|<\delta$　　B. $0<|x-2|<\delta$

C. $0<x-2<\delta$　　D. $0<2-x<\delta$　　【　】

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 4x}=$

A. 0　　B. ∞　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$　　【　】

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=$

A. e　　B. e^{-1}　　C. 0　　D. ∞　　【　】

9. 下列各式中,极限存在且有限的是

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\sin x$　　B. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\sin x$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{|x|}}$　　【　】