

“十三五”应用型人才培养工程规划教材

工程力学 II

ENGINEERING MECHANICS II

王晓军 石怀荣 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

1512
248
2
“十三五”应用型人才培
养工程规划教材

工程力学 II

主 编	王晓军	石怀荣			
副主编	丁建波	楼力律	刘志军		
参 编	余 辉	杨 超	曹 霞	吕 明	
	谢占山	赵 静	何 华		

机械工业出版社

本书分为《工程力学 I》《工程力学 II》两册。《工程力学 I》讲述静力学基础和构件的静力学设计两部分内容。其中,静力学基础共 3 章,主要包括刚体静力学的基本概念和物体的受力分析,力系的简化,力系的平衡。构件的静力学设计共 8 章,包括材料力学概述与材料的力学性能,杆件的内力分析,杆件横截面上的应力分析,应力状态分析,构件的强度设计,杆件的变形分析及刚度设计,压杆稳定及提高构件强度,刚度和稳定性的措施,简单超静定问题。《工程力学 II》讲述工程动力学内容,共 6 章,包括点的运动学与刚体的基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动、刚体动力学、动静法、动载荷与疲劳,并在附录给出了部分习题参考答案。

本书针对应用型本科院校机械类、土木类专业的学生编写,也可作为高职高专、自学考试和成人教育的教材,并可供有关科研和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学. II/王晓军,石怀荣主编. —北京:机械工业出版社, 2015. 12

“十三五”应用型人才培养工程规划教材

ISBN 978-7-111-52342-0

I. ①工… II. ①王… ②石… III. ①工程力学-高等学校-教材
IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 300769 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:姜 凤 责任编辑:姜 凤 李 乐

版式设计:霍永明 责任校对:张 征

封面设计:张 静 责任印制:李 洋

三河市宏达印刷有限公司印刷

2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·7.5 印张·179 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-52342-0

定价 19.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

前 言

工程力学是一门理论性较强、与工程技术联系极为密切的技术基础学科，其定理、定律和结论广泛应用于各行各业的工程技术中。随着新型技术和新兴高技术企业的发展，生产一线需要大量的本科层次、复合型技术技能人才。为适应这样的社会需求，教育部也在引导地方高校转型为应用技术型院校，这些院校教学科研工作将全面转轨。本书是为该层次院校编写的工程力学教材。

在对国内地方本科院校基础力学（理论力学、材料力学、工程力学）教学现状的调研和分析的过程中，编者体会到目前各院校面临的人才培养模式改革、学时重新分配的问题，既是必须面对的严峻现实，也是教学内容和教学方法改革极好的机遇。为发挥基础力学在工科教学中的作用，结合多个同类院校的教学改革和实践的经验，本着实用、够用的原则，编者对原理论力学、材料力学的基本内容做了体系上的调整，并对内容进行了适当的取舍，简化理论推导的同时加强分析方法的陈述。本书分为两册：《工程力学I》和《工程力学II》，包括静力学基础、构件的静力学设计和工程动力学三篇，覆盖了理论力学和材料力学的基本部分。

本书强调受力分析在工程构件设计中的重要作用，在阐述刚体模型的受力分析和计算方法后，即开展工程构件的强度、刚度和稳定性的分析，目的是使读者能够将静力分析方法合理地应用于工程构件的分析中。

在静力学基础中，改变传统的公理体系，将静力学公理、原理按需要放在相关内容中陈述。在构件的静力学设计中，突出内力分析、应力分析、变形、强度和刚度以及稳定性的分析，避免同一分析方法在不同问题中的多次重复，有利于读者确定问题的所属范畴，明确解决问题的方法和途径。在工程动力学中，简要介绍了对质点和刚体的基本运动进行分析的常用方法，重点介绍点的合成运动以及刚体的平面运动。然后按照受力分析、运动分析以及力与运动的关系介绍了动力学普遍定理的原理及应用，并介绍了动静法以及动载荷与交变应力的基本内容。特别注意与物理课程力学部分形成区别，突出普遍原理在刚体动力学中的应用，减少重复，提高起点。

本书在基本理论、基本概念的阐述上力求简洁易懂，所选例题多有相应的工程背景，插图尽量形象生动，贴近工程实际，便于读者理解。

参加本书编写的人员有常州工学院的王晓军、刘志军、余辉、曹霞，河海大学的楼力律，江苏理工学院的杨超，蚌埠学院的石怀荣、吕明、赵静、何华，南通航运职业技术学院的丁建波，安徽科技学院的谢占山，他们均在应用型高校长期从事力学教学工作，具有十分丰富的教学经验。其中，王晓军、石怀荣任主编，丁建波、楼力律、刘志军任副主编。王海东、卓娜两位同学精心绘制了本书的插图。本书在编写过程中，得到了相关学院教师的大力支持，他们提出了许多宝贵的意见。在此向所有贡献者一并致谢。

本书承蒙北京航空航天大学蒋持平教授悉心审阅，谨在此表示衷心的感谢。

编者希望本书能满足应用技术层面师生的需求，但限于编者的水平和能力，书中难免存在疏漏和欠妥之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第Ⅲ篇 工程动力学

第12章 点的运动学与刚体的

基本运动 3

12.1 点的运动学 3

12.2 刚体的基本运动 9

思考题 14

习题 15

第13章 点的合成运动 18

13.1 绝对运动、相对运动和牵连运动 18

13.2 点的速度合成定理 21

13.3 点的加速度合成定理 25

思考题 29

习题 30

第14章 刚体的平面运动 34

14.1 刚体平面运动的基本概念与
分析方法 34

14.2 平面图形上点的
速度分析 36

14.3 速度瞬心位置的确定 40

14.4 平面图形上各点加速度分析的
基点法 42

思考题 45

习题 46

第15章 刚体动力学 51

15.1 动量定理 51

15.2 动量矩定理 56

15.3 动能定理 64

15.4 动力学综合问题 69

思考题 71

习题 73

第16章 动静法 77

16.1 质点的惯性力与动静法 77

16.2 质点系的动静法 79

16.3 刚体上惯性力系的简化 80

16.4 绕定轴转动刚体的轴承约束力 84

思考题 86

习题 86

第17章 动载荷与疲劳 90

17.1 动应力计算 90

17.2 构件受冲击时的应力与变形 93

17.3 交变应力和疲劳强度 98

思考题 101

习题 102

附录 部分习题参考答案 107

参考文献 113

第Ⅲ篇 工程动力学

工程动力学由运动学分析和动力学分析两个部分组成。

运动学分析不考虑影响物体运动的物理因素，只研究物体运动的几何性质，以便提出运动分析的一般方法，为机构运动分析提供基本的概念、理论和方法，同时为动力学分析奠定基础。这部分由于对运动的描述具有相对性，因此在运动分析中，必须指明参考系。一般情况下，若不做特殊说明，均选固连于地球的参考系。由于运动对于不同参考系表现的形式不同，故可以利用这个性质，通过选择合适的参考系，使得对运动的描述变得简单，利于研究工作的开展。在点的合成运动以及刚体的平面运动中，都采用的是这个方法。

动力学分析主要讨论力与运动之间的关系。由静力学分析可知，物体保持平衡的条件是作用于物体上的力系的主矢和对任意一点的主矩为零，即 $\mathbf{F}'_R = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ 。因此，静力学是动力学的特殊情形。动力学分析涉及的受力分析，可以应用静力学的分析方法和相关的结论，例如力的分解、合成，以及力系简化的结果等，都可以直接应用于动力学分析。1687年，牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》中对前人的研究成果进行总结，提出了三条定律，即牛顿三定律，也称为动力学普遍定律。动力学普遍定律是动力学的最基本的规律。由它们可以导出刚体、流体等质点系动力学的基本规律，从而建立了经典力学体系。

牛顿第一定律（惯性定律） 任何质点若不受力的作用，将保持原来的静止或匀速直线运动状态。牛顿第一定律阐明了物体惯性运动的条件是其所受的力系为平衡力系，同时也确定了经典力学适用于惯性参考系（不受外力作用的质点在其中保持静止或匀速直线运动的参考系）。

牛顿第二定律 质点加速度的大小与其所受力的大小成正比，与其质量成反比，方向与力的方向相同。

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

牛顿第二定律建立了力与运动的关系，由此可以分析求解质点的两类问题：由已知作用力求解运动，以及由运动求解质点的受力。牛顿第二定律可以推导出动力学的其他方程，因此也被称为**动力学基本方程**。牛顿第二定律是一个瞬时矢量式，力与加速度总是同时存在、同时改变、同时消失。

牛顿第三定律（作用力与反作用力定律） 两个质点之间的相互作用力总是等值、反向、共线，分别作用在两个质点上。

牛顿第三定律适用于任何参考系。

质点系中的每一个质点的运动与受力都有牛顿第二定律所描述的关系，但工程力学更关心质点系整体的运动规律。动力学普遍定理：动量定理、动量矩定理和动能定理，建立了描

述质点系整体运动的特征量（动量、动量矩、动能）与力系对质点系的机械作用量（力、冲量、功）之间的关系，揭示了质点系整体运动与受力之间的关系。在应用动力学普遍定理求解问题时，常常可以避免内力的出现，从而使求解分析的过程简洁。

在引入惯性力概念后，动力学问题在形式上可以转化为静力学问题进行分析求解，称为动静法。由于静力学分析方法简单直观，方法灵活，可以方便地运用分析计算，因此工程上得以广泛的应用。但动静法往往需要分解系统，使得未知内力参与到求解计算中，带来一定的烦琐。因此，要根据实际情况灵活选择适用的动力学原理求解相关问题。

在动力学分析中，对于具有加速度的运动构件，其应力、变形等问题，也可通过乘以动荷因数的方法，将动力学问题简化为可通过简单的静力分析求解的问题。

第 12 章

点的运动学与刚体的基本运动

12.1 点的运动学

点的运动学研究点的几何位置随时间变动的规律，是研究一般物体运动的基础，具有独立的应用意义。一般情况下，为了使研究的结果不依赖于坐标系的选择，通常选用矢量表示各种量之间的关系，在求解具体问题时，再选择合适的参考系。本节将阐述描述质点运动方程的三种方法以及三种方法下质点的速度、加速度求解方法。

描述点的位置参量随时间连续变化规律的函数表达式称为点的**运动方程**。点在空间运动的路径称为点的**运动轨迹**。

在参考系中选择一固定点 O ，由 O 向点 M 作矢量 r 称为动点 M 相对于 O 的**矢径**，如图 12-1 所示。当点 M 运动时，矢径 r 是随时间变的矢量，一般可表示为时间 t 的单值连续函数：

$$r = r(t) \quad (12-1)$$

矢径 r 唯一地决定了点 M 的位置，方程 (12-1) 称为点 M 的**矢量形式的运动方程**。

矢径端点在空间描出的曲线称为**矢端图**，它就是动点的轨迹，如图 12-1 所示。

由物理学的知识可知，点的速度等于其矢径 r 对时间 t 的一阶导数，即

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (12-2)$$

动点速度方向沿着矢径的矢端曲线的切线，即沿动点运动轨迹的切线，并与此点的运动方向一致，速度的大小表示点运动的快慢。

点的加速度等于速度对时间的一阶导数，也等于矢径对时间的二阶导数，即

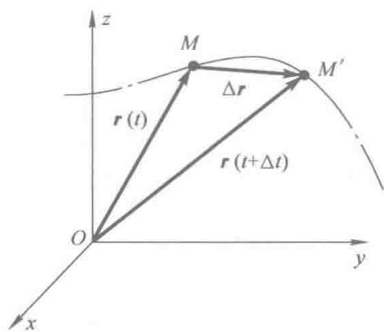


图 12-1

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (12-3)$$

或者表达为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \quad (12-4)$$

在解决具体问题时, 根据问题不同选择合适的参考系, 最常见的坐标系是直角坐标系和自然轴系。

1. 直角坐标法

(1) 运动方程 在参考体上固连一直角坐标系 $Oxyz$, \boldsymbol{i} 、 \boldsymbol{j} 、 \boldsymbol{k} 为三根轴的单位矢量, 如图 12-2 所示。动点 M 在直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) , 则其矢径 \boldsymbol{r} 可以表达为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (12-5)$$

因此, 运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系中可以表达为

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad (12-6)$$

这一组方程称为点 M 的直角坐标形式的运动方程。

在运动方程 (12-6) 中消去 t 即得直角坐标形式的轨迹方程为

$$f(x, y, z) = 0 \quad (12-7)$$

(2) 速度方程 将式 (12-5) 代入式 (12-2) 中, 可得

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \quad (12-8)$$

将点的速度在直角坐标轴上投影, 可得

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \quad (12-9)$$

由此可得

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (12-10)$$

已知 v_x 、 v_y 、 v_z 后, 就可以确定速度矢量 \boldsymbol{v} 的大小及方向为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (12-11)$$

$$\cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i} \rangle = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{j} \rangle = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k} \rangle = \frac{v_z}{v} \quad (12-12)$$

(3) 加速度方程 将速度 \boldsymbol{v} 表达式对时间 t 求导数, 可得加速度的矢量表达式为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_x\boldsymbol{i} + \dot{v}_y\boldsymbol{j} + \dot{v}_z\boldsymbol{k} \quad (12-13)$$

将点的加速度在直角坐标轴上投影, 可得

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad (12-14)$$

比较上面两式, 得

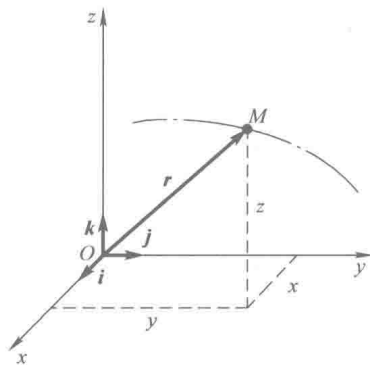


图 12-2

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (12-15)$$

若已知动点加速度的投影, 可求出加速度 \boldsymbol{a} 的大小及方向为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (12-16)$$

$$\cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{i} \rangle = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{j} \rangle = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{k} \rangle = \frac{a_z}{a} \quad (12-17)$$

若质点在平面内运动, 当点的轨迹为一平面曲线时, 则上述运动方程、速度、加速度在坐标轴 z 上的投影为零, 即运动方程、速度方程和加速度方程分别为

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{cases} \quad (12-18)$$

例 12-1 曲柄压力机的工作原理是通过曲柄滑块机构将电动机的旋转运动转换为滑块的直线往复运动, 对坯料进行锻压成形加工 (图 12-3a)。曲柄压力机机构原理简图如图 12-3b 所示, 该连杆机构中曲柄 OA 和连杆 AB 的长度分别为 r 和 l , 且 $l > r$, $\varphi = \omega t$, ω 是常量。冲头 B (可视为滑块) 可沿轴 Ox 做往复运动。试求滑块 B 的运动方程、速度方程和加速度方程。

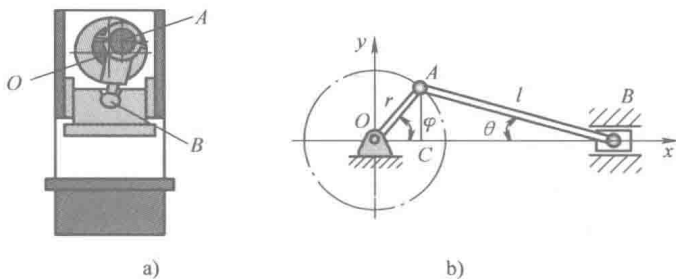


图 12-3

解: 建立如图 12-3b 所示坐标系, 滑块 B 沿 x 轴运动。在任意位置, 由几何关系得滑块 B 的坐标为

$$x_B = r \cos \omega t + l \cos \theta$$

由几何关系 $r \sin \omega t = l \sin \theta$, 可得

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \omega t}$$

因此有

$$x_B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}$$

则有

$$v_B = \dot{x}_B = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}$$

$$a_B = \dot{v}_B = -r\omega^2 \cos \omega t - \frac{r^2 \omega^2 \cos 2\omega t (l^2 - r^2 \sin^2 \omega t) + r^4 \omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t}{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{3}{2}}}$$

例 12-2 某轿车的车轮半径为 r , 沿固定水平轨道滚动而不滑动 (图 12-4), 轮缘上一点 M 在初瞬时与轨道上的 O 点叠合; 在瞬时 t 半径 MC 与轨道的垂线 HC 组成交角 $\varphi = \omega t$, 其中 ω 是常量, 试求在车轮滚一圈的过程中点 M 的运动方程、速度和加速度, 以便建立控制系统信号。

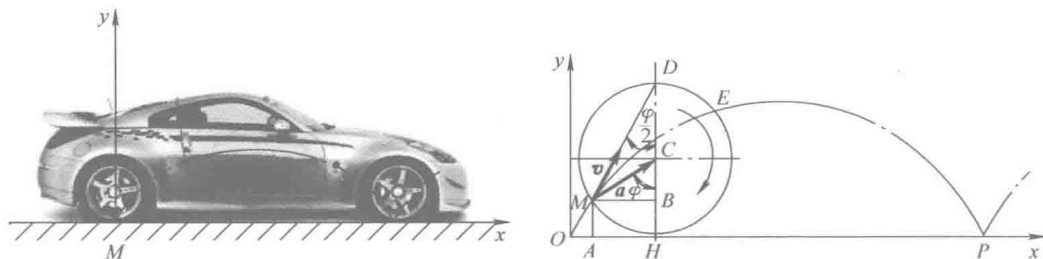


图 12-4

解: (1) 求点 M 的运动方程。

在点 M 的运动平面内建立直角坐标系 Oxy , 如图 12-4 所示。轴 x 沿直线轨道, 并指向轮子滚动的前进方向; 轴 y 铅直向上, 考虑车轮在任意瞬时位置, 因车轮滚动而不滑动, 故有 $\widehat{OH} = \widehat{MH}$ 。于是, 在图示瞬时动点 M 的坐标为

$$x = OA = OH - AH = r\varphi - r\sin\varphi \quad (\text{a})$$

$$y = AM = HB = r - r\cos\varphi \quad (\text{b})$$

以 $\varphi = \omega t$ 代入式 (a)、式 (b) 得点 M 的运动方程

$$\begin{cases} x = r(\omega t - \sin\omega t) \\ y = r(1 - \cos\omega t) \end{cases} \quad (\text{c})$$

上式说明, 点 M 的轨迹是滚轮线 (即摆线), 如图 12-4 所示。车轮滚一圈的时间 $T = 2\pi/\omega$, 在此过程中, 点 M 的轨迹只占滚轮线的一环 OEP 。

(2) 求点 M 的瞬时速度。

对式 (c) 中坐标 x 、 y 求时间的一阶导数, 得

$$v_x = r\omega(1 - \cos\omega t), \quad v_y = r\omega\sin\omega t \quad (\text{d})$$

故得点 M 速度 v 的大小和方向, 有

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \sqrt{(1 - \cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} = 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$\cos \langle v, i \rangle = \frac{v_x}{v} = \sin \frac{\omega t}{2} = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \langle v, j \rangle = \frac{v_y}{v} = \cos \frac{\omega t}{2} = \cos \frac{\varphi}{2}$$

(3) 求点 M 的瞬时加速度。

对式 (d) 的 v_x 、 v_y 求时间的一阶导数, 得

$$a_x = r\omega^2 \sin\omega t, \quad a_y = r\omega^2 \cos\omega t$$

故得点 M 加速度 a 的大小和方向如图 12-4 所示, 有

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

$$\cos \langle a, i \rangle = \frac{a_x}{a} = \sin\varphi, \quad \cos \langle a, j \rangle = \frac{a_y}{a} = \cos\varphi$$

当 $t=2\pi$ 时, 有 $x=0, y=0; v_x=0, v_y=0; a_x=0, a_y=r\omega^2$ 。这表示, 若车轮匀速转动, 当点 M 接触轨道时, 它的速度等于零, 而加速度方向垂直于轨道。

研究车轮的速度及加速度, 一般是为了更好地控制汽车的运动状态, 如在车轮上安装加速度传感器, 其目的就是及时将车的运动参数在仪表盘上显示, 同时也作为电喷发动机的辅助喷油信号。其他应用, 如汽车防抱制动系统 (ABS) 控制的关键在于对车辆轮速信号的处理, 以有效防止汽车在制动时可能发生的由于制动力过大而导致车轮抱死, 引发汽车失去转向能力或者侧偏的危险工况。

2. 自然坐标法

点运动的速度、加速度与点运动轨迹的几何形状有关, 结合动点的运动轨迹的几何形状建立坐标系来研究点运动的方法, 称为自然坐标法。

设动点 M 沿已知轨迹曲线运动, 在轨迹曲线上任选一定点 O 作为量取弧长的起点, 并规定由原点 O 向一方向量得的弧长取正值, 则另一方向量得的弧长取负值。这种带有正负值的弧长 OM , 称为动点 M 的弧坐标, 用 s 表示,

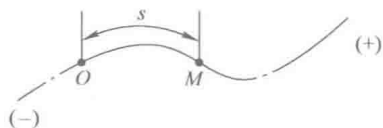


图 12-5

$s = \widehat{OM}$ 。点在轨迹上的位置可由弧坐标 s 完全确定, 如图 12-5 所示。

(1) 运动方程 当点 M 沿已知轨迹运动时, 弧坐标 s 随时间而变, 并可表示为时间 t 的单值连续函数, 即

$$s = f(t) \quad (12-19)$$

上式称为自然坐标法表示点 M 的运动方程。

(2) 自然轴系 在点的运动轨迹曲线上取接近的两点 M 和 M_1 , 该两点处切线的单位矢量分别为 τ 和 τ_1 , 当点 M_1 无限趋近于点 M 时, 由 τ 和 τ_1 构成的平面称为密切面。过点 M 并与切线垂直的平面称为法平面, 如图 12-6 所示。

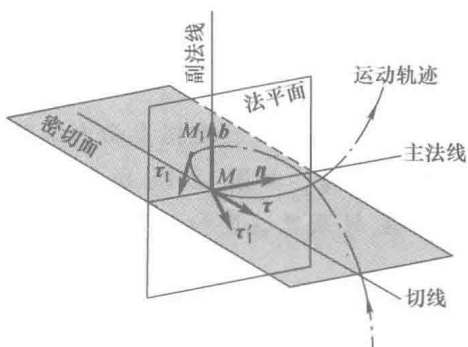


图 12-6

切线的单位矢量用 τ 表示, 其正向指向 s 的正向。主法线: 法平面与密切面的交线, n 为主法线的单位矢量, 其正向指向曲线凹面。副法线: 过点 M 且垂直于密切面的直线, b 为副法线的单位矢量, 其正向指向由下式确定:

$$b = \tau \times n \quad (12-20)$$

以点 M 为原点, 以切线、主法线和副法线为坐标轴组成的正交坐标系称为曲线在点 M 的自然坐标系 (图 12-7), 且三个单位矢量满足右手法则。曲线上任意一点都有该点的自然轴系, 其范围随点的位置而改变。

(3) 速度与加速度 设速度在切线上的投影为 v , 速度方向沿自然坐标轴的切线方向, 有

$$v = v\tau = \dot{s}\tau \quad (12-21)$$

将上式代入式 (12-4), 有

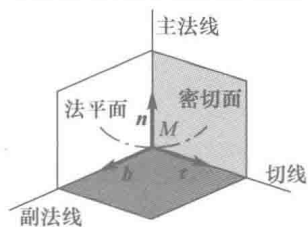


图 12-7

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \quad (12-22)$$

由于 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\mathbf{n}$, 所以有

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \quad (12-23)$$

式中,

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} \quad (12-24)$$

方向沿轨迹的切线方向, 它表明速度大小的变化率, 称为切向加速度。当速度 \mathbf{v} 与切向加速度 \mathbf{a}_t 指向相同时, 点做加速运动, 反之点做减速运动。式 (12-23) 中,

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \quad (12-25)$$

方向沿主法线的方向, 指向曲率中心, 称为法向加速度, 它表明速度方向随时间的变化率。

由式 (12-24) 和式 (12-25) 可知, \mathbf{a}_t 、 \mathbf{a}_n 均位于密切面内, 则全加速度 \mathbf{a} 必位于密切面内, 故加速度在副法线方向上的投影为零, 即

$$a_b = 0 \quad (12-26)$$

上式表明加速度在副法线方向没有分量。

全加速度 \mathbf{a} 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \quad (12-27)$$

其方向可以由全加速度与主法线正向间的夹角 θ 的正切来确定, 即

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n} \quad (12-28)$$

例 12-3 飞行器在铅直面内从位置 M_0 处以 $s = 250t + 5t^2$ 的规律沿半径 $r = 1500\text{m}$ 的圆弧做机动飞行, 如图 12-8a 所示。其中 s 以 m 计, t 以 s 计。当 $t = 5\text{s}$ 时, 试求飞行器在轨迹上的位置 M 及其速度和加速度。

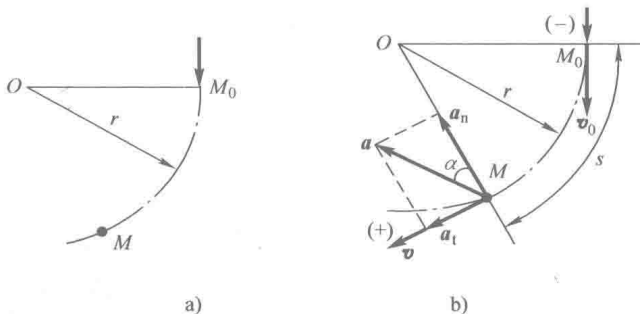


图 12-8

解: 选择自然坐标法求解。取 M_0 为弧坐标 s 的原点, s 的正、负方向如图 12-8b 所示。当 $t = 5\text{s}$ 时, 飞行器的位置 M 可由弧坐标确定:

$$s = (250t + 5t^2) \Big|_{t=5\text{s}} = 1375\text{m} \quad (\text{a})$$

飞行器的速度和切向加速度、法向加速度分别为

$$v = \dot{s} = 250 + 10t \quad (\text{b})$$

$$a_t = \dot{v} = 10 \text{m/s}^2 \quad (\text{c})$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{1500} (250 + 10t)^2 \quad (\text{d})$$

代入 $t=5\text{s}$, 得

$$v = 300 \text{m/s}, \quad a_t = 10 \text{m/s}^2, \quad a_n = 60 \text{m/s}^2$$

故在该瞬时飞行器的总加速度 a 的大小和方向分别为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 60.8 \text{m/s}^2$$

$$\tan \alpha = \frac{a_t}{a_n} = 0.167, \quad \alpha = 9.5^\circ$$

12.2 刚体的基本运动

平移和定轴转动是刚体的两种最简单、最基本的运动, 为刚体的基本运动。刚体的更复杂的运动可以看成是这两种运动的合成。

12.2.1 刚体的平移

刚体上任取一条直线, 在运动的过程中该直线始终与其初始位置平行, 具有这种特征的刚体运动, 称为刚体的平行移动, 简称平移。如图 12-9a 所示, 凸轮机构中的顶杆 AB 、凸轮都做平移; 图 12-9b 中筛分机构中刚体 CD 做平移。根据刚体平移时点的运动轨迹, 可将平移分为直线平移和曲线平移。直线平移时, 刚体上各点轨迹为直线, 如图 12-9a 所示凸轮和顶杆的运动; 曲线平移时, 刚体上各点的轨迹为曲线, 如图 12-9b 所示平移刚体 CD 上点 C 与点 D 的轨迹。

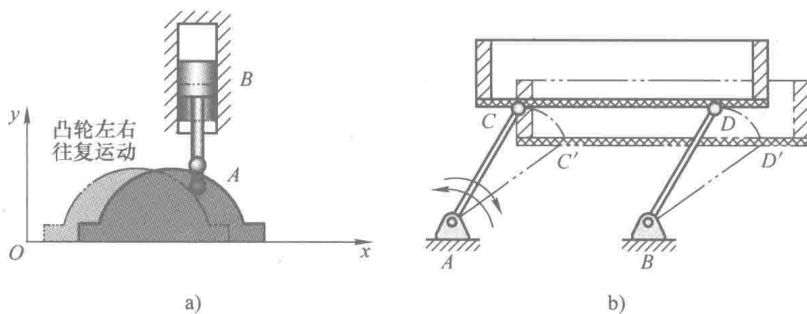


图 12-9

如图 12-10 所示平移刚体, AB 为刚体上任取的直线, 直线 A_1B_1 、 A_2B_2 是刚体平移后的直线 AB 的位置。可见, 当刚体做平移时, 刚体上所有各点的轨迹为相互平行的曲线。

设 AB 为刚体上任意一条直线, 则有

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \quad (12-29)$$

上式对时间求导, 根据平移的性质, \vec{AB} 的长度和方向都保持不变, 可得

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad (12-30)$$

上式对时间 t 求导一次, 即得

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \quad (12-31)$$

即在同一瞬时, 平移刚体内各点的速度和加速度分别相等。

当刚体做平移时, 只需给出刚体内任意一点的运动, 就可以完全确定整个刚体的运动。这样, 刚体平移问题就可看作为点的运动问题来处理。

例 12-4 荡木用两条等长的钢索平行吊起, 如图 12-11 所示。钢索长为 l , 长度单位为 m 。当荡木摆动时, 钢索的摆动规律为 $\varphi = \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} t$, 其中 t 为时间, 单位为 s ; 转角 φ_0 的单位为 rad 。试求当 $t=0\text{s}$ 和 $t=2\text{s}$ 时, 荡木中点 M 的速度和加速度。

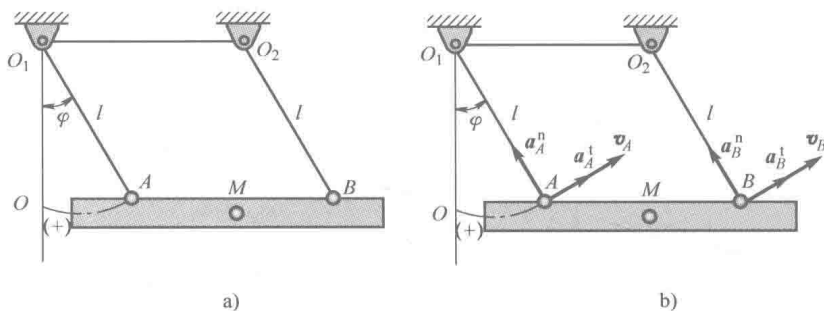


图 12-11

解: 由于两条钢索 O_1A 和 O_2B 的长度相等, 并且相互平行, 于是荡木 AB 在运动中始终平行于直线 O_1O_2 , 故荡木做平移。

为求中点 M 的速度和加速度, 只需求出点 A 的速度和加速度即可。点 A 做圆周运动, 以最低点 O 为起点, 规定弧坐标 s 向右为正, 则点 A 的运动方程为

$$s = \varphi_0 l \sin \frac{\pi}{4} t \quad (a)$$

将上式对时间求导, 得点 A 的速度大小

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{4} l \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} t \quad (b)$$

再一次求导, 得点 A 的切向加速度大小

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{16} l \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} t \quad (c)$$

点 A 的法向加速度大小

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{\pi^2}{16} l \varphi_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t \quad (d)$$

代入 $t=0\text{s}$ 和 $t=2\text{s}$, 就可求得这两瞬时点 A 的速度和加速度, 也就是点 M 在这两瞬时

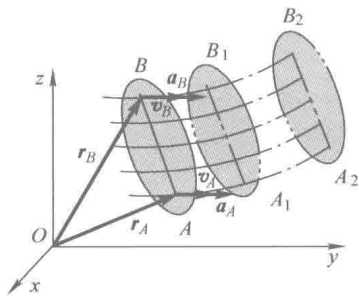


图 12-10

的速度和加速度, 计算结果见表 12-1。

表 12-1

t/s	φ/rad	$v/(\text{m/s})$	$a_t/(\text{m/s}^2)$	$a_n/(\text{m/s}^2)$
0	0	$\frac{\pi}{4}l\varphi_0$ (水平向右)	0	$\frac{\pi}{16}l\varphi_0^2$ (铅直向上)
2	$l\varphi_0$	0	$-\frac{\pi^2}{16}l\varphi_0$ (方向与图示方向相反)	0

12.2.2 刚体的定轴转动

当刚体运动时, 如果其上 (或其延展部分) 有一条直线始终保持不动, 这种运动称为刚体的定轴转动, 这条固定不动的直线称为转轴 (图 12-12)。

由图 12-12 可知, 转轴以外的各点都分别在垂直于转轴的平面内做圆周运动, 圆心在该平面与转轴的交点上。

刚体的位置可由刚体与固定面的夹角 φ 完全确定。当刚体转动时, 转角 φ 随时间 t 而变化, 因而可表示为时间 t 的单值连续函数。刚体定轴转动的运动方程为

$$\varphi = f(t) \quad (12-32)$$

刚体定轴转动的运动方程对时间的一阶导数, 称为刚体的角速度, 以 ω 表示:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (12-33)$$

角速度的大小表示刚体在该瞬时转动的快慢, 其单位为 rad/s 。角速度为代数量, 从轴的正向向负向看, 刚体逆时针转动时, ω 为正值, 反之为负值。

角速度 ω 对时间的导数, 称为角加速度, 以 α 表示, 故有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad (12-34)$$

角加速度表示单位时间内角速度的变化快慢, 是代数量, 正负符号的确定方法与角速度的相同, 单位为 rad/s^2 。若 α 和 ω 符号相同, 则刚体做加速转动。

若刚体做匀变速转动, 有以下公式:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (12-35)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (12-36)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \quad (12-37)$$

其中积分常数 φ_0 和 ω_0 是在初瞬时刚体的转角 φ 和角速度 ω 的值。

12.2.3 定轴转动刚体上点的速度和加速度

1. 定轴转动刚体上各点的速度

刚体做定轴转动时, 其上任一条平行于转轴 z 的直线都在做平移, 因此该直线上各点的运动完全相同, 其轨迹为同样大小的圆弧, 圆心都在转轴 z 上, 如图 12-13a 所示。

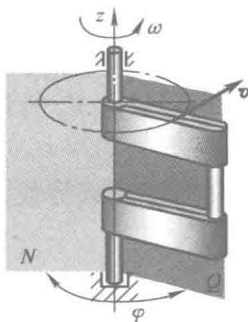


图 12-12

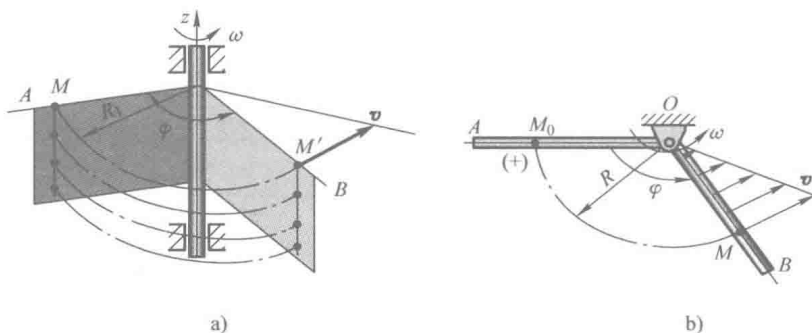


图 12-13

设刚体 OA 绕定轴 O 转过任意角到达 B 位置, 刚体上的点 M_0 运动到 M , 如图 12-13b 所示。以固定点 M_0 为弧坐标 s 的原点, 图示 φ 角转角为正, s 为正向, 则有

$$s = R\varphi \quad (12-38)$$

上式对时间 t 求导数, 得

$$\dot{s} = R\dot{\varphi} \quad (12-39)$$

考虑到 $\dot{s} = v$, $\dot{\varphi} = \omega$, 故有

$$v = R\omega \quad (12-40)$$

可知, 任一瞬时, 定轴转动刚体上各点的速度大小与各点的转动半径成正比, 方向沿轨迹的切线方向, 如图 12-14 所示。

2. 定轴转动刚体上各点的加速度

将式 (12-40) 对时间求导, 可得点的切向加速度为

$$a_t = R\dot{\omega} = R\alpha \quad (12-41)$$

其法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 \quad (12-42)$$

则点的全加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (12-43)$$

如图 12-15 所示, 全加速度与半径 AO 的夹角 θ (恒取正值) 可按式求出:

$$\tan\theta = \frac{|a_t|}{a_n} = \frac{R|\alpha|}{R\omega^2} = \frac{|\alpha|}{\omega^2} \quad (12-44)$$

由上述公式可以得出, 全加速度的大小与各点的转动半径成正比, 其方向与转动半径的夹角却与转动半径无关, 即在任一瞬时, 定轴转动刚体上各点的加速度与其转动半径的夹角 θ 都相同, 如图 12-15 所示。

例 12-5 摆式运输机是一种水平传送材料

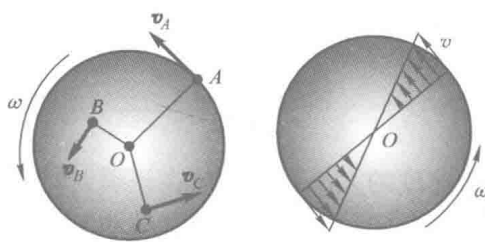


图 12-14

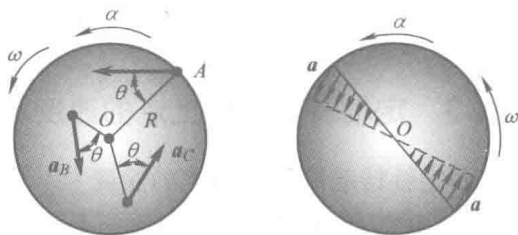


图 12-15