

21 世纪
小学教师
教育系列教材

小学数学教学 基础

● 主编 郜舒竹

21 世纪
小学教师
教育系列教材

小学数学教学 基础

●主编 郜舒竹 762

1129

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学教学基础/郜舒竹主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2015. 8
21 世纪小学教师教育系列教材
ISBN 978-7-300-21801-4

I. ①小… II. ①郜… III. ①小学数学课-教学研究-小学教师-师资培养-教材 IV. ①G623. 502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 193452 号

21 世纪小学教师教育系列教材
小学数学教学基础
主编 郜舒竹
Xiaoxue Shuxue Jiaoxue Jichu

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511770 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规 格	185 mm×260 mm 16 开本	版 次	2015 年 9 月第 1 版
印 张	11.5	印 次	2015 年 9 月第 1 次印刷
字 数	232 000	定 价	26.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换



本书是作为小学教师职前培养和职后培训的教材而编写的，其目的在于从数学学科的角度为小学教师教育提供素材。其内容涉及数学教育所研究的核心领域，主要包括数学教师的研究、数学教材的研究、学生的数学学习研究这样三个核心领域。

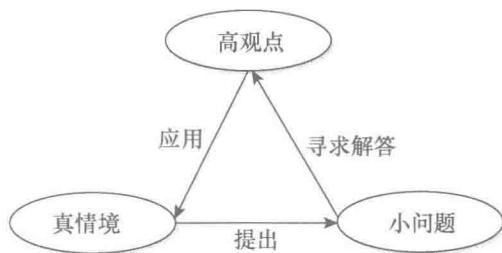
关于数学教师的研究，主要讨论在我国数学教育研究中相对忽视的数学观和数学知识两个方面，国外已有的研究表明，这两个方面在教师知识结构和能力结构中占有核心地位。数学教材是沟通教师与学生的载体，是开展数学教学和数学学习的重要依据，本书基于一线教师对于数学教材所提出的问题与困惑讨论了教材的相关理论，同时也介绍了国外小学数学教材的发展状况。学生的数学学习这一研究领域在数学教育研究中至关重要，是所有其他方面研究的基础。本书以学生的数学错误为研究视角，重点讨论错误的辨别、错误产生的原因以及错误产生的合理性，期望读者能够把学生数学错误的研究长期、深入地继续下去。

除此之外，本书还对课程改革后小学数学教材中出现的新专题进行了分析与讨论，主要涉及对教学内容的理解、教学方式的选择以及评价等方面。其内容贴近一线教师的教学实践，同时反映国内外诸多的研究成果，为读者展示了丰富、系统的教育教学观念、教学设计策略以及相关的理论。

本书的设计思路是从小学数学教学真实的情境中提取教师所熟悉的小问题开展分析与研究，进而利用相关的理论观点从较高的视角审视、解决这样的小问题。建议读者按照这样的思路，重新回到自己的教学实践中，继续提取新的问题并尝试去解决这些问题，我们希望得到的效果是如下页图所示的良性循环。

为了更好地体现这种培训思路，我们还编写了《小学数学教学案例》一书，其目的在于使得“真情境”的内容更加鲜活、丰富，同时也为读者提供更多可操作的教学策略和方法。

本教程全部内容都是基于大量的文献检索和现场调查，是编者近几年来从事数学教育和小学教师教育的研究成果。因此，本书对于数学教育的相关研究亦应有一定的参考。尽



管初衷良好，限于水平，疏漏仍然难免，企盼读者及同行的慧眼使之更加完善。

参与本书设计、编写的人员包括（按姓氏音序排列）：池佳、高珊、郜舒竹、洪小辉、姜巍、李燕、刘莹、吴万岭、薛涟霞。

编者

2015年8月

[illegible]1

第四节 数学错误的规律	(129)
第五节 学生做题时为什么出错	(133)
第六节 问题与讨论	(143)
第六章 走进数学课堂	(149)
第一节 数学教学实例分析	(149)
第二节 数学教学机智	(162)



2001 年我国开始推行新一轮数学课程改革,按照改革工作的总体部署,2003 年开始组织课程标准修订工作,2011 年基本完成了修订任务。在此基础上,《义务教育数学课程标准(2011 年版)》(简称《课程标准(2011 年版)》)正式出版。对于数学教育的改革,首先应当重新思考这样一个基本问题——什么是数学。对于一名数学教育工作者来说,对数学的看法与之教学实践有着密切的关系。以下是一份关于小学教师数学观的调查问卷,读者可以借此做一个自我测试:

本问卷的目的在于全面了解数学教师对数学教学的真实看法。回答没有对错之分,不必留姓名,因此您不必有任何顾虑。您真实的回答对我们的研究将大有帮助。

一、以下说法您属于哪一项，请在该项上画✓

1. 您所在的学校（城区，郊区）
2. 您是否学过高等数学（是，否）
3. 您刚工作时的学历（中专，大专，本科或以上）
4. 您的性别（男，女）
5. 您从事数学教育工作（1~5 年，5~10 年，10 年以上）
6. 您的职称（低于小学一级，小学一级，小学高级，中学高级）

非常同意	比较同意	中立	比较反对	非常反对
5	4	3	2	1



- () 1. 数学课本上的例题一定要讲, 练习题要全做。
- () 2. 小学数学中的基础知识也应当随时代的发展而变化。
- () 3. 学生要学好数学就必须做大量的练习。
- () 4. 数学的课堂教学应当以学生的活动为主。
- () 5. 计算教学应当特别重视对算理的理解。
- () 6. 备课的主要依据应当是数学课本及相应的教学参考书。
- () 7. 学生的数学成绩并不重要, 重要的是他是否喜欢数学。
- () 8. 生活中处处充满了数学问题, 我们应该努力去发现它们。
- () 9. 学习新知识前, 应该首先复习与之相关的旧知识。
- () 10. 新知识点的教学应当主要由教师讲授。
- () 11. 批改完作业后应该及时发下去让学生改错。
- () 12. 教师在备课时应当首先思考学生的学而不是教师的教。
- () 13. 小学数学知识是今后学习数学必不可少的基础。
- () 14. 在数学课堂上, 应当经常问“为什么……”这样的问题。
- () 15. 在数学课堂上, 教师应该给学生足够的时间进行学习活动, 而不必顾忌是否能完成教学任务。
- () 16. 数学成绩好的学生, 其他学科的成绩一定不会很差。
- () 17. 在数学教学中应当根据学生情况, 对课本内容做相应的调整。
- () 18. 数学教师要特别重视解题方法的教学。
- () 19. 数学教师的最重要职责就是使学生牢固记忆数学中的概念、公式、方法等知识。
- () 20. 数学课堂上, 教师应该关注那些不积极举手发言的学生。
- () 21. 数学概念应该在理解的基础上记忆。
- () 22. 小学生在数学学习过程中不应该使用计算器。
- () 23. 备课时应该首先钻研教材、理解教材。
- () 24. 考试成绩是评价学生数学学习水平的唯一标准。
- () 25. 在计算机逐步普及的今天, 熟练的计算能力就不再需要了。
- () 26. 每一位学生都要完成统一布置的数学作业。
- () 27. 数学教学应该特别注重揭示知识点间的联系。
- () 28. 数学教师应该努力了解学生的生活经验。
- () 29. 数学课堂上教师的语言应该简单、科学、准确。
- () 30. 数学教师应当有权利依据自己学生的情况选择或编写数学教科书。

三、简答题

数学是什么?

以上问卷的主体部分是 30 道量表题目，可以考查教师在三种数学观上的倾向程度。三种数学观及其相关的题目分别如下：

工具主义数学观：第 1、3、6、10、11、16、19、22、24、26 题；

柏拉图主义数学观：第 5、8、9、13、14、18、21、23、27、29 题；

问题解决数学观：第 2、4、7、12、15、17、20、25、28、30 题。

量表部分共分为 5 个等级：1 表示非常反对；2 表示比较反对；3 表示中立；4 表示比较同意；5 表示非常同意。在每一类数学观上的满分是 50 分。如果在某一观念所得的总分越高，说明对这一观念认可程度越高。

本章主要介绍关于数学观的各家之说，涉及数学史以及数学哲学方面的内容，并从实证的角度谈及了一些重要的研究。在此之后，呈现了对部分小学教师进行问卷和访谈研究所得出的主要研究结论。

第一节 数学观

一、什么是数学观

数学观是指人们对数学的总的根本的看法。在实际教学中，研究教师的数学观对数学教学有十分重要的作用，教师的数学观与其实际教学有着密不可分的关系（见图 1—1），同时教学实践还受多种社会因素的影响。郑毓信（2001）提到，对教师的数学观应作广义的理解，它同时包含了对“什么是数学”和“应当怎样去从事数学研究”的认识。从图 1—1 可以看出，教师的数学观即教师对数学本质的看法，并且数学观决定着他如何对待数学教学和如何看待学生的数学学习，这三方面又通过社会提供的机会或赋予的压力直接作用于实际的数学教学。也就是说教师的数学观、教师对数学教学的看法、对数学学习的看法，都通过社会力量影响着他们的实际教学。从图中还可以看出教师的数学观不但影响到他们对数学教学和数学学习的看法，还间接作用于实际的数学教学，因此它在数学教学中处于十分核心的地位，一个数学工作者的数学观决定了他从事数学活动的方式。

二、数学观的研究内容

“世界观”是指人们对世界的总的根本的看法。^①“观念”在《现代汉语词典》中有

^① 参见中国社会科学院语言研究所词典编辑室编：《现代汉语词典》，6 版，1185 页，北京，商务印书馆，2012。

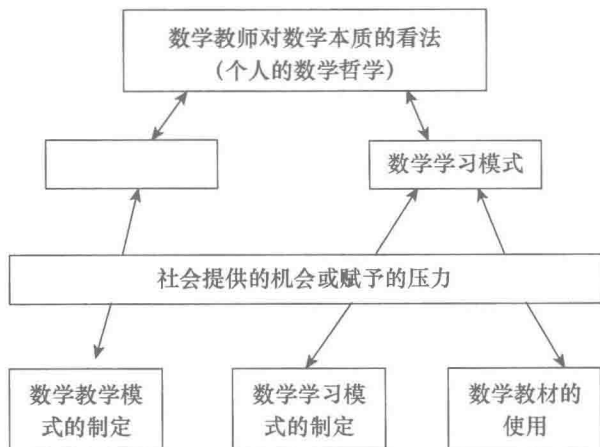


图 1—1 数学观与教学实践的关系

两个意思：思想意识；客观事物在人脑里留下的概括的形象。^①“观”是指对事物的认识或看法。^②在英语中“belief”表示观念的意思，它的意思是所相信的事物，是人的思想体系的一部分。由此看来，数学观属于观念的范畴，“数学观”是指人们对数学的总的根本的看法。国内学者黄秦安（2004）认为数学观由数学知识观、数学本质观和数学价值观构成。数学知识观主要包括必备的、一定质量与数量的数学知识、技能、能力、数学思想方法以及对数学知识的总体看法两部分。数学本质观是指对数学本质的认识，即数学本质上到底是什么。在《现代汉语词典》中，“本质”是指事物本身所固有的，决定事物性质、面貌和发展的根本属性。事物的本质是隐蔽的，是通过现象来表现的，不能用简单的直观去认识，必须透过现象掌握本质。^③在英语中“nature”表示本质的意思，它指某人或某物区别于其他个体的性质或特征。数学价值观是在一定数学本质观的基础上，对数学的科学价值、文化价值、社会价值、历史价值和其他价值的判断和认识。由此，可以看出数学观中的数学本质观是属于数学哲学中认识论的研究范畴。

三、数学哲学研究中的数学观

对数学本质的讨论可追溯到格劳斯（Douglas A. Grouws, 1992）的相关研究。数学哲学是从本体论、认识论、方法论角度来研究数学的对象、性质和方法的。数学的本体论、认识论和方法论也就成为数学哲学的主要内容或基本的理论框架。

数学本体论是关于存在及数学本质和规律的学说，它在数学哲学中表现为数学对象及其存在性和客观性。

^{①②} 参见中国社会科学院语言研究所词典编辑室编：《现代汉语词典》，6版，478页。

^③ 参见上书，62页。

数学认识论涉及哲学上思维与存在的关系，它主要研究数学的本质或性质、数学理论真理性的标准等问题。

数学方法论是关于认识世界和改造世界的方法的理论。一般认为，由于认识和改造对象的不同，形成普遍性程度不同的三个层次的方法论：哲学方法论、一般科学方法论和具体科学方法论。数学作为一门具体科学，它的方法论应该属于具体科学方法论。数学方法论就是以具体的数学研究方法为对象，探讨各种数学方法的性质、特点和联系，并从个性中找出共性、从个别中探求一般，从而找出具有普遍意义的方法，得出关于数学研究方法的规律性认识（林夏水，2003）。

四、关于“什么是数学”的经纬之说

前文讨论了数学观的所属范畴及研究内容，教师的数学观对他们的实际教学会产生深远的影响。那么到底什么是数学，人们是怎样看待数学的呢？以下列举了一些学者对数学的看法。

中国古代有学者认为数学是术（即方法、策略），是用来解决生产与生活问题的计算方法。古希腊学者认为数学是理念，是关于世界本质的学问。数学对象是不依赖于人类思维的客观存在，但可以通过亲身体验，借助观察试验和抽象获得相关的知识。由此看出，古代学者对数学大致有两种看法：一种认为它是用来解决实际问题的，是一种实践的经验，是与人的生产生活紧密联系的；另一种认为它是超脱于人类物质世界的一种思想意识。现在还有一些观点认为数学是一个公理体系；数学是结构的科学，其任务就是在许多不同的背景下，以精确的和客观的形式，系统地分析共同的和基本的结构特征。

恩格斯断言，数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学，所以是非常现实的材料。弗罗伊登塔尔（H. Freudenthal）认为，数学的概念、结构与思想都是物理世界、社会存在与思维世界各种具体现象的反映，也是组织这些现象的工具，因而数学在现实世界中有其现象学基础。柯尔莫哥洛夫（A. H. Kojimoropob）也提出数学的研究对象产生于现实，但数学又必须离开现实（抽象），由于数学内容不断丰富，应用范围不断扩大，因而并非完全脱离现实；他同时又主张，所有数学的基础是纯集合论，数学的各专门分支研究各种特殊的结果，每一种结构由相应的公理体系所确定。

同时也有人认为数学全然不涉及观察、归纳、因果等方法，数学家工作的起点，只需要少数公理。还有人认为数学家需要有高度的直觉和想象力。步入现代社会人们又提出了许多对数学的看法，如：数学是模式的科学；数学是科学，更是一门创造性的艺术；数学是科学，也是一门技术；数学是一种语言；数学是一种文化（唐瑞芬，2001）。



数学发展史上对数学的看法，还存在着类似于哲学史上二元论的思想，如：

数学认识究竟是一种“发现”，还是一种“发明”。

“我认为，数学存在于我们之外。我们的职责是发现它或是遵循它，那些被我们证明并被我们夸大为是我们‘发明’的定理，其实仅仅是我们观察的记录而已。”（G. Hardy）

“数学是人类的发明，这一点是最纯粹的自明之理，是稍微观察一下就能发现的事实。”（Percy Williams Bridgman）

“我们已经克服了这样的概念，即认为数学真理具有独立的和远离我们头脑的存在。我们居然有过这种概念，但这一点就够奇怪的了。”（E. Kasner and J. Newman）

持“发明说”的数学家还往往强调数学活动的“构造性”，如：

“数学家是‘通过构造’而工作的，它们‘构造’越来越复杂的组合。”（H. Poincare）

除“发现”与“发明”的对立以外，还有“逻辑”与“直觉”的对立。

“数学首先是一种探讨研究的方法。这个方法包括对所讨论的概念认真地下定义以及明确地给出一些用于推理的基础假设。从这些定义和假设出发再运用最严格的逻辑推导出结论。然而数学家还需要有高度的直觉和想象力。正因为这种能力，他们才能打破时代的僵化传统并建立新的、革命性的概念。”（Y. Chavan）

“直觉比以往任何时候都更加成为数学发现的创造源泉。”（N. Bourbaki）

由以上所述可以看出，如果从哲学的根本观点上来刻画数学的本质，不外乎以下两种不同的看法：一种是动态的，将数学描述为处于成长发展中，因而是不断变化的研究领域，即将数学看做一个过程；另一种则是静态的，将数学定义为具有一整套已知的、确定的概念、原理和技能的体系。

五、数学教师的数学观

1. 数学教师如何看待数学教学

数学教师天天在教数学，但是否认真思考过这样的问题：“为什么要进行数学教学”、“应当怎样去进行数学教学”、“我们是按照怎样的数学教学观在从事数学教学的”。

这里涉及很多根本性的认识，比如数学教学的目标是什么？是纯数学的——主要关注数学知识的传授，人本主义的——主要涉及人的理性思维和创造性才能的充分发展，还是实用主义的——主要关注实用的数学技能的掌握。再如数学学习与数学教学活动的本质是什么？是学生对于老师所授予知识的被动的接受，还是以其已有的知识和经验为基础的、主动的建构过程，可以说教师的数学观和数学教学观，是其进行数学教学的基本出发点。这些基本观念，也就决定了数学教学的内容、模式与方法、数学课堂活动的准则以及教师与学生各自的作用与地位等一系列问题的探讨与抉择，从而也就决定了数学教学的实施与效果。

数学教学观应该是数学教师对关于数学本质以及学习数学的认知过程的一种认识，它

不仅涉及数学的性质与特征,更涉及获得知识的认知过程,或者说学习数学的规律。除了思考教学内容的数学知识与方法的科学性以外,必须确定对教学形式与方法的认识,同样要以科学的方法确定创收数学知识的条件与实质。教师的数学观不同于教师的教学观,它在某种程度上决定着教学观,在数学教学中起着至关重要的作用。

2. 数学教师的数学观

数学自产生之日起就存在着两种数学观的对峙。一种是把数学看做解决实际问题的知识,以古巴比伦、古埃及、中国为代表。另一种是把数学看做训练人的心智的工具,以古希腊为代表。人们对数学本身有自己的认识,当数学发展成为一门学科时,随着它作为一门学科的成长,我们就将它与数学教师、学习数学的学生紧密地联系在一起了。不仅要考虑数学本身,还要看到数学作为人类文化传统的性质、数学知识在被人接受和被人教授时的特点。数学教育中的数学观包括“数学”与“教育”这两个方面。“新数学运动”的失败在某种程度上要归咎于它过分强调了“数学”一方,忽视了“教育”一方,忽视了人的接受能力。进步主义倡导者提出“以儿童为中心”,当它在数学教育中极端推行后以失败告终,在某种程度上是因为它过分强调了“教育”一方,而忽视了“数学”一方。

数学教师的数学观是数学教育中的数学观,他要从数学教学的角度去看数学。数学教师的数学观不同于其他人的数学观,但也受其他人对数学的看法的影响,特别是要受到数学自身发展的影响,因此也更多地受到数学家的数学观的影响。人类社会对数学的需要程度、数学自身的前沿的发展、教育界的新观点都会影响到数学教师的数学观。每一位数学教师的数学观和整个教师群体的数学观都不是一成不变的。教师群体的数学观会随着社会的发展而发展,随着数学和教育的发展而发展。每一位数学教师的数学观也会随自身教学经验、自身数学知识的发展而发展。

第二节 教师数学观的相关研究

一、数学教师数学观的历史演变

1. 古希腊时期的数学观

(1) 古希腊时期人们对数学的看法。

在古希腊时期,没有专门的数学教学和数学教师,有教育影响的是那些哲学家。他们的数学观对当时数学的教育有很大影响。影响力较大的有毕达哥拉斯学派、柏拉图和亚里士多德。毕达哥拉斯学派认为,数学对象独立存在于可感事物之中;柏拉图认为,数学对象独立存在于可感事物之外;而亚里士多德则认为,数学对象抽象地存在于可感事物之中。



古希腊的数学观具有神秘主义的色彩，中国古代的数学也具有神秘主义的色彩，主要表现在：数乃万物的本原，应用数学知识可以了解和认识宇宙（包括自然界、人类社会、人生等），但在中国古代实用性的数学观更占主流（林夏水，2003）。

（2）第一次数学危机。

毕达哥拉斯学派传授知识，研究数学，还很重视音乐。“数”和“和谐”是他们的主要哲学思想。为此他们提出了“万物皆数”的说法，但他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数。“万物皆数”就是万物皆可以用自然数或自然数之比表示。但当有人发现边长为1的正方形的对角线（见图1—2）竟不能用“数”来表示时，他们无法接受这样的事实，因为违反了他们的信条。当时研究数学的希腊学者们，虽然不一定赞同“万物皆数”的观点，却仍认为在数学当中，算术比几何更基本、更重要。当他们知道了有些几何线段不能用“数”来表示时，他们开始对“数”的重要性产生了怀疑，转而把几何看成更基本的数学了。于是几何学的研究逐步繁荣起来，直到非欧几何被发现，几何在数学中的基础地位才又让位于算术。人们发现了无理数，又不敢承认它是数，这就是第一次数学危机。

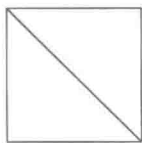


图1—2 边长为1的正方形及其对角线示意图

2. 近代数学观

（1）第二次数学危机。

数学发展到了17世纪的后期，牛顿和莱布尼兹发现微积分，数学史上因此出现了一个崭新的数学分支——数学分析。它在数学领域中占据着主导地位，特点是非常成功地运用了无限过程的运算，即极限运算。微积分诞生之后，数学迎来了一次空前的繁荣时期。18世纪被称为数学史上的英雄世纪。

这个时期的数学家们在几乎没有逻辑支持的前提下，把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域，并取得了丰硕的成果。人们用微分学的理论发现了哈雷彗星，用积分学的理论在知道包围图形的曲线方程的条件下就可以计算这个平面图形的面积。同时，还发展了微分方程的理论、无穷级数的理论，大大地扩展了数学研究的范围。

当一些数学研究者沉浸在微积分带来的数学成就时，有一些研究者也发现了当时微积分的一些不完善的地方。英国大主教伯克利（George Berkeley）于1734年发表文章攻击说，流数（导数）“是消失了的量的鬼魂……能消化得了二阶、三阶流数的人，是不会因吞食了神学论点就呕吐的”。他说用忽略高阶无穷小而消除了原有的错误，“是依靠双重的错误得到了虽然不科学但却是正确的结果”。伯克利虽然抓住了当时微积分、无穷小方法

中一些不清楚、不合逻辑的缺陷,不过他是出自对科学的厌恶和对宗教的维护,而不是出自对科学的追求和探索。

当时一些数学家和其他学者也批判过微积分中的一些问题,指出其缺乏必要的逻辑基础。例如,罗尔(Rolle)曾说:“微积分是巧妙的谬论的汇集。”在那个勇于创造的时代,科学和逻辑中存在这样那样的问题,并不是个别现象。直到19世纪20年代,一些数学家才开始关注于微积分的严格基础。从波尔查诺(Bolzano)、埃布尔(Abel)、柯西(Cauchy)、狄里赫利(Dirichlet)等人的工作开始,到魏尔斯特拉斯(Weierstrass)、狄德金(Dedekind)和坎托(Cantor)的工作结束,中间经历了半个多世纪,基本上解决了矛盾,为数学分析奠定了一个严格的基础。波尔查诺给出了连续性的正确定义。埃布尔指出要严格限制滥用级数展开及求和。柯西在1821年的《代数分析教程》中从定义变量出发,认识到函数不一定要有解析表达式;他抓住极限的概念,指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量,无穷小量是以零为极限的变量;并且定义了导数和积分。狄里赫利给出了函数的现代定义。在这些工作的基础上,魏尔斯特拉斯消除了其中不确切的地方,给出了现在通用的极限的 $\epsilon-\delta$ 定义、连续的定义,并把导数、积分严格地建立在极限的基础上。19世纪70年代初,魏尔斯特拉斯、狄德金、坎托等人独立地建立了实数理论,而且在实数理论的基础上建立起极限论的基本定理,从而使数学分析建立在实数理论的严格基础之上。就这样,数学经历并渡过了历史上第二次数学危机。通过第二次数学危机我们也可以看出,一些数学定理的成立是要有一些前提支撑的,对数学知识要进行深入的研究,这也正体现了数学研究的重要性。

(2) 第三次数学危机。

数学史上的第三次危机是1897年在坎托的一般集合理论的边缘发现悖论造成的。起初,坎托的集合论的成果使数学家们欢欣鼓舞,集合论不但使人们认识了实在的无穷,而且自然而然地被看成是数学的基础,这里蕴含着两层意思:

第一层意思:不论哪一门数学,都要有自己的研究对象。这些研究对象就形成了一个集合,或一些集合。第二层意思:数学要研究数与形,解析几何可以把行转化为数,因而归根结底要研究数。由于集合概念已经渗透到众多的数学分支,并且实际上集合论成了数学的基础,因此集合论中悖论的发现自然地引起了对数学整个基本结构的有效性的怀疑,产生了数学史上的第三次危机。

1897年,福蒂(Forti)揭示了集合论中的第一个悖论。两年后,坎托发现了很相似的悖论。1902年,罗素(Russell)又发现了一个悖论。其中最著名的是罗素于1919年给出的,它涉及某村理发师的困境。理发师宣布了这样一条原则:他给所有不给自己刮脸的人刮脸,并且,只给村里这样的人刮脸。当人们试图回答下列疑问时,就认识到了这种情况的悖论性质:“理发师是否自己给自己刮脸?”如果他不给自己刮脸,那么按原则他就该

为自己刮脸；如果他给自己刮脸，那么他就不符合自己制定的原则。

罗素悖论使整个数学大厦动摇了。弗雷格 (Frege) 在收到罗素的信之后，在他刚要出版的《算术的基本法则》第 2 卷末尾写道：“一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础垮掉了，当本书等待印出的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地。”于是罗素终结了近 12 年的刻苦钻研。承认无穷集合，承认无穷基数，就好像一切灾难都出来了，这就是第三次数学危机的实质。

尽管悖论可以消除，矛盾可以解决，然而数学的确定性却在一步一步地丧失。罗素的悖论给当时为了微积分的严格基础被建立而兴奋的数学家们泼了一盆冷水。一向认为推理严密、结论永远正确的数学，竟在自己最基础的部分推出了矛盾，而推出矛盾的推理方法如此简单明了，因而数学方法的可靠性又从何说起呢？

(3) 近代人们对数学的看法。

1890 年到 1930 年，因集合论悖论所产生的数学危机使许多数学家都卷入一场大辩论当中。以罗素为代表的逻辑主义，以布劳沃 (L. E. Brouwer) 为代表的直觉主义，以希尔伯特 (D. Hilbert) 为代表的形式主义三大学派应运而生。

逻辑主义者试图把数学还原为逻辑，或者认为数学就是逻辑的一部分。罗素认为数学就是逻辑，就是纯形式的逻辑语言。全部数学可以由逻辑推导出来——数学概念可以借逻辑概念来定义，数学定理可以由逻辑公理按逻辑规则推出。

直觉主义的基本思想是数学独立于逻辑，数学的基础是一种能使人认识“知觉单位”以及自然数列的原始直觉。坚持数学对象的构造性定义，是直觉主义哲学的精粹。

形式主义主张将数学彻底化为一个系统。在这个形式系统中，人们必须通过逻辑的方法来进行数学语句的公式表述，并用形式的程序表示推理：确定一个公式——确定这个公式蕴含另一个公式——再确定第二个公式，依此类推，数学证明便由这样的公式链构成 (郜舒竹，2004)。

这三个学派各有其合理之处，但这些思想用于教育的时候，或多或少地会带来一些问题。比如认为数学内容是产品，只关注了数学的表现形式、数学家的成果、数学的间接经验。在数学教育中的数学就是书本上的这些公式、定理、概念，学生看到的数学是绝对正确的、严密的、简洁的。

数学教师就是通过传道、授业、解惑，向学生传授书本上的这些间接经验，学生学习数学也是为了掌握书本上的这些概念、定理和公式。而学生记住了这些概念、定理和公式有什么用？这样的学习是为了什么？这些教育中的基本问题自然就缺乏思考和研究了。比如，持形式主义数学观的教师将在结构形式中向学生传授数学知识，他们要求学生掌握系统的数学语言、符号和概念体系。相应的课堂上也以教师的讲授和学生的练习为主。数学教师的这种数学观只是将数学作为一种结果，没有视数学为一种过程，没有注意到数学知