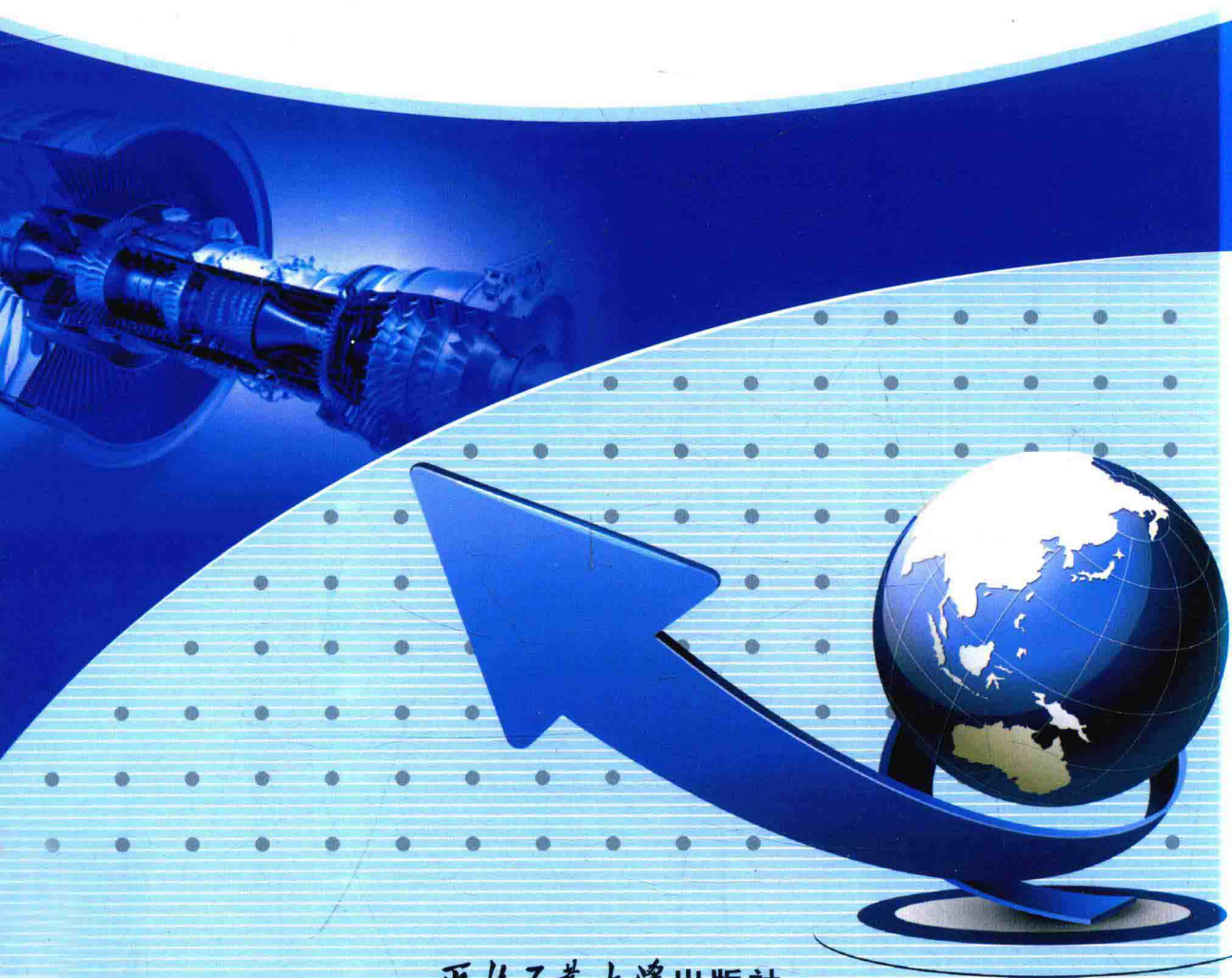




工业和信息化部“十二五”规划教材

# 航空发动机转子动力学

廖明夫◎主编



西北工业大学出版社



工业和信息化部“十二五”规划教材

HANGKONG FADONGJI ZHUANZI DONGLIXUE

# 航空发动机转子动力学

廖明夫 主编

西北工业大学出版社

**【内容简介】** 本书从机械振动基础开始,系统地介绍转子动力学的基础理论。针对航空发动机的特点,引入转子系统“可容模态”的概念,建立转子动力学设计的方法和流程,最后论述转子减振理论和振动主动控制方法,并展示大量的实验验证结果。

本书融入了作者在航空发动机转子动力学领域多年的科研成果和经验,特别是转子进动分析理论、转子系统“可容模态”的概念、“可容模态”下转子动力学设计的方法和流程以及挤压油膜阻尼器和弹支干摩擦阻尼器的设计等,可直接作为航空发动机转子动力学设计的指南。另外,本书包含大量的图、表、数据、示例和实验结果,增强了理论的透明度和设计方法的可操作性,有助于读者理解和掌握。

本书可用作飞行器动力专业、机械专业和力学专业本科生及研究生的教科书,也宜作为航空发动机设计师的专业参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

航空发动机转子动力学/廖明夫主编. —西安:西北工业大学出版社,2015. 11  
工业和信息化部“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-5612-4646-7

I. ①航… II. ①廖… III. ①航空发动机—转子动力学—高等学校—教材 IV. ①V23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 275505 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:兴平市博闻印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:24.375

字 数:593 千字

版 次:2015 年 11 月第 1 版 2015 年 11 月第 1 次印刷

定 价:65.00 元

# 前 言

航空发动机的突出特点是转速高、温度高、负荷大、结构复杂且轻柔。因此，振动问题一直是发动机研制中的“瓶颈”。据统计，由振动引发的发动机故障次数占发动机总故障的50%~60%。只有很好地解决振动问题，才有可能提高发动机的可靠性。而解决振动问题的根本出路在于建立发动机结构动力学设计体系，并贯彻在发动机设计的整个流程之中，防微杜渐，从源头抓起。

转子系统是发动机的核心部件，既是发动机振动的主体，也是发动机振动的主要激振源。因此，转子动力学设计是航空发动机结构动力学设计的重中之重。笔者编著本书的动机也恰在于此。

本书从机械振动基础开始，系统地介绍转子动力学的基础理论，引入转子系统“可容模态”的概念，建立转子动力学设计的方法和流程，最后论述转子减振理论和振动主动控制方法。其中部分内容是笔者及同事们若干年来科研成果的总结，期望对从事航空发动机和燃气轮机研制的同仁有所帮助。本书也宜作为飞行器动力专业、机械专业和力学专业本科生及研究生的教材和专业参考书。

本书共计18章，分为三个部分。第一部分为第1~10章的内容，主要以Gasch, Vance, Kraemer和顾家柳等著名转子动力学专家的经典著作为基础编写而成，属转子动力学的基础理论，是转子动力学设计的必备知识。第二部分为第11~14章的内容，着重以航空发动机为对象，论述转子动力学设计理论与方法。第三部分包括第15~18章，重点介绍转子减振与振动主动控制理论与技术。其中柔性转子的模态平衡和挤压油膜阻尼器技术是航空发动机转子减振的特色，而电磁轴承与弹支干摩擦阻尼器作为振动主动控制技术有望在未来发动机上获得应用。本书的三个部分相互联系，但相对独立完整，作为教材时，这样的结构安排有助于读者循序渐进地学习，也利于教师根据学生不同的专业类型取舍内容。

本书各章内容如下：

第1章介绍单自由度系统的振动，引入自振频率的概念及共振现象，给出振动系统阻尼的估计方法和振动烈度的度量方法。本章为转子动力学初学者的入门知识。

第2章介绍支座激振及振动隔离。一方面，台架或者飞机的振动均可引起发动机的振动。即使对发动机本身而言，附件或者机匣的振动也可导致转子振动。为简单起见，把这种现象视作支座激振。支座的运动可源自多种激扰源，例如，机翼振动、飞机起降的冲击、邻近机器的激扰、地震等。另一方面，转子的振动将会通过支承传至机匣，再由安装节传至飞机，引起飞机的振动，威胁飞行安全。这两

个问题看似完全不同,但本质上是同一个问题的两个方面,都可通过振动的隔离加以解决。本章仍将发动机简化成单自由度系统,讨论支座激起的机器振动,分析发动机传到飞机的激扰力。在此基础之上,阐明振动隔离的原理及方法。虽是高度简化,但原理与方法并不失一般性。

第3章介绍单盘对称转子的振动,为转子动力学的基础。本章分析转子的涡动和不平衡响应,引入临界转速的概念,着重讨论转子的幅频特性及相频特性。

第4章分析带弯曲轴和非圆轴转子的振动。着重揭示它们的影响规律以及在此影响下转子的振动表现特征,为故障诊断奠定基础。

第5章介绍支承各向异性对转子振动的影响。分析转子的正、反进动,重点讨论转子的稳定性。

第6章讨论带偏置盘转子的振动。引入陀螺力矩,分析回转效应对临界转速的影响。

第7章介绍叶轮顶间隙激振。在汽轮机、轴流压缩机、航空发动机等轴流机械中,当转子受某种激扰,其轴心偏离机匣的中心位置时,叶轮与机匣的顶间隙就要发生变化。顶间隙小的一边叶轮所受周向力大,顶间隙大的一边叶轮所受的周向力小。最终产生间隙激振力,可导致转子发生正进动失稳(涡轮)或反进动失稳(压气机)。本章介绍间隙激振力的计算和在此力作用下转子的振动。

第8章论述转子振动的进动分析方法。给出全频域分解转子正、反进动量的算法和表达方法,引入廖氏4个进动分析定理及其证明,结合实例说明进动分析方法的应用。

第9章介绍振动测试及振动信号分析技术。介绍常用的振动传感器——位移、速度及加速度传感器,讨论信号处理中应注意的几个问题。

第10章介绍转子动平衡技术。考虑到实用性,只介绍刚性转子动平衡和柔性转子的影响系数平衡法。至于更深的平衡理论,读者可阅读本书第15章。

第11章详细讨论航空发动机高压转子结构动力学设计方法。首先建立发动机高压转子结构动力学模型,讨论转子抗振设计的要素,给出支承刚度匹配和动平衡时相位匹配的准则,引入参数临界转速的概念,最后用示例说明发动机高压转子的设计方法和步骤。

第12章论述航空发动机转子振动的“可容模态”和减振设计方法。针对航空发动机的变工况运行,引入转子“可容模态”概念,对应的临界转速定义为“可容临界”。建立“可容模态”下,转子减振设计方法和准则,以发动机低压转子和双转子模型为例,验证“可容模态”设计方法,并给出设计流程。

第13章介绍双转子的振动。以简化的双转子模型为基础,揭示双转子的耦合振动特性,着重分析中介轴承刚度各向异性对双转子振动的影响,从理论上证明,中介轴承刚度各向异性将产生转子“重力临界”现象,并引起组合频率成分的振动。

第14章介绍连续体转子的结构动力学设计。考虑轴的几何形状和分布质量,更接近真实的发动机转子。引入计算转子振动特性的传递矩阵法和有限元法,以此为基础,建立转子优化设计方法。分别按照“临界转速裕度”准则和“可容模态”准则对转子进行优化设计,比较两种设计结果,并给出设计示例。

第15章介绍柔性转子模态动平衡理论。对于运转在一阶、二阶甚至三阶临界转速之上的发动机转子,一般的刚性转子动平衡工艺达不到动平衡要求,必须将其视作柔性转子进行高速动平衡。柔性转子动平衡要比刚性转子动平衡复杂得多。它涉及平衡面的选取、各阶模态的确定、转子振动的测量、试重的加法、组件的平衡次序等诸多方面的问题。一般采用模态平衡法或影响系数平衡法对柔性转子实施动平衡。本章分别介绍模态平衡法中的 $N$ 平面法和 $N+2$ 平面法,给出转子模态动平衡的一般流程和步骤。

第16章介绍挤压油膜阻尼器。自20世纪60年代以来,挤压油膜阻尼器在航空发动机上获得了广泛应用,取得了良好的减振效果。本章系统地介绍挤压油膜阻尼器的原理和基础理论,建立挤压油膜阻尼器与转子系统匹配设计的方法,最后展示实验验证的结果。

第17章介绍电磁轴承。电磁轴承在地面机械中已获得成功应用,显现了突出的自适应优势。目前虽未应用于航空发动机,但随着技术进步和发动机对自适应减振结构的不断需求,未来有可能应用于航空发动机。本章论述电磁轴承的基本结构和工作原理,分析带电磁轴承转子的振动特性,介绍电磁轴承几种振动控制方法,讨论设计中应注意的几个问题。

第18章介绍弹支干摩擦阻尼器。弹支干摩擦阻尼器是一种新型的自适应转子减振机构,可实现转子振动主动控制,由西北工业大学研制。本章介绍弹支干摩擦阻尼器的原理和几种典型结构,剖析减振和镇定机理,建立弹支干摩擦阻尼器实施振动主动控制的两种控制方法,最后展示实验验证结果。

本书前言由廖明夫撰写,第1~10章由廖明夫、王四季和王俨凯编写;第11~14章由廖明夫、金路、刘展翅和宋明波编写;第15~18章由廖明夫、王四季、刘展翅和宋明波编写。廖明夫对全书进行了统编,陈曦和刘展翅负责全书的图表修订和校对。

在本书的编写过程中,得到了西北工业大学动力与能源学院“中德旋转机械与风能装置测控研究所”全体师生的帮助和支持,也得到了国家自然科学基金资助项目压电弹支干摩擦阻尼器的动力学分析与实验研究(51405393)的支持,西北工业大学出版社何格夫对本书的出版付出了辛勤劳动,在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限,错误和不足在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2015年3月

# 目 录

第 1 章 单自由度系统的振动	1
1.1 运动微分方程	1
1.2 自由振动	1
1.3 受迫振动	3
1.4 阻尼的半功率点估计	4
1.5 周期力扰动下的受迫振动	5
1.6 振动烈度的度量	7
第 2 章 支座激振及振动隔离	9
2.1 支座激振	9
2.2 振动的隔离	10
第 3 章 单盘对称转子的振动	12
3.1 转子的涡动及幅频特性	12
3.2 转子运动微分方程	13
3.3 转子的不平衡响应	14
3.4 不平衡作用下转子的进动	17
3.5 固定坐标系和旋转坐标系下转子运动的描述和变换	18
3.6 有阻尼时转子的振动	19
3.7 转子在临界转速点时的振动和阻尼的最佳估计方法	20
第 4 章 带有弯曲轴和非圆轴转子的振动	25
4.1 带有弯曲轴时转子的振动	25
4.2 带有非圆轴时转子的振动	27
第 5 章 支承各向异性时转子的振动	33
5.1 支承主刚度各向异性时转子的振动	33
5.2 支承主刚度各向异性时转子的正进动与反进动	35
5.3 支承存在交叉刚度时转子的振动	37
5.4 支承主刚度各向异性对转子稳定性的影响	40
5.5 从能量角度解释转子的稳定性	41
第 6 章 盘偏置时转子的振动	44
6.1 回转效应的实验演示	44

6.2	偏置盘运动的描述	45
6.3	盘偏置时转子的运动方程	46
6.4	转子的自振频率	49
<b>第7章</b>	<b>叶轮顶间隙激振</b>	<b>54</b>
7.1	间隙激振力的计算	54
7.2	局部间隙损失系数	55
7.3	间隙激振力系数	57
7.4	间隙激振的失稳作用	57
<b>第8章</b>	<b>转子振动的进动分析方法及其应用</b>	<b>59</b>
8.1	进动分析方法的建立	59
8.2	转子的轴心轨迹——正、反进动分解	59
8.3	转子运动的进动比函数	62
8.4	转子进动轨迹的全息进动分析	66
8.5	转子进动分析的廖氏定理	68
8.6	几种典型故障条件下转子的进动特征	75
<b>第9章</b>	<b>振动测试及振动信号分析</b>	<b>77</b>
9.1	测试的目的和任务	77
9.2	振动传感器	78
9.3	传感器的安装	83
9.4	振动信号的调理和采集	84
9.5	转子振动信号的处理与分析	86
<b>第10章</b>	<b>转子的动平衡</b>	<b>90</b>
10.1	不平衡的分布、静不平衡与动不平衡	90
10.2	刚性转子与柔性转子	91
10.3	刚性转子的平衡	92
10.4	影响系数平衡法	94
10.5	柔性转子的动平衡	94
10.6	影响系数法的改进	96
10.7	基于试重组的影响系数平衡法	100
<b>第11章</b>	<b>航空发动机高压转子的结构动力学设计方法</b>	<b>108</b>
11.1	高压转子的动力学模型及振动模态	108
11.2	转子两阶临界转速的上界估计方法	112
11.3	高压转子的抗振设计	116
11.4	高压转子动力学设计实例	125
11.5	弹性支承刚度估计与测试	130
11.6	小结	134



<b>第 12 章 航空发动机转子振动的“可容模态”和减振设计</b> .....	136
12.1 简单柔性转子的“可容模态”设计 .....	136
12.2 一般柔性转子的“可容模态”设计 .....	143
12.3 双转子系统的“可容模态”设计 .....	151
12.4 小结 .....	161
<b>第 13 章 双转子系统的振动</b> .....	163
13.1 简支对称双转子模型和运动方程 .....	163
13.2 双转子的不平衡响应 .....	165
13.3 双转子的拍振 .....	166
13.4 带弹支和阻尼器的双转子振动 .....	167
13.5 刚性转子 .....	169
13.6 柔性转子 .....	169
13.7 刚度均匀的中介轴承的影响 .....	170
13.8 刚度各向异性的中介轴承的影响 .....	176
13.9 带中介轴承的对转双转子的振动 .....	184
13.10 小结 .....	186
<b>第 14 章 航空发动机转子动力学设计</b> .....	188
14.1 传递矩阵法 .....	188
14.2 有限元法 .....	208
14.3 双转子动力学设计 .....	235
<b>第 15 章 柔性转子的模态动平衡方法</b> .....	253
15.1 柔性转子的运动方程和模态正交性 .....	253
15.2 转子的不平衡响应 .....	259
15.3 模态平衡的 $N$ 平面法 .....	261
15.4 模态平衡的 $N+2$ 平面法 .....	269
15.5 柔性转子模态平衡法的过程与步骤 .....	271
15.6 多测点优化 .....	273
15.7 $N$ 平面全正交平衡法——向前和向后正交平衡法 .....	274
15.8 全正交平衡的步骤 .....	275
<b>第 16 章 带挤压油膜阻尼器转子的动力学特性</b> .....	278
16.1 挤压油膜阻尼器的发展和应用 .....	278
16.2 挤压油膜阻尼器的基本特性及特征参数 .....	280
16.3 雷诺方程 .....	282
16.4 油膜反力、油膜刚度和油膜阻尼 .....	289
16.5 挤压油膜阻尼器设计 .....	312

<b>第 17 章 电磁轴承及带电磁轴承的转子振动</b> .....	335
17.1 概述 .....	335
17.2 主控式磁悬浮轴承的结构 .....	336
17.3 PD 反馈控制下电磁轴承控制器及转子系统的运动方程 .....	337
17.4 PD 控制下转子运动方程的解 .....	339
17.5 PID 控制下转子系统的振动特性 .....	341
17.6 电磁轴承的控制目标和布局 .....	342
17.7 转子偏摆的影响 .....	344
17.8 带磁力轴承的柔性转子 .....	344
<b>第 18 章 弹支干摩擦阻尼器</b> .....	350
18.1 弹支干摩擦阻尼器的结构与减振原理 .....	350
18.2 弹支干摩擦阻尼器的摩擦模型和分析方法 .....	351
18.3 带弹支干摩擦阻尼器的转子振动特性 .....	355
18.4 几种弹支干摩擦阻尼器的结构形式和特点 .....	365
18.5 主动式弹支干摩擦阻尼器的控制策略和控制方法 .....	368
<b>参考文献</b> .....	376

# 第1章 单自由度系统的振动

发动机振动最简单的模型可由一个单自由度系统来描述。自振频率的概念及共振现象通过分析一个单自由度系统就可得到明确的解释。另外,振动强弱的度量也是一致的。因此本书首先介绍单自由度系统的振动。

## 1.1 运动微分方程

图 1.1 描述的就是一个单自由度系统。它由质量、弹簧和阻尼器组成。此处认为弹簧与阻尼器皆为线性元件,即弹性力与位移  $x$  成正比,阻尼力与速度  $\dot{x}$  成正比。

这一模型的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + sx = F(t) \quad (1.1)$$

式中,  $m$  为质量;  $d$  为阻尼系数;  $s$  为刚度系数;  $F(t)$  为激振力;  $t$  为时间;  $x$  为质量  $m$  离开平衡位置的位移。

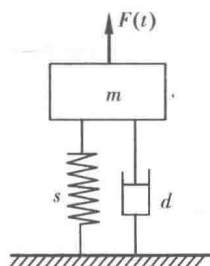


图 1.1 单自由度振动系统

方程的解由齐次方程( $F(t)=0$ )的通解和非齐次方程( $F(t)\neq 0$ )的特解构成,它完全描述了系统的振动。下面将分别讨论齐次方程的通解和激振力为简谐力时非齐次方程的特解。

## 1.2 自由振动

无激振力时,即  $F(t)=0$  时,方程式(1.1)变成齐次方程

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + sx = 0 \quad (1.2)$$

方程两边同除以  $m$  可得

$$\ddot{x} + 2\omega D\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.3)$$

其中

$$D = \frac{d}{2\sqrt{ms}} \quad (1.4)$$

称为阻尼比(相对阻尼系数),而

$$\omega = \sqrt{\frac{s}{m}} \quad (1.5)$$

称为系统无阻尼自振频率。

假设方程的解为

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (1.6)$$

代入方程式(1.3)后可得

$$(\lambda^2 + 2\omega\lambda D + \omega^2)A = 0 \quad (1.7)$$

由于  $A \neq 0$ , 则有

$$\lambda^2 + 2\omega\lambda D + \omega^2 = 0 \quad (1.8)$$

此方程称之为系统的特征方程, 其解为

$$\lambda_{1,2} = -\omega D \pm \omega \sqrt{D^2 - 1} \quad (1.9)$$

对于发动机, 绝大多数情况下满足

$$D \ll 1 \quad (1.10)$$

因此方程式(1.9)可改写为

$$\lambda_{1,2} = -\omega D \pm j\omega \sqrt{1 - D^2}, j = \sqrt{-1} \quad (1.11)$$

故可得方程式(1.3)的通解为

$$x(t) = e^{-\omega D t} (A_1 e^{j\omega t \sqrt{1 - D^2}} + A_2 e^{-j\omega t \sqrt{1 - D^2}}) \quad (1.12)$$

其中  $A_1$  和  $A_2$  为复常数。考虑到  $x(t)$  表示的是系统的振动位移, 故  $A_1$  和  $A_2$  必为共轭复数, 可设

$$A_1 = (a - jb)/2$$

$$A_2 = (a + jb)/2$$

代入方程式(1.12)后最终可得

$$x(t) = e^{-\omega D t} (a \cos \sqrt{1 - D^2} \omega t + b \sin \sqrt{1 - D^2} \omega t) = X e^{-\omega D t} \sin(\sqrt{1 - D^2} \omega t + \varphi) \quad (1.13)$$

其中

$$X = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.14)$$

$$\varphi = \arctan \frac{a}{b} \quad (1.15)$$

系数  $a$  和  $b$  由初始条件确定。

当无阻尼时, 即  $D=0$  时, 方程式(1.13)变为

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = X \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.16)$$

图 1.2(a)描述了自由振动, 而图 1.2(b)描述了阻尼对系统自由振动的影响。可见, 当系统自由振动时, 其振动频率为  $\omega$  或  $\sqrt{1 - D^2} \omega$ 。但当阻尼比  $D \ll 1$  时,  $\sqrt{1 - D^2} \approx 1$ 。故在一般情况下, 总是把  $\omega$  称为系统的自振频率。由方程式(1.5)可见, 它只取决于系统的固有参数, 因此, 也常被称为固有频率。

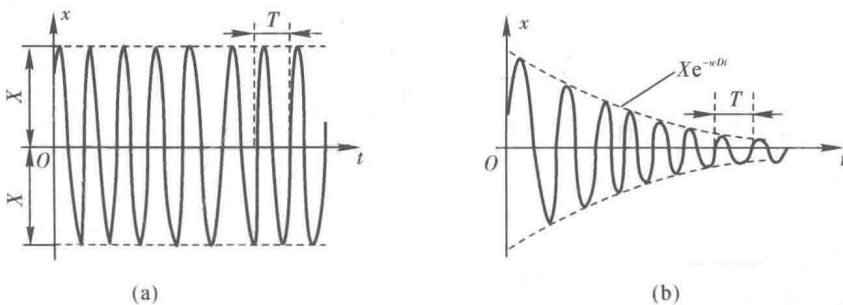


图 1.2 振系的自由振动

(a) 无阻尼; (b) 有阻尼

从图 1.2(b)可见,阻尼对振动幅值的影响非常明显。阻尼使得自由振动的幅值随时间不断衰减,最终至零。

再回到描述有阻尼系统自由振动的表达式(1.13)。其幅值衰减系数为  $e^{-\omega D t}$ 。系统从任一时刻  $t_0$  开始振动一个周期  $T$  之后,幅值比为

$$\frac{x_0}{x_1} = e^{\omega D T} \quad (1.17)$$

或

$$\omega D T = \ln \frac{x_0}{x_1} \quad (1.18)$$

在弱阻尼情况下,  $T \approx \frac{2\pi}{\omega}$ , 由方程(1.18)可得

$$D = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_0}{x_1} \quad (1.19)$$

当相邻  $n$  个周期时,方程(1.19)变为

$$D = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{x_0}{x_n} \quad (1.20)$$

根据这一计算公式(1.20),可实验获取阻尼比  $D$ 。其过程是利用锤击使系统产生自由振动,测量出相邻  $n$  个周期的振幅值,则可由式(1.20)计算出阻尼比  $D$ 。

### 1.3 受迫振动

所谓受迫振动是指外界因素作为激励使系统产生振动,并且在振动过程中这一激励始终作用在系统上。此处仅考虑外界激励为简谐力时的受迫振动。虽然这是最简单的情况,但一般情况下发动机受到的动载皆为周期性激励,它经傅里叶分解总可表示为简谐函数的级数。因此,把外载视为简谐力并不失一般性。

设简谐力为

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (1.21)$$

代入方程(1.1),并考虑式(1.4)和式(1.5),则有

$$\ddot{x} + 2\omega D \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad (1.22)$$

其稳态解为

$$x = X \cos(\Omega t - \varphi) \quad (1.23)$$

其中

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega\Omega D)^2} \quad (1.24)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\omega\Omega D}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (1.25)$$

引入静态位移

$$x_s = \frac{F_0}{s} \quad (1.26)$$

和频率比

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega} \quad (1.27)$$

则方程式(1.24)和方程式(1.25)可转化为无量纲表达式

$$Q = \frac{X}{x_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\lambda D)^2}} \quad (1.28)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\lambda D}{1-\lambda^2} \quad (1.29)$$

图 1.3 和图 1.4 分别表示  $Q$  和  $\varphi$  随转速比的变化,其中阻尼比  $D$  作为参数示出。

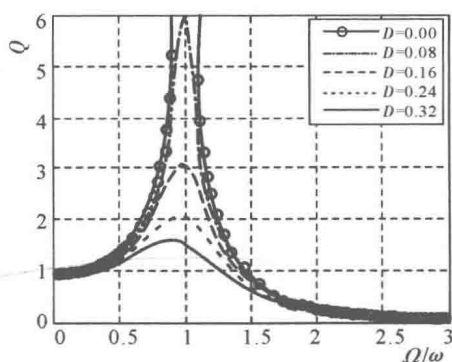


图 1.3  $Q$  随转速比的变化

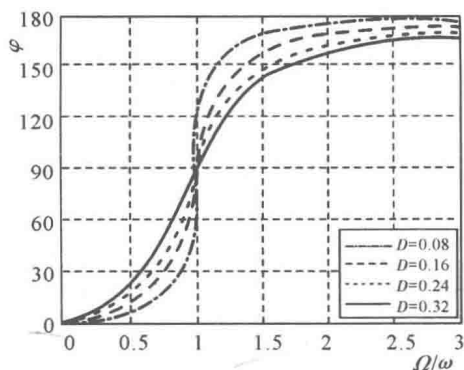


图 1.4  $\varphi$  随转速比的变化

由图 1.3 可见, $Q$  从 1 开始随转速比的增加达到最大值后渐近于零。 $Q-\lambda$  曲线称为幅频特性曲线。

当阻尼比  $D \leq 1/\sqrt{2} = 0.707$  时,有

$$\lambda_{\max} = \sqrt{1-2D^2} \quad (1.30)$$

$Q$  值此时达到最大值,即

$$Q_{\max} \approx \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \quad (1.31)$$

当阻尼很小时, $D \ll 1$ ,则有

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &\approx 1 \\ Q_{\max} &\approx \frac{1}{2D} \end{aligned} \quad (1.32)$$

由此表明,激振频率  $\Omega$  等于系统自振频率  $\omega$  时,系统发生共振。共振的振幅为

$$X_{\max} = \frac{x_s}{2D} \quad (1.33)$$

从图 1.4 表示的相位曲线可见,共振时无论阻尼比  $D$  取何值,相角  $\varphi$  总是保持  $90^\circ$ 。因此,有时也以相角  $\varphi$  判断共振点。

## 1.4 阻尼的半功率点估计

如果已知振系的幅频特性,则可根据幅频特性估计出阻尼比  $D$  值。

在共振点,  $\lambda_{\max} \approx 1, Q_{\max} \approx \frac{1}{2D}$ 。则对于任一幅值  $\alpha Q_{\max}$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), 如图 1.5 所示, 可得

$$\frac{\alpha^2}{4D^2} = \frac{1}{(1-\lambda^2)^2 + (2\lambda D)^2} \quad (1.34)$$

其中  $\lambda = \frac{\Omega}{\omega}$  为频率比。

整理之后可得

$$\lambda^4 - 2(1 - 2D^2)\lambda^2 + 1 - \frac{4D^2}{\alpha^2} = 0 \quad (1.35)$$

由此解出

$$\lambda^2 = 1 - 2D^2 \pm 2D \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1 + D^2} \quad (1.36)$$

考虑到阻尼比  $D \ll 1$ , 可忽略  $D$  的高次项, 即  $D^2 \approx 0$ , 于是可得

$$\lambda^2 = 1 \pm 2D \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \quad (1.37)$$

由此得到的两个根应满足

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\omega^2} = 4D \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \quad (1.38)$$

$$\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\omega^2} = \frac{(\Omega_2 + \Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_1)}{\omega^2} = \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} 2(\Omega_2 - \Omega_1) \quad (1.39)$$

由于  $\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} \approx \omega$ , 故得

$$\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\omega} \approx 2D \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \quad (1.40)$$

当  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 即半功率点, 阻尼比为

$$D = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega} \quad (1.41)$$

当  $a$  为  $(0, 1)$  区间的任意值时, 则可由式(1.38)得到阻尼比为

$$D = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{4\omega^2 \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}} \quad (1.42)$$

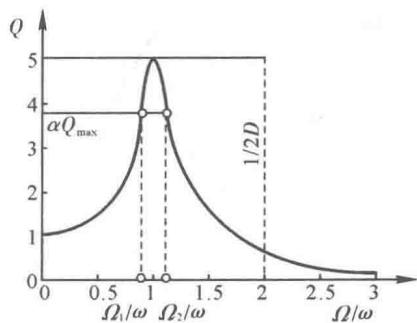


图 1.5 振系的幅频特性及半功率点

## 1.5 周期力激励下的受迫振动

第 1.3 节讨论了简谐力作用下的受迫振动。考虑到发动机所受动载的特点, 需分析任一周期力激励下系统的受迫振动。仍取图 1.1 所示的单自由度系统作为分析模型, 其振动微分

方程为

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + sx = F(t) \quad (1.43)$$

其中激振力为周期力,即  $F(t) = F(t+T)$  ( $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ,  $\Omega$  为角速度)。因此,可将激振力  $F(t)$  展成傅里叶级数,即

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t + \beta_k) \quad (1.44)$$

式中

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (1.45)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos k\Omega t dt \quad (1.46)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin k\Omega t dt \quad (1.47)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (1.48)$$

$$\tan \beta_k = -\frac{b_k}{a_k} \quad (1.49)$$

式(1.44)表明,周期激振力总可以表示成简谐力的级数和。其中  $k=1$  的简谐力为基频项,其频率为  $\Omega$ ,对应于发动机转子的转动频率。由于系统为线性系统,符合叠加原理,故先考虑第  $k$  阶简谐力激起的振动。此时,运动方程为

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + sx = A_k \cos(k\Omega t + \beta_k) \quad (1.50)$$

据式(1.24)和式(1.25)知其解为

$$X_k = \frac{A_k/m}{\sqrt{[\omega^2 - (k\Omega)^2]^2 + (2Dk\omega\Omega)^2}} \cos(k\Omega t + \beta_k - \varphi_k) \quad (1.51)$$

$$\tan \varphi_k = \frac{2Dk\omega\Omega}{\omega^2 - (k\Omega)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.52)$$

由式(1.51)可见,当转动频率  $\Omega = \frac{\omega}{k}$  时,振系发生共振,即所谓的谐波共振。图 1.6 表示  $k=1, 2$  和 3 时,振系振幅随转速比  $\Omega/\omega$  的变化曲线。

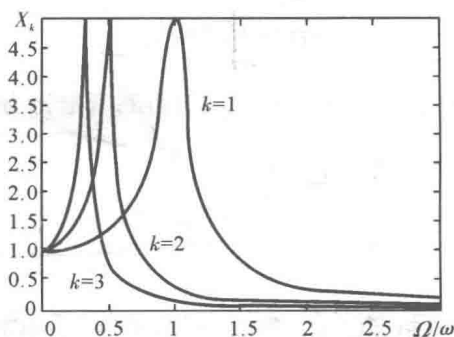


图 1.6 振幅随转速比的变化曲线

最后得到总的受迫振动为

$$X = \frac{a_0}{2s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k/m}{\sqrt{[\omega^2 - (k\Omega)^2]^2 + (2Dk\omega\Omega)^2}} \cos(k\Omega t + \beta_k - \varphi_k) \quad (1.53)$$



由此表明,任一周期力将会同时激起振系一倍频、二倍频等谐波振动。其频谱为离散的谱线,如图 1.7 所示。

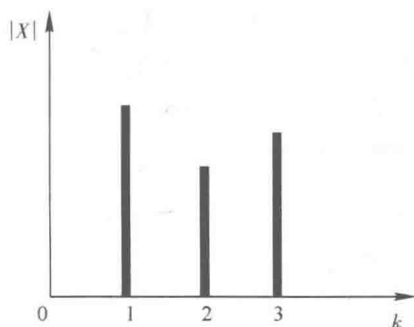


图 1.7 频谱分析图

## 1.6 振动烈度的度量

振动烈度是机器状态监测的一个重要监测量,它可由峰值、峰-峰值、平均值、均方根值等量来度量。

峰值  $A_p$  或峰-峰值  $A_{p-p}$  表示了振系最大的振动应力,同时也给出了振动噪声的限度。对于简谐振动,如图 1.8 所示,峰-峰值为

$$A_{p-p} = 2A_p \quad (1.54)$$

而平均值为

$$\bar{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.55)$$

当振动信号中不包含直流量时,  $\bar{A} = 0$ 。

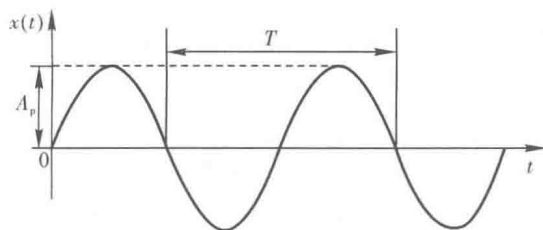


图 1.8 简谐振动

振动位移的均方值一般与振动能量相关联。其表达式为

$$\bar{X}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.56)$$

对于简谐振动  $x(t) = A \sin \omega t$ , 其均方值为

$$\bar{X}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} A^2 \quad (1.57)$$

而均方根值为

$$A_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{X}^2} \quad (1.58)$$

当  $x = A \sin \omega t$  时,  $A_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} A = 0.707A$ 。