数值分析

Numerical Analysis

韩旭里　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数值分析

SHUZHI FENXI

Numerical Analysis

韩旭里 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书介绍现代科学计算中常用的数值计算方法及理论，注重内容和方法的实用性。取材精练、叙述清晰、系统性强、实例引入和数值计算例子丰富是本书的特色。

全书内容包括数值计算的误差和基本原则、插值法、函数逼近与数据拟合、数值积分与数值微分、线性方程组的直接解法和迭代解法、非线性方程和非线性方程组的数值解法、矩阵特征值问题的数值计算、常微分方程的数值解法和偏微分方程的数值解法。各章开头都有实际问题的引入，并配备丰富的例题、练习题和扩展题。

本书可作为高等学校理工科专业本科高年级学生或研究生的数值分析、数值计算方法课程的教材或教学参考书，也可供从事科学与工程计算的科技人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值分析/韩旭里编著. —北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032283-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①数值分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第083112号

策划编辑 张长虹　　责任编辑 张长虹　　封面设计 李卫青　　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹文军　　责任校对 张小镝　　责任印制 田　甜

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京东君印刷有限公司
开　　本 787×960　1/16
印　　张 20
字　　数 370 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011年7月第1版
印　　次 2011年7月第1次印刷
定　　价 31.30元

物 料 号 32283-00

前　言

随着计算科学的迅速发展及其在其他科学技术领域的广泛应用，继理论方法和实验方法之后，科学计算已成为科学研究的第三种基本手段。科学计算的理论和方法日益受到数学、计算机科学以及其他科学工程技术领域的专家和科技工作者的重视。科学研究和工程技术领域都离不开科学计算，而数值计算是科学计算的核心，介绍数值计算理论和方法的课程已经成为高等学校理工科专业的一门重要基础课。

本书是作者根据多年数值分析和数值计算方法课程的教学实践，以及理工科高年级学生或研究生教学的需要，在教学内容不断充实和更新的基础上编写的。内容为数值计算的基本理论和基本方法，包括数值计算的误差和基本原则、插值法、函数逼近与数据拟合、数值积分与数值微分、线性方程组的直接解法和迭代解法、非线性方程和非线性方程组的数值解法、矩阵特征值问题的数值计算、常微分方程的数值解法和偏微分方程的数值解法。每章配有实际问题的引入，有较丰富的例题、练习题和扩展题。

编写本书的指导思想是：注重内容的实用性，注重原理和方法的基本思想的阐述，注重数值计算方法的应用。教材在体系结构和内容选取上，致力于精练简明，由浅入深，衔接顺畅，借鉴国内外同类教材的优点。在理论方法的分析和内容的表述上，力求重点突出、思路清晰、脉络分明、便于理解。在实际应用上，尽量联系问题的应用背景，各章开头精选了实际问题的引入，并用大量的数值计算例题说明方法的应用。在实践环节上，各章给出了较丰富的练习题和扩展题，练习题侧重于基本内容的实践，扩展题侧重于计算量较大的数值实验问题以及某些基本内容的扩展。

数值分析内容既像其他数学课程内容那样有自身严密的科学体系，又具有应用性和实践性强的特点。希望通过本书的学习，使读者掌握数值计算的基本理论和基本方法，提高数学素养，提高应用计算机进行科学与工程计算的能力，提高应用数学与计算机解决实际问题的能力。尽管本书的内容为数值计算的基本理论和基本方法，然而，使用计算机编程计算是学习、巩固、加深理解数值计算方法的重要环节，读者应该通过使用计算机进行数值实验，积累计算经验，进一步体会算法的实质。

本书可作为高等学校理工科专业本科高年级学生或研究生的数值分析、数

值计算方法课程的教材或教学参考书，也可供从事科学与工程计算的科技人员学习参考。教材内容涉及的范围和深度具有一定的弹性，教学时可根据学生的实际情况选用。一般60学时左右可以讲授本书的主要内容，结合数值实验讲完全部内容需80学时左右。作者提示，使用本书的讲授次序可以分为两条主要线索，即按照书上各章的自然次序，或者按第1,5,6,7,8,9章和2,3,4,10,11章的顺序讲授。

本书的选材和内容叙述可能会有不当之处，诚请广大读者和同行专家们提出宝贵的意见。

作　者

2010年5月

目　　录

第 1 章　数值计算引论 …… 1

1.1　数值分析的内容和特点 …… 1

1.2　数值计算的误差 …… 2

1.2.1　误差的来源 …… 2

1.2.2　误差与有效数字 …… 3

1.2.3　函数求值的误差估计 …… 5

1.2.4　计算机中数的表示 …… 6

1.3　病态问题与数值稳定性 …… 7

1.4　数值计算的基本原则 …… 8

1.4.1　避免有效数字的损失 …… 8

1.4.2　减少运算次数 …… 9

1.4.3　控制误差的传播 …… 10

练习题 1 …… 12

扩展题 1 …… 13

第 2 章　插值法 …… 14

2.1　引言与问题特例 …… 14

2.2　Lagrange 插值多项式 …… 15

2.2.1　多项式插值问题 …… 15

2.2.2　Lagrange 插值多项式 …… 16

2.2.3　插值余项 …… 17

2.3　逐次线性插值法 …… 19

2.3.1　逐次线性插值思想 …… 19

2.3.2　Aitken 算法 …… 20

2.4　Newton 插值多项式 …… 22

2.4.1　均差及其性质 …… 22

2.4.2　Newton 插值公式 …… 24

2.4.3　差分和等距节点插值公式 …… 26

2.5　Hermite 插值多项式 …… 30

2.6　分段低次插值 …… 32

2.6.1　高次多项式插值的问题 …… 32

2.6.2 分段线性插值 …… 33
2.6.3 分段三次 Hermite 插值 …… 35
2.7 三次样条插值 …… 36
2.7.1 三次样条插值函数的概念 …… 36
2.7.2 三弯矩算法 …… 37
2.7.3 三转角算法 …… 40
2.7.4 三次样条插值函数的性质 …… 43
练习题 2 …… 45
扩展题 2 …… 46
第 3 章 函数逼近与数据拟合 …… 48
3.1 引言与问题特例 …… 48
3.2 正交多项式 …… 49
3.2.1 离散点集上的正交多项式 …… 50
3.2.2 连续区间上的正交多项式 …… 51
3.3 连续函数的最佳逼近 …… 54
3.3.1 连续函数的最佳平方逼近 …… 55
3.3.2 连续函数的最佳一致逼近 …… 58
3.4 离散数据的曲线拟合 …… 61
3.4.1 最小二乘拟合 …… 61
3.4.2 多项式拟合 …… 62
3.4.3 正交多项式拟合 …… 65
练习题 3 …… 68
扩展题 3 …… 68
第 4 章 数值积分与数值微分 …… 70
4.1 引言与问题特例 …… 70
4.2 Newton-Cotes 求积公式 …… 71
4.2.1 插值型求积法 …… 71
4.2.2 Newton-Cotes 求积公式 …… 72
4.2.3 Newton-Cotes 公式的误差分析 …… 74
4.3 复化求积公式 …… 77
4.3.1 复化梯形求积公式 …… 77
4.3.2 复化 Simpson 公式 …… 79
4.3.3 变步长求积法 …… 80
4.4 外推原理与 Romberg 求积法 …… 82
4.4.1 外推原理 …… 82
4.4.2 Romberg 求积法 …… 84
4.5 Gauss 求积公式 …… 86

4.5.1 Gauss 求积公式的基本理论 …… 86
4.5.2 常用 Gauss 求积公式 …… 88
4.5.3 Gauss 求积公式的余项与稳定性 …… 91
4.6 奇异积分的数值计算 …… 93
4.6.1 反常积分的计算 …… 93
4.6.2 无穷区间积分的计算 …… 95
4.7 振荡函数的积分 …… 98
4.7.1 分部积分法 …… 99
4.7.2 Filon 法 …… 100
4.8 数值微分 …… 102
4.8.1 插值型求导公式 …… 103
4.8.2 三次样条函数求导 …… 104
4.8.3 数值微分的外推算法 …… 105
练习题 4 …… 106
扩展题 4 …… 107
第 5 章 线性方程组的直接解法 …… 109
5.1 引言与问题特例 …… 109
5.2 Gauss 消去法 …… 110
5.2.1 Gauss 消去法的计算过程 …… 110
5.2.2 矩阵的三角分解 …… 113
5.2.3 主元素消去法 …… 116
5.2.4 Gauss-Jordan 消去法 …… 120
5.3 直接三角分解方法 …… 122
5.3.1 一般矩阵的直接三角分解法 …… 122
5.3.2 三对角方程组的追赶法 …… 125
5.3.3 平方根法 …… 127
5.4 向量和矩阵的范数 …… 130
5.4.1 向量的范数与极限 …… 130
5.4.2 矩阵的范数 …… 132
5.5 方程组的性态与误差估计 …… 136
5.5.1 矩阵的条件数 …… 136
5.5.2 方程组解的误差估计 …… 138
练习题 5 …… 141
扩展题 5 …… 144
第 6 章 线性方程组的迭代解法 …… 146
6.1 引言与问题特例 …… 146
6.2 基本迭代方法 …… 147

6.2.1 迭代公式的构造 …… 147
6.2.2 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法 …… 148
6.3 迭代法的收敛性 …… 150
6.3.1 一般迭代法的收敛性 …… 150
6.3.2 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性 …… 154
6.4 超松弛迭代法 …… 157
6.5 分块迭代法 …… 160
6.6 共轭梯度法 …… 162
6.6.1 等价问题与几何意义 …… 162
6.6.2 最速下降法 …… 163
6.6.3 共轭梯度法 …… 164
练习题 6 …… 167
扩展题 6 …… 168
第 7 章 非线性方程的数值解法 …… 170
7.1 引言与问题特例 …… 170
7.2 方程求根的二分法 …… 172
7.3 一元方程的不动点迭代法 …… 173
7.3.1 不动点迭代法及其收敛性 …… 173
7.3.2 局部收敛性和加速收敛法 …… 177
7.4 一元方程的常用迭代法 …… 181
7.4.1 Newton 迭代法 …… 181
7.4.2 割线法与抛物线法 …… 184
7.5 多项式求根 …… 186
7.5.1 多项式及其导数求值的计算 …… 187
7.5.2 代数方程的 Newton 法 …… 187
7.5.3 共轭复根的计算 …… 189
练习题 7 …… 191
扩展题 7 …… 192
第 8 章 非线性方程组的数值解法 …… 193
8.1 引言与问题特例 …… 193
8.2 非线性方程组的不动点迭代法 …… 194
8.2.1 向量值函数的导数及其性质 …… 194
8.2.2 不动点迭代法 …… 196
8.3 非线性方程组的 Newton 法与拟 Newton 法 …… 200
8.3.1 Newton 法及其收敛性 …… 200
8.3.2 拟 Newton 法 …… 203
练习题 8 …… 205

扩展题 8 …… 206
第 9 章 矩阵特征值问题的数值计算 …… 207
9.1 引言与问题特例 …… 207
9.2 特征值的性质与估计 …… 208
9.3 幂法和反幂法 …… 210
9.3.1 幂法和加速方法 …… 210
9.3.2 反幂法和原点位移 …… 213
9.4 Jacobi 方法 …… 216
9.5 QR 算法 …… 220
9.5.1 化矩阵为 Hessenberg 形 …… 220
9.5.2 QR 算法及其收敛性 …… 223
9.5.3 带原点位移的 QR 算法 …… 227
9.6 广义特征值问题 …… 230
9.6.1 约化到标准特征值问题的计算 …… 230
9.6.2 乘积型矩阵特征值问题的计算 …… 231
练习题 9 …… 232
扩展题 9 …… 234
第 10 章 常微分方程的数值解法 …… 235
10.1 引言与问题特例 …… 235
10.2 简单数值方法 …… 236
10.2.1 Euler 方法及其有关的方法 …… 236
10.2.2 局部误差和方法的阶 …… 239
10.3 Runge-Kutta 方法 …… 241
10.3.1 Runge-Kutta 方法的基本思想 …… 241
10.3.2 几类显式 Runge-Kutta 方法 …… 242
10.4 单步法的收敛性和稳定性 …… 246
10.4.1 单步法的收敛性 …… 246
10.4.2 单步法的稳定性 …… 247
10.5 线性多步法 …… 250
10.5.1 基于数值积分的方法 …… 250
10.5.2 基于 Taylor 展开的方法 …… 252
10.5.3 预估 - 校正算法 …… 255
10.6 一阶方程组的数值解法 …… 258
10.6.1 一阶方程组和高阶方程 …… 258
10.6.2 刚性方程组 …… 260
10.7 边值问题的数值解法 …… 262
10.7.1 打靶法 …… 262

10.7.2 差分法 …… 265
10.7.3 差分问题的收敛性 …… 268
练习题 10 …… 270
扩展题 10 …… 272
第 11 章 偏微分方程的数值解法 …… 274
11.1 引言与问题特例 …… 274
11.2 抛物型方程的差分法 …… 275
11.2.1 显式差分法 …… 275
11.2.2 隐式差分法 …… 277
11.2.3 Crank-Nicolson 方法 …… 279
11.3 双曲型方程的差分法 …… 281
11.4 椭圆型方程的差分法 …… 284
11.5 有限元法 …… 287
练习题 11 …… 294
扩展题 11 …… 296
部分练习题提示与答案 …… 297
参考文献 …… 305

第1章　数值计算引论

1.1　数值分析的内容和特点

对于既不能用理论精确描述,也不能用实验手段来处理的研究对象,科学计算突破了理论方法和实验方法的局限,在科技发展中起到越来越重要的作用.可以认为,科学计算已与理论方法、实验方法一起成为科学研究方法上不可缺少的三大基本方法.数学科学与其他科学技术有着密切的关系,科学技术各个领域的问题通过建立数学模型与数学产生了紧密的联系,数学又以各种形式应用于科学与工程领域.然而,实际应用中所建立的数学模型往往难以求出问题的精确解,于是人们就将复杂的模型简化,忽略一些因素,但这样做往往不能满足精度要求.因此更多的是需要用数值计算方法来求解较少简化的数学模型.这样,数值计算方法与技术迅速发展,形成了用科学计算解决问题的重要途径.

数值分析属于计算数学的范畴,也称数值计算方法,是科学计算的主要组成部分,它研究用计算机求解各种数学问题的数值方法及有关理论和具体实现.现在,很多复杂和大规模的计算问题都可以在计算机上进行计算,新的、有效的数值方法不断出现,科学与工程中的数值计算已经成为各门自然科学和工程技术科学的一种重要手段.所以,数值分析既是一个基础性的,同时也是一个应用性的数学科学分支,与其他学科的联系十分紧密.

在实际的科学与工程中,所计算的问题往往是大型的、复杂的和综合的,但是有一些最基础、最常用的数值计算方法,它们不仅可以直接应用于实际计算,同时它们的方法及其分析的基础也适用于其他数值计算问题的研究.本书讨论的就是这些基础的数值计算方法及其理论,其内容包括函数逼近问题、微分和积分的数值计算、线性方程组以及非线性方程和非线性方程组的数值解法、微分方程的数值解法等.这些内容又包含运算量、存储量、误差、稳定性、收敛性、自适应性等,这些基本概念可用来描述数值计算的适用范围、可靠性、准确性、效率和使用的方便性等问题.

用数值计算方法求解数学问题要构造算法,即由运算规则(包括算术运算、逻辑运算和运算顺序)构成的完整的解题过程.它可用框图、算法语言、数学语

言等来描述.用计算机算法语言描述的算法称为计算机程序.面向计算机的算法可分为串行算法和并行算法两类.只有一个执行进程的算法适用于串行计算机,也称为串行算法.具有两个以上执行进程的算法适用于并行计算机,也称为并行算法.同一个数学问题可能有多种数值计算方法,但不一定都有效.评价一个算法的好坏主要有两条标准:计算结果的精度和得到结果所付出的代价.我们自然应该选择代价小又能满足精度要求的算法.计算代价也称为计算复杂性,包括时间复杂性和空间复杂性.时间复杂性好是指节省时间,主要由运算次数决定.空间复杂性好是指节省存储量,主要由使用的数据量决定.一个面向计算机且计算复杂性好又有可靠理论分析的算法就是一个好算法.

用计算机求数学问题的数值解不是简单地构造算法,它涉及多方面的理论问题,例如算法的收敛性和稳定性等.除理论分析外,一个数值方法是否有效,最终要通过大量的数值试验来检验.数值计算方法具有理论性、实用性和实践性都很强的特点.

作为介绍数值计算方法的基础知识,本课程不可能面面俱到.除构造算法外,各章根据内容自身的特点,讨论的问题有所侧重.学习时我们要注意掌握方法的基本原理和思想,要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合,要了解算法的优缺点,要重视误差分析、收敛性和稳定性的基本理论.同时,要通过例子来学习使用各种数值方法解决实际计算问题,熟悉数值方法的计算过程.为了掌握数值分析的内容,清楚计算过程中可能发生的问题,还应做一定数量的理论分析与计算练习.

1.2 数值计算的误差

1.2.1 误差的来源

应用数学工具解决实际问题,首先,要对被描述的实际问题进行抽象、简化,得到实际问题的数学模型.数学模型与实际问题之间出现的误差,我们称之为**模型误差**.在数学模型中,通常要包含一些由观测数据确定的参数.数学模型中一些参数观测结果一般不是绝对准确的.我们把观测模型参数值产生的误差称为**观测误差**.

例 1.1 设一根铝棒在温度 t 时的实际长度为 L_t,在 $t=0$ 时的实际长度为 L_0,用 l_t 来表示铝棒在温度为 t 时的长度计算值,建立一个数学模型

$$l_t = L_0(1+at), \quad a \approx 0.000\,023\,8/℃,$$

其中 a 是由实验观测得到的常数,$a \in [0.000\,023\,7, 0.000\,023\,9]$,则称 $L_t - l_t$ 为

模型误差,$a-0.0000238$ 是 a 的观测误差.

在解决实际问题时,数学模型往往很复杂,因而不易获得解析解,这就需要建立一套行之有效的近似方法或数值方法.我们可能用容易计算的问题代替不易计算的问题而产生误差,也可能用有限的过程代替无限的过程而产生误差.我们将模型的准确解与用数值方法求得的准确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**.

例 1.2　对函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

该式右边有无限多项,计算机上无法计算.然而,根据微积分学中的 Taylor 定理,当 $|x|$ 较小时,我们若用前 3 项作为 $\sin x$ 的近似值,则截断误差的绝对值不超过 $\frac{|x|^7}{7!}$.

用计算机做数值计算时,一般也不能获得数值计算公式的准确解,需要对原始数据、中间结果和最终结果取有限位数字.我们将计算过程中取有限位数字进行运算而引起的误差称为**舍入误差**.例如,用 0.333 3 和 0.314 159 分别作为 $\frac{1}{3}$ 和 π 的近似值,则

$$\frac{1}{3} - 0.3333 = 0.000033\cdots,$$

$$\pi - 3.14159 = 0.0000026\cdots$$

就是舍入误差.

在数值分析中,除了研究数学问题的算法外,还要研究计算结果的误差是否满足精度要求,这就是误差估计问题.在数值计算方法中,主要讨论的是截断误差和舍入误差.数值计算中的截断误差要结合具体数值算法进行讨论,将在以后的章节中介绍.至于舍入误差,在实际计算中往往会相互抵消,但用什么方法定量估计仍有很大难度,为此我们着重于误差的定性分析,也就是讨论数值算法的数值稳定性及控制舍入误差的传播.

1.2.2　误差与有效数字

定义 1.1　设 x 是某实数的精确解,x_A 是它的一个近似值,则称 $x-x_A$ 为近似值 x_A 的**绝对误差**,或简称**误差**.若 $x\neq0$,称 $\frac{x-x_A}{x}$ 为 x_A 的**相对误差**.

定义 1.2　设 x 是某实值的精确值,x_A 是它的一个近似值,并可对 x_A 的绝对误差作估计 $|x-x_A|\leqslant\varepsilon_A$,则称 ε_A 是 x_A 的**绝对误差界**,或简称**误差界**.若 $x\neq$

0,称$\frac{\varepsilon_A}{|x|}$是 x_A 的**相对误差界**.

在实际计算中,精确值 x 往往是不知道的,所以通常取$\frac{x-x_A}{x_A}$作为 x_A 的相对误差,取$\frac{\varepsilon_A}{|x_A|}$为 x_A 的相对误差界.

例 1.3　我们知道 $\pi=3.141\ 592\ 6\cdots$,若取近似值 $\pi_A=3.14$,则 $\pi-\pi_A=0.001\ 592\ 6\cdots$,可以估计绝对误差界为 0.002,相对误差界为 0.000 6.

例 1.4　测量一木板长是 954 cm,则因实际问题中所截取的近似数,其绝对误差界一般不超过最小刻度的半个单位,所以当 $x=954$ cm 时,有 $\varepsilon_A=0.5$ cm,其相对误差界为

$$\frac{\varepsilon_A}{|x|}=\frac{0.5}{954}=0.000\ 524\ 1\cdots<0.053\%.$$

定义 1.3　设 x_A 是 x 的一个近似值,将 x_A 写成

$$x_A=\pm 10^k\times 0.a_1a_2\cdots a_i\cdots, \tag{1.1}$$

它可以是有限或无限小数的形式,其中 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $0,1,\cdots,9$ 中的一个数字,$a_1\neq 0$,k 为整数. 如果

$$|x-x_A|\leqslant 0.5\times 10^{k-n},$$

则称 x_A 为 x 的具有 n 位**有效数字**的近似值.

可见,若近似值 x_A 的误差界是某一位的半个单位,该位到 x_A 的第一位非零数字共有 n 位,则 x_A 有 n 位有效数字.

通常在已知 x 的较多位准确数字的情况下,若要取得有限位数的数字作为近似值,就采用四舍五入的原则. 不难验证,采用四舍五入得到的近似值,其绝对误差界可以取为被保留的最后数位上的半个单位. 例如

$$|\pi-3.14|\leqslant 0.5\times 10^{-2},\qquad |\pi-3.142|\leqslant 0.5\times 10^{-3}.$$

按定义,3.14 和 3.142 分别是具有 3 位和 4 位有效数字的近似值.

显然,近似值的有效数字位数越多,相对误差界就越少,反之也对. 下面,我们给出相对误差界与有效数字的关系.

定理 1.1　设 x 的近似值 x_A 有(1.1)式的表达式.

(1) 如果 x_A 有 n 位有效数字,则

$$\frac{|x-x_A|}{|x_A|}\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}. \tag{1.2}$$

(2) 如果

$$\frac{|x-x_A|}{|x_A|}\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{1-n}, \tag{1.3}$$

则 x_A 至少具有 n 位有效数字.

证 由(1.1)式得到

$$a_1 \times 10^{k-1} \leqslant |x_A| \leqslant (a_1+1)\times 10^{k-1}. \tag{1.4}$$

所以,当 x_A 有 n 位有效数字时

$$\frac{|x-x_A|}{|x_A|}\leqslant\frac{0.5\times 10^{k-n}}{a_1\times 10^{k-1}}=\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n},$$

即(1.2)式得证.

由(1.3)式和(1.4)式有

$$|x-x_A|\leqslant(a_1+1)\times 10^{k-1}\times\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{1-n}=0.5\times 10^{k-n},$$

即说明 x_A 有 n 位有效数字,(2)得证.

例 1.5 要使 $\sqrt{20}$的近似值的相对误差界小于 0.1%,应取几位有效数字?

解 由于 $4<\sqrt{20}<5$,因此 $a_1=4$. 设有 n 位有效数字,则由(1.2)式,可令

$$\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}\leqslant 0.1\%,$$

即 $10^{n-4}\geqslant\frac{1}{8}$,得 $n\geqslant 4$,故只要对 $\sqrt{20}$的近似数取 4 位有效数字,其相对误差就可小于 0.1%,因此,可取 $\sqrt{20}\approx 4.472$.

例 1.6 已知近似数 x_A 的相对误差界为 0.3%, 问至少 x_A 有几位有效数字?

解 设 x_A 有 n 位有效数字,由于 x_A 的第一个有效数 a_1 没有具体给定,而我们知道 a_1 一定是 1,2,…,9 中的一个,由于

$$\frac{|x-x_A|}{x_A}\leqslant\frac{3}{1\,000}<\frac{1}{2\times 10^2}=\frac{1}{2(9+1)}\times 10^{-1},$$

故由(1.3)式知 $n=2$,即 x_A 至少有 2 位有效数字.

1.2.3 函数求值的误差估计

对一元函数 $f(x)$,自变量 x 的一个近似值为 x_A,以 $f(x_A)$ 近似 $f(x)$,其误差界记作 $\varepsilon(f(x_A))$. 若 $f(x)$ 具有二阶连续导数,$f'(x_A)$ 与 $f''(x_A)$ 比值不太大,则可忽略 $|x-x_A|$ 的二次项,由 Taylor 展开式得到 $f(x_A)$ 的一个近似误差界

$$\varepsilon(f(x_A))\approx|f'(x_A)|\,|\varepsilon(x_A)|.$$

对 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值分别为 x_{1A}, $x_{2A},\cdots,x_{nA}$,则有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_{1A},x_{2A},\cdots,x_{nA})\approx\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_A(x_k-x_{kA}),$$

其中$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)_A=\dfrac{\partial}{\partial x_k}f(x_{1A},x_{2A},\cdots,x_{nA})$. 因此,可以得到函数值的一个近似误差界

$$\varepsilon(f(x_{1A},x_{2A},\cdots,x_{nA}))\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_A\right||\varepsilon(x_{kA})|.$$

特别地,对$f(x_1,x_2)=x_1\pm x_2$有

$$\varepsilon(x_{1A}\pm x_{2A})=\varepsilon(x_{1A})+\varepsilon(x_{2A}).$$

同样,可以得到

$$\varepsilon(x_{1A}x_{2A})\approx|x_{1A}|\varepsilon(x_{2A})+|x_{2A}|\varepsilon(x_{1A}),$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_{1A}}{x_{2A}}\right)\approx\frac{|x_{1A}|\varepsilon(x_{2A})+|x_{2A}|\varepsilon(x_{1A})}{|x_{2A}|^2},\quad x_{2A}\neq 0.$$

例 1.7 设有长为l,宽为d的某场地. 现测得l的近似值$l_A=120\ \text{m}$,d的近似值$d_A=90\ \text{m}$,并已知它们的误差界为$|l-l_A|\leqslant 0.2\ \text{m}$,$|d-d_A|\leqslant 0.2\ \text{m}$. 试估计该场地面积$S=ld$的误差界和相对误差界.

解 这里$\varepsilon(l_A)=0.2$,$\varepsilon(d_A)=0.2$,并且有

$$\frac{\partial S}{\partial l}=d,\quad \frac{\partial S}{\partial d}=l,\quad S_A=l_Ad_A=10\ 800\ \text{m}^2.$$

于是有误差界

$$\varepsilon(S_A)\approx 120\times 0.2+90\times 0.2=42\ \text{m}^2.$$

相对误差界

$$\varepsilon_r(S_A)=\frac{\varepsilon(S_A)}{l_Ad_A}\approx\frac{42}{10\ 800}=0.39\%.$$

例 1.8 设有 3 个近似数

$$a=2.31,\quad b=1.93,\quad c=2.24,$$

它们都有 3 位有效数字. 试计算$p=a+bc$的误差界和相对误差界,并问p的计算结果能有几位有效数字?

解 $p=2.31+1.93\times 2.24=6.633\ 2$,于是有误差界

$$\begin{aligned}\varepsilon(p)&=\varepsilon(a)+\varepsilon(bc)\approx\varepsilon(a)+|b|\varepsilon(c)+|c|\varepsilon(b)\\&=0.005+0.005(1.93+2.24)=0.025\ 85,\end{aligned}$$

相对误差界

$$\varepsilon_r(p)=\frac{\varepsilon(p)}{|p|}\approx\frac{0.025\ 85}{6.633\ 2}\approx 0.39\%.$$

因为$\varepsilon(p)\approx 0.025\ 85<0.5$,所以$p=6.633\ 2$有 2 位有效数字.

1.2.4 计算机中数的表示

任意一个非零实数用(1.1)式表示,是规格化的十进制科学记数方法. 在计算机中通常采用二进制的数系(或其变形的十六进制等),并且表示成与十进制