全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学物理学

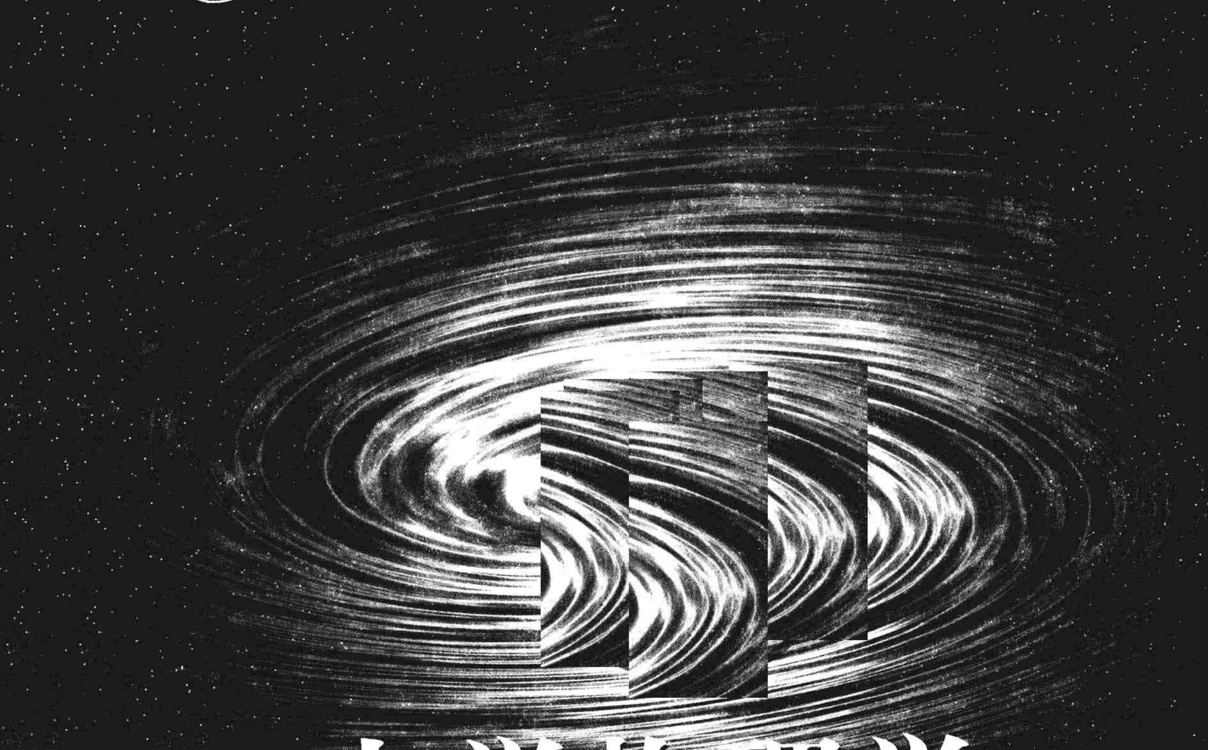
学习指导

廖耀发 主编

陈义万 刘仁臣 鞠剑平 谭敏 副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果



大学物理学

学习指导

Daxue Wulixue Xuexi Zhidao

廖耀发　主编

陈义万　刘仁臣　鞠剑平　谭敏　副主编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书为廖耀发主编的《大学物理学》的配套学习指导书。本书是根据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会制定的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2008年版）的精神，吸收了近年来国内外大学物理教学的研究成果，保持了编者过去所编大学物理学习指导书的特色，本着"注重方法，侧重指导，方便教学，开卷有益"的原则编写而成的。

本书共分为二十五章，其章节顺序与主教材完全一致。每章均包含有"教学要求、知识结构、内容提要、重点难点、方法技巧、习题解答"等内容。本书既可供选用《大学物理学》教材的师生作为教学参考书，也可供自学大学物理的读者使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学学习指导/廖耀发主编.—北京:高等教育出版社,2011.3

ISBN 978-7-04-031860-9

Ⅰ.①大… Ⅱ.①廖… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①04

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第027133号

策划编辑	高 建	**责任编辑**	张海雁	**封面设计**	于文燕
责任绘图	于 博	**版式设计**	余 杨	**责任校对**	姜国萍
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2011年3月第1版
印 张	16.75	印 次	2011年3月第1次印刷
字 数	310 000	定 价	26.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 31860-00

前　言

本书根据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会制定的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2008 年版）的精神，结合鄂、桂、皖等地部分高校的先进教学经验编写而成，力争做到“注意系统思维，突出方法能力，体现简洁实用，争取开卷有益”。

本书以章为单元，每单元均辟有“基本要求、知识结构、内容提要、重点难点、方法技巧、习题选解”等六个栏目。它既可以作为我们所编《大学物理学》（高等教育出版社，2010）的配套教学参考书，也可作为其他非物理类专业大学生学习大学物理的辅导书。

本书与我们过去所编指导书的主要区别在于，特别强调了知识的系统性，以使读者能对每一章的内容都能有全面系统的理解与掌握，便于记忆与应用。其次是特别强调了思维方式与方法，这是初学大学物理学的读者最感困惑的问题，这个问题一解决，做题难的问题便会迎刃而解。

本书由廖耀发任主编，陈义万、刘仁臣、鞠剑平、谭敏任副主编。参加编写的单位及人员有湖北工业大学商贸学院的廖耀发、鞠剑平、熊才高、张哲，湖北工业大学的陈义万、别业广、闵锐、李文军、陈妮、闫旭东，黄山学院的刘仁臣、谢国秋，广西工学院鹿山学院的谭敏、王栋。

由于编者水平所限，书中不妥与错误在所难免，敬请广大读者批评指教，以资修订，不胜感激！

编者

2010 年 7 月

目　　录

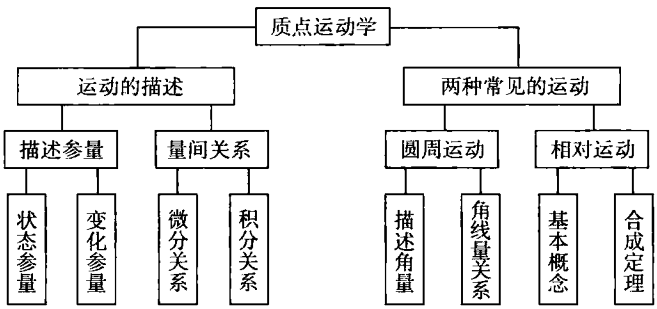
第一章　质点运动学

一、基本要求

1. 掌握位矢（运动学方程）、位移、速度、加速度的概念，能熟练地计算质点作一维、二维运动时的坐标、位矢、速度与加速度.

2. 理解圆周运动、相对运动的概念，能分析、计算一般情况下的圆周运动和相对运动问题.

二、知识结构



三、内容提要

1. 位置矢量

描述质点任意时刻在空间位置的物理量，其定义为从坐标系原点 O 引向质点所在位置点 P 的有向线段$\overrightarrow{OP}$，常用 $\boldsymbol{r}$ 来表示. 它随时间 t 而变化，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，因而又称为运动学方程.

2. 位移

描述质点位置移动大小及方向的物理量，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 或 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示，其定义为起始位置指向终了位置的有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$.

3. 速度

描述质点运动快慢及方向的物理量，用$\boldsymbol{v}$ 表示，其定义为位矢对时间的一阶导数，即$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. 其方向与位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向（由位置起始点指向位置终了点）相同.

速度的大小为速率，用 v 表示，即 $v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$.

4. 加速度

反映质点速度变化快慢及方向的物理量，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，其定义为速度对时间的一阶导数或位矢对时间的二阶导数，即 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

速度大小对时间的一阶导数称为切向加速度，用 $\boldsymbol{a}_t$ 表示，其方向恒在质点运动轨迹的切向上，即 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$.

速度平方与曲率半径之比称为法向加速度，用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示，其方向恒在质点运动轨迹的法线方向上，即 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$，$\boldsymbol{a}_n=a_n\boldsymbol{e}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$.

5. 描述圆周运动的角量

（1）角坐标　描述质点在圆周上运动方位的物理量，其定义为从参考轴原点到质点所在位置处的连线与参考轴的夹角，用 θ 表示. 它随时间而变化，即 $\theta=\theta(t)$.

（2）角位移　描述质点在圆周上移动角度大小的物理量，其定义为质点运动过程中的两个角坐标之差，用 $\Delta\theta$ 表示，即 $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$. 当过程极短（即 $\Delta t\to 0$）时则用 $\mathrm{d}\theta$ 表示.

（3）角速度　描述质点在圆周上运（转）动快慢的物理量. 其定义为单位时间所转过的角度，或角坐标对时间的一阶导数，用 ω 表示，即 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

（4）角加速度　描述质点角速度变化快慢的物理量. 其定义为单位时间所改变的角速度，或角速度对时间的一阶导数，或角坐标对时间的二阶导数，用 α 表示，即 $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

6. 角量与线量的关系

（1）路程与角坐标：$s=R\theta$

（2）路程增量与角位移：$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$

（3）速度与角速度：$v=R\omega$

（4）切向加速度与角加速度：$a_t=R\alpha$

（5）法向加速度与角速度：$a_n=R\omega^2$

7. 相对运动的概念

研究对象（质点）对运动参考系的运动为相对运动，而质点对静止参考系的运动则称为绝对运动，要注意区别.

8. 相对运动的合成定理

（1）位矢合成定理：$\boldsymbol{r}_{绝}=\boldsymbol{r}_{相}+\boldsymbol{r}_{牵}$

（2）速度合成定理：$\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}_{相}+\boldsymbol{v}_{牵}$

（3）加速度合成定理：$\boldsymbol{a}_{绝}=\boldsymbol{a}_{相}+\boldsymbol{a}_{牵}$

四、重点难点

本章的重点是掌握位矢、速度、加速度的概念及其分析计算方法，特别是要着重掌握位矢的概念及其表述．有了位矢 $\boldsymbol{r}$，对它求导一次即得速度$\boldsymbol{v}$，求导二次即得加速度 $\boldsymbol{a}$.

本章的难点有三个：一是对矢量的分析与计算不太熟悉；二是如何用微积分来处理物理问题；三是如何区分相对运动与绝对运动，并会利用合成定理来求解相对运动的问题．对于这些难点，学习时必须引起特别的注意.

五、方法技巧

本章的学习，一是要注意处理好矢量的表述及其运算．特别要注意将文字与图形有机地结合起来，千万不要忽略图形．因为好的图形不仅能给人以形象、直观的认识，而且还可清楚地表示出某些物理量之间的几何关系．若无图形，则会使有些问题（特别是有几何关系的问题）的求解思路受阻，甚至无法求解.

二是必须很好地注意处理数学与物理的关系．一般地说，物理离不开数学，但数学绝不能代替或掩盖物理思维．物理学中的每个概念、每个公式都有明确的物理意义，因此，学习时千万不要仅仅停留在它们的数学表示上，更重要的是要看它们的物理意义（实质）．例如，速度$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，在数学上，它仅仅是一种求导（微商）运算；而在物理上，它却代表着描述质点运动状态的位矢变化的快慢，只有从本质上认清了物理知识的内涵，才能将大学物理真正学会、学懂.

本章习题侧重在对描述质点运动的三个物理量 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 的计算，因此根据题意，分析判定问题的属性非常重要：对于第一类问题，用求导法解答；对于第二类问题则用积分法，这时要注意分离变量，并注意初始条件.

对于相对运动问题，其关键是要根据题意作出简图，简图一出，问题的一大半就已解决.

例 1-1　已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动学方程为 $x=2+6t^2-2t^3$（m），求：

（1）质点在运动开始后 4.0 s 内位移的大小；

（2）质点在该时间内所通过的路程.

解　位移和路程是两个完全不同的概念，只有当质点作单向直线运动时，位移大小才和路程相等. 本题为一变方向运动，其位移与路程大小不相等，须按各自的定义来小心求解.

（1）据定义，质点在4.0 s内位移的大小为

$$\Delta x = x_4 - x_0 = (2+6\times4^2-2\times4^3-2)\ \mathrm{m} = -32\ \mathrm{m}$$

（2）由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-6t^2=0$可知，质点在$t=2$ s（$t=0$不合题意）时将发生变向运动. 在0～2 s中所通过的路程为

$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = (2+6\times2^2-2\times2^3-2)\ \mathrm{m} = 8.0\ \mathrm{m}$$

在2～4 s内所通过的路程

$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = [2+6\times4^2-2\times4^3-(2+6\times2^2-2\times2^3)]\ \mathrm{m} = -40\ \mathrm{m}$$

所以，质点在4.0 s时间间隔内的路程为

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48\ \mathrm{m}$$

例1-2　已知质点的运动学方程

$$\boldsymbol{r} = R(\cos kt^2\boldsymbol{i} + \sin kt^2\boldsymbol{j})$$

式中，R、k均为常量. 求质点运动的速度及加速度.

解　本题知位矢求速度、加速度，属运动学中的第一类问题，应先对位矢求导数（得速度），再对速度求导数（得加速度）.

据定义，质点运动的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2ktR(-\sin kt^2\boldsymbol{i} + \cos kt^2\boldsymbol{j})$$

加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= 2kR(-\sin kt^2\boldsymbol{i}+\cos kt^2\boldsymbol{j}) - 4k^2t^2R(\cos kt^2\boldsymbol{i}+\sin kt^2\boldsymbol{j}) \\ &= -2kR(2kt^2\cos kt^2+\sin kt^2)\boldsymbol{i} + 2kR(\cos kt^2-2kt^2\sin kt^2)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

例1-3　某质点沿x轴运动，其加速度的大小$a=-4x$（$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）. 设质点位于$x=0$处时的速率$v_0=6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点速度的大小与位置坐标的关系式.

解　本题知加速度求速度及位置坐标，属于运动学中的第二类问题，应用积分方法来解决. 由加速度的定义式可得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -4x$$

对上式分离变量后积分，得

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_0^x -4x\mathrm{d}x$$

解之得

$$v^2=v_0^2-4x^2$$

即
$$v=\sqrt{v_0^2-4x^2}=\sqrt{36-4x^2}=2\sqrt{9-x^2}\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

（由于不能对负数开平方，因此质点只能在 $-3\ \mathrm{m}\leqslant x\leqslant 3\ \mathrm{m}$ 的范围内运动.）

例 1-4　一质点沿半径为 R 的圆周运动，其运动学方程为

$$s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$$

式中，v_0 和 b 均为大于零的常量. 求 t 时刻质点切向加速度及法向加速度.

解　求解切向及法向加速度的关键是先求出速率，然后再进行数学处理. 将题给方程求导，得质点作圆周运动的速率：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

将 v 对时间求导，得质点的切向加速度的大小：

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

将 v 平方再除以 R，即得质点的法向加速度的大小：

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

六、习题选解

1-1　一质点作平面运动，其位矢为 $\boldsymbol{r}(x,\ y)$，则其速度大小为（　　）.

A. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　B. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　　C. $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$　　D. $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

解　由题给条件知，质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

其大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

故选 D.

1-2　下列涉及加速度概念的说法中正确的是（　　）.

A. 一切圆周运动的加速度均指向圆心

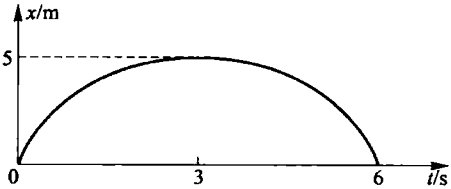
B. 匀速圆周运动的加速度为常量

C. 作直线运动的物体一定没有法向加速度

D. 只有法向加速度的物体一定作圆周运动

解　由于直线的曲率半径 $R=\infty$，因此其法向加速度的大小 $a_n=\frac{v^2}{R}\to 0$，即没有法向加速度，故选 C.

1-3　一质点作直线运动，其坐标与时间的关系如图所示，则该质点在第________秒时，其速度为零；在第________秒至第________区间，其速度与加速度同方向.



解 1-3 图

解　从 $x-t$ 图上可以看出，在 $t=3$ s 处，其速度$\frac{dx}{dt}$为零；在 3 ~ 6 s 区间，$dx<0$，$dv<0$，对应的速度及加速度均为负，即同方向. 故第一空填“3”，第二、第三空分别填“3”及“6”.

1-4　一质点沿 x 轴运动，其加速度的大小 $a=3+2t$（$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）. 如果初始时刻 $v_0=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$t=3$ s 时，则质点的速度大小为________.

解　由加速度定义式 $a=\frac{dv}{dt}$得

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t a\,dt$$

即

$$v-v_0=\int_0^3(3+2t)\,dt=3t\Big|_0^3+\frac{1}{2}\cdot 2t^2\Big|_0^3=18\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

故速度的大小为 $v=(18+5)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=23\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1-5　质点运动学方程为 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+0.5t^2\boldsymbol{j}$（m）. 当 $t=1$ s 时，此质点的切向加速度大小为________.

解　求切向加速度的关键在于求解速度大小. 据速度定义式得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}$$

速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{1+t^2}$$

切向加速度为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d(\sqrt{1+t^2})}{dt}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Bigg|_{t=1}=0.707\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

故空填“0.707 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$”.

1-6 说明下列符号的物理意义.

A. $|\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t|$ B. $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ C. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ D. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{e}_t)$

解 A. $|\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t|$——平均速度的绝对值；

B. $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$——平均速度；

C. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$——即时加速度；

D. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{e}_t)$——切向加速度.

1-7 一质点的运动学方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$. 在计算该点的速度和加速度时，下述两种算法中，你认为哪一种正确？为什么？

(1) 先算 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，后据下式求结果：

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\qquad a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$$

(2) 先算速度和加速度的投影：$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$；$a_x=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$；后据下式求结果：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2},\qquad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

解 (1) 之结果无定义，故不成立.

(2) 之结果正是速度投影（标量表达）式的一种表示，有物理意义，故知 (2) 是正确的.

1-8 某质点的运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

式中，R、ω 均为常量，求质点的速度及加速度.

解 本题知道位矢求速度及加速度，属运动学中的第一类基本问题，宜用求导法来解.

据定义，质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

1-9 一质点沿 y 轴作直线运动，其运动学方程为 $y=4.5t^2-2t^3$（m），求：

(1) 1 ~2 s 期间的平均速度；

(2) 1 s 及 2 s 末的速度与加速度.

解 (1) 由平均速度的定义式 $\bar{v}=\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$，得 1～2 s 期间的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(2)-y(1)}{2-1}=\frac{[4.5\times2^2-2\times2^3]-[4.5\times1^2-2\times1^3]}{1}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$=-0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 据定义

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4.5t^2-2t^3)=9t-6t^2$$

故

$$v(1)=(9\times1-6\times1^2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$v(2)=(9\times2-6\times4)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=-6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由加速度的定义式得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9-12t$$

故

$$a(1)=(9-12\times1)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=-3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$
$$a(2)=(9-12\times2)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=-15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-10 一质点在 x-y 平面内运动，其运动学方程为 $x=2t$，$y=19-2t^2$. 求：

(1) 质点的轨迹方程；

(2) 2 s 末的位矢.

解 (1) 由 $x=2t$，$y=19-2t^2$，消去参数 t 得轨迹方程：

$$y=19-\frac{1}{2}x^2$$

(2) 由位矢的概念知

$$\boldsymbol{r}(2)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}\Big|_{t=2}$$
$$=(4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j})\,\mathrm{m}$$

1-11 一质点的运动学方程为 $x=2t$，$y=(19-2t^2)$.

(1) 求质点的速度和加速度；

(2) t 为何值时质点的位矢恰好与速度垂直?

解 (1) 由题给条件知，质点的运动学方程的矢量形式为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$$

故

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 欲使 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$ (即 $\theta=\pi/2$)，则必有 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=rv\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，即

$$[2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot[2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}]=0$$

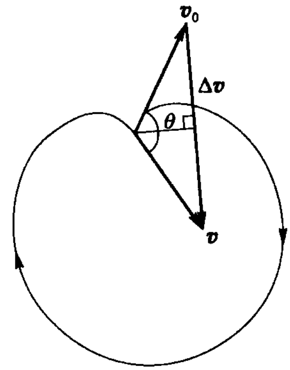
解之得

$$t=3\ \mathrm{s}$$

1-12 如图所示，一质点从某时刻开始以初速度$\boldsymbol{v}_0$沿曲线运动，经过 Δt 时间后又回到了出发点，其末速度为$\boldsymbol{v}$．已知$\boldsymbol{v}_0$与$\boldsymbol{v}$大小相等，夹角为 θ.

（1）求 Δt 时间内的平均速度；

（2）在图上画出 Δt 时间内的速度增量.



解 1-12 图

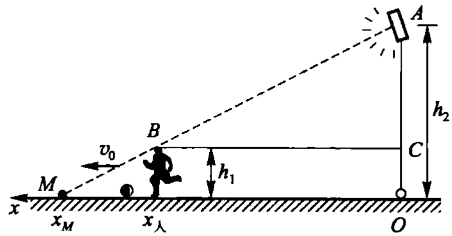
解 （1）由题意知 $\Delta\boldsymbol{r}=0$，故平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=0$$

（2）Δt 时间内速度的增量如图所示，其大小为

$$|\Delta\boldsymbol{v}|=2v_0\sin\frac{\theta}{2}$$

1-13 如图所示，一高为 h_1 的足球运动员，背向某照明灯以匀速度 v_0 带球，灯离地面的高度为 h_2，求人影顶端 M 点沿地面移动的速度及影长增长的速率.



解 1-13 图

解 本题关键是找到影端坐标和影长表达式．作辅助图如图所示．图中x_M、$x_人$分别为影端和人的坐标．因$\triangle AMO \backsim \triangle ABC$，所以得

$$\frac{x_M}{x_人}=\frac{h_2}{h_2-h_1}$$

解之，得 M 点的坐标：

$$x_M=\frac{h_2 x_人}{h_2-h_1}$$

M 点的速度大小为

$$v_M=\frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t}=\frac{h_2}{h_2-h_1}\frac{\mathrm{d}x_人}{\mathrm{d}t}=\frac{h_2}{h_2-h_1}v_0$$

速度的方向沿人前进方向.

由图可见影长

$$L=x_M-x_人=\frac{h_2}{h_2-h_1}x_人-x_人=\frac{h_1}{h_2-h_1}x_人$$

将上式两边对时间求导，得影长增长的速率：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{h_1}{h_2-h_1}\frac{\mathrm{d}x_人}{\mathrm{d}t}=\frac{h_1}{h_2-h_1}v_0$$

1-14　某质点沿 x 轴作变速直线运动，其加速度 $a=a_0+bt$（a_0 及 b 为常量）. 设 $t=0$ 时的速度为 v_0. 求 t 时刻质点的速度.

解　本题知加速度求速度，属于第二类基本问题，需用积分来求解.

由题给条件 $a=a_0+bt=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 分离变量积分、得

$$\int_0^t(a_0+bt)\mathrm{d}t=\int_{v_0}^v\mathrm{d}v$$

解之，得 t 时刻质点的速度：

$$v=a_0t+\frac{1}{2}bt^2+v_0$$

1-15　某船停机后的速率按 $v=12\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$ 的规律衰减. 求该船停机后所能滑行的最大距离.

解　本题知速率（一维运动）求距离（坐标），仍属第二类基本问题，可用积分法求解.

由已知条件 $v=12\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 分离变量积分，得

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t12\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\mathrm{d}t$$

解之，得

$$x=48(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}})$$

当 $t\to\infty$ 时，得船所滑行的距离：

$$x=x_{\max}=48\ \mathrm{m}$$

此即船所能滑行的最大距离.

1-16　一质点作圆周运动，其运动学方程为

$$\theta=\theta_0+\frac{1}{2}t^2$$

求 $t=2$ s 时质点的角速度及角加速度.

解　据定义，质点的角速度为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=t$$

角加速度为

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=1\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

当 $t=2$ s 时，质点的角速度为

$$\omega(2)=2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

角加速度为

$$\alpha(2)=1\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

1-17　已知质点的运动学方程为 $\boldsymbol{r}=R\cos kt^2\boldsymbol{i}+R\sin kt^2\boldsymbol{j}$. 式中，$R$、$k$ 均为常量，求质点的切向加速度及法向加速度.

解　求解切向、法向加速度的关键是设法求出速率然后进行数学处理.

由题给条件知，质点运动的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2ktR(-\sin kt^2\boldsymbol{i}+\cos kt^2\boldsymbol{j})$$

其速率为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2ktR(\sin^2kt^2+\cos^2kt^2)=2ktR$$

故质点的切向加速度大小为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=2kR$$

法向加速度大小为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=4k^2Rt^2$$

1-18　一质点沿半径为 0.1 m 的圆周运动，所转过的角度 $\theta=a+bt^3$（式中，$a=2$ rad，$b=4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-3}$）. 求：

（1）$t=2$ s 时，质点的切向及法向加速度；

（2）t 为何值时，质点的切向及法向加速度的大小相等.

解　（1）由已知条件：$\theta=a+bt^3=2+4t^3$，$R=0.1$ m，可解得质点的角速度为

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$$

角加速度为

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

故 $t=2$ s 时质点的切向加速度为

$$a_t(2)=R\alpha=(0.1\times24\times2)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=4.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

质点的法向加速度为

$$a_n(2)=R\omega^2=[0.1\times(12\times2)^2]\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=230.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

（2）由题意 $a_t=a_n$ 可得

$$R(24t)=R(12t^2)^2$$

解之得

$$t=0\ （舍去）\ 及\ t=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\ \mathrm{s}=0.55\ \mathrm{s}$$

1-19 将任意多个质点从某一点以同样大小的速度 $|\boldsymbol{v}_0|$，在同一竖直面内沿不同方向同时抛出，证明任一时刻这些质点分散在同一圆周上（即证明其轨迹方程具有 $x^2+y^2=R^2$ 的形式）.

证 如图所示，设在竖直面 Oxy 内，从原点 O 以初速度 $\boldsymbol{v}_0$（与 x 轴成任意角 α）将质点抛出，则任一时刻该质点的位置坐标为

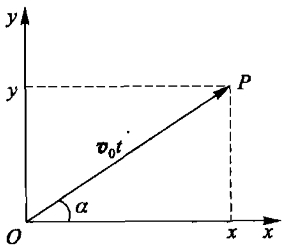
$$x=(v_0\cos\alpha)t \tag{1}$$

$$y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

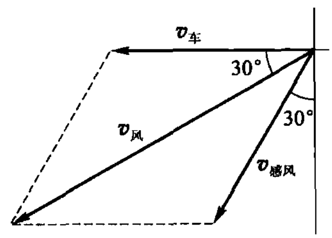
联立（1）、（2）式求解，得

$$x^2+\left(y+\frac{1}{2}gt^2\right)^2=(v_0t)^2$$

这是一个圆的轨迹方程，圆心为$\left(0,\ -\frac{1}{2}gt^2\right)$，半径为 $|v_0t|$.



解 1-19 图



解 1-20 图

1-20 某人以速度 v 骑自行车西行，觉得有风从北偏东 30°方向吹来，其速度大小与车速相同，问风速方向如何？

解 本题涉及地、车两个参考系，属相对运动问题. 选风为研究对象，则风速 $v_风$（风对地的速度）为绝对速度，车速 $v_车$（车对地的速度）为牵连速度，感觉到的风速（风对车的速度）为相对速度. 根据速度合成定理有

$$\boldsymbol{v}_{风}=\boldsymbol{v}_{车}+\boldsymbol{v}_{感风}$$

其速度矢量图如图所示. 从图中可以看出，风速方向与车行方向成 30°角，即风速方向为东偏北 30°.

1-21 一船欲在 10 min 内垂直横渡一宽为 900 m，流速为 $2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的河流，问船应以什么样的速度航行才能达此目的地？