

普通高等教育“十三五”规划教材·土木工程类系列教材

结构力学 (下册)

Structural Mechanics II

潘旦光 编著

PAN Danguang



清华大学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材·土木工程类系列教材

结构力学 (下册)

Structural Mechanics II

潘旦光 编著

PAN Danguang



清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书按照《高等学校土木工程本科指导性专业规范》编写,分上、下两册,共分12章,除绪论外主要内容包括平面体系的几何构造分析、静定结构受力分析、虚功原理与结构的位移计算、力法、位移法、力矩分配法、矩阵位移法、影响线、结构动力学、结构的稳定计算和结构的极限荷载。

本书理论系统、例题全面且通俗易懂,可作为本科土木、桥梁、水利等专业的结构力学教材,也可供上述专业的工程技术人员参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册/潘旦光编著.--北京:清华大学出版社,2016

普通高等教育“十三五”规划教材.土木工程类系列教材

ISBN 978-7-302-42693-6

I. ①结… II. ①潘… III. ①结构力学—高等学校—教材 IV. ①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第020167号

责任编辑:秦娜

封面设计:常雪影

责任校对:赵丽敏

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15.75 字 数:382千字

版 次:2016年4月第1版 印 次:2016年4月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:36.00元

产品编号:057341-01

本书根据《高等学校土木工程本科指导性专业规范》编写,分上、下两册出版。上册包括绪论、平面体系的几何构造分析、静定结构受力分析、虚功原理与结构的位移计算、力法、位移法和力矩分配法;下册包括矩阵位移法、影响线、结构动力学、结构的稳定计算、结构的极限荷载。书中加“*”部分为进一步加深和拓宽性质的内容,可供不同专业的需要和不同层次学生选用。

结构力学是土木工程专业一门重要的专业基础课。很多学生常觉得似乎理解了结构力学基本原理,但难以运用原理解决问题,因此,本书以“独立思考,学以致用”为编写目标。为达到这一目标,本书具有以下一些特点:一、注重理论的系统性和时代性。书中内容覆盖了规范要求的全部内容,同时补充了近年来新型工程结构的力学计算原理。二、例题的自明性。对分析方法进行总结,强调关键的解题步骤,便于学生有章可循。同时,例题的编写尽量通俗易懂、图文配合,并详细说明关键步骤的注意点,并以讨论的形式引导学生独立思考。三、例题的全面性。将典型例题进行分类,总结应用基本原理解决不同结构类型的突破口,既使学生从不同角度理解和运用原理分析问题和解决问题,又便于学生自学。

在教材的编写过程中,参考和引用了国内外优秀的文献和教材。研究生于鑫和郭馨远整理了课后习题的答案。在此,编者对他们的工作表示感谢。

限于编者水平,书中难免有错误和不足之处,敬请广大专家、读者批评指正。

作者

2015年12月

第 8 章 矩阵位移法	1
8.1 概述	1
8.1.1 矩阵位移法的基本步骤	1
8.1.2 坐标系及符号规定	3
8.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵	4
8.2.1 局部坐标系下的梁单元	4
8.2.2 连续梁单元	6
8.2.3 局部坐标系下的杆单元	7
8.3 整体坐标系下的单元刚度矩阵	8
8.3.1 坐标变换	8
8.3.2 整体坐标系下的梁单元	10
8.3.3 整体坐标系下的杆单元	12
8.4 结构原始刚度矩阵	12
8.4.1 结点和单元编号	13
8.4.2 对号入座法建立原始刚度矩阵	13
8.5 边界条件处理	19
8.5.1 边界条件的常用处理方法	19
8.5.2 各杆的杆端力	21
8.6 等效结点荷载	22
8.7 铰结点的处理	26
8.8 矩阵位移法计算步骤和算例	31
8.8.1 平面刚架分析	32
8.8.2 连续梁分析	37
8.8.3 平面桁架分析	40
8.9 小结	43
习题	44
第 9 章 影响线	46
9.1 移动荷载与影响线的概念	46
9.2 静力法作单跨静定梁的影响线	47
9.2.1 静力法作影响线的基本步骤	47
9.2.2 简支梁的影响线	47

9.3	静力法作静定结构的影响线	53
9.3.1	间接荷载作用下梁的影响线	53
9.3.2	静定桁架的影响线	54
9.4	机动法作静定梁的影响线	57
9.5	影响线的应用	61
9.5.1	求荷载作用下的影响	61
9.5.2	最不利荷载位置	63
*9.5.3	简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩	67
9.6	连续梁的影响线	70
9.6.1	静力法	70
9.6.2	机动法	71
9.6.3	任意截面的弯矩和剪力影响线	74
9.6.4	支座反力影响线	75
9.7	连续梁的最不利荷载分布及内力包络图	75
9.7.1	均布活载最不利位置的确定	75
9.7.2	连续梁的内力包络图	76
9.8	小结	78
	习题	78
第 10 章	结构动力学	82
10.1	概述	82
10.1.1	结构动力学的特点	82
10.1.2	动力荷载的分类	82
10.1.3	动力自由度	83
10.1.4	静力和动力反应的联合	85
10.2	单自由度体系运动方程的建立	86
10.2.1	刚度法	86
10.2.2	柔度法	91
10.2.3	重力的影响	94
10.2.4	并联弹簧和串联弹簧	95
10.2.5	广义单自由度体系	96
10.3	单自由度体系的自由振动	96
10.3.1	无阻尼自由振动	96
10.3.2	有阻尼自由振动	99
10.4	单自由度体系的强迫振动	102
10.4.1	简谐荷载	103
10.4.2	瞬时冲击荷载	112
10.4.3	任意荷载	113
10.5	多自由度体系的自由振动	115

10.5.1	刚度法	115
10.5.2	柔度法	124
10.5.3	对称性的利用	128
10.6	主振型的正交性	129
10.6.1	正交关系	129
10.6.2	正交关系的物理意义	131
10.6.3	振型归一化	132
10.6.4	展开定理	132
10.7	无阻尼多自由度体系的谐振反应	133
10.7.1	刚度法	133
10.7.2	柔度法	133
10.8	振型叠加法	138
10.8.1	无阻尼体系	138
10.8.2	有阻尼体系	142
10.8.3	Rayleigh 阻尼	143
*10.8.4	等效静荷载	144
10.9	无限自由度体系	147
10.9.1	自由振动	147
*10.9.2	振型正交性	152
*10.9.3	振型叠加法	153
10.10	频率和振型的近似算法	154
10.10.1	Rayleigh 法	155
*10.10.2	Rayleigh-Ritz 法	158
10.11	小结	161
	习题	162

第 11 章 结构的稳定性计算 169

11.1	结构稳定性概述	169
11.1.1	结构稳定分析的几个概念	169
11.1.2	稳定性分类	170
11.1.3	结构稳定性计算的特点	174
11.1.4	稳定自由度	174
11.2	静力法确定临界荷载	175
11.2.1	有限自由度体系	175
11.2.2	无限自由度体系	180
11.3	能量法	189
11.3.1	势能驻值原理	189
11.3.2	有限自由度体系	190
11.3.3	无限自由度体系	192

11.4	剪力对临界荷载的影响	198
11.5	组合压杆的稳定	199
11.5.1	缀条式组合压杆	200
11.5.2	缀板式组合压杆	201
11.6	小结	203
	习题	203
第 12 章	结构的极限荷载	206
12.1	概述	206
12.2	结构极限荷载的几个概念	207
12.2.1	极限弯矩	207
12.2.2	矩形截面的弯矩-曲率关系	208
12.2.3	塑性铰	210
12.2.4	破坏机构和极限荷载	210
12.3	比例加载时判定极限荷载的一般定理	211
12.3.1	极限荷载的几个定理	211
12.3.2	静力法	212
12.3.3	机动法	212
12.4	梁的极限荷载	213
12.4.1	静定梁的极限荷载	213
12.4.2	超静定梁的极限荷载	215
12.4.3	连续梁的极限荷载	219
12.5	刚架的极限荷载	220
12.5.1	静力法	220
12.5.2	机动法	222
12.6	小结	226
	习题	227
	部分习题答案	230
	索引	241
	参考文献	243

本章要点：主要包括单元分析、整体分析、等效结点荷载的计算和后处理法中边界条件处理的常用方法。重点是理解一般单元的单元刚度矩阵的建立、坐标变换以及采用对号入座法建立整体刚度矩阵。

8.1 概述

《结构力学》(上册)介绍的力法和位移法是经典结构力学的内容。经典结构力学主要采用“手算”计算手段,因此只能计算一些简单的、未知量少的结构力学问题。结构矩阵分析与经典结构力学在原理上并无区别,仅在结构分析中运用矩阵格式。矩阵运算使计算公式紧凑,计算形式规格化,计算步骤标准化,适宜于编制通用程序用计算机进行“电算”,完成大型复杂结构的力学分析问题。

与力法和位移法相对应,结构矩阵分析中也存在矩阵力法和矩阵位移法。矩阵力法的基本结构可以有多种方案,这给通用程序的编制带来一定的困难;而矩阵位移法的基本结构通常是唯一的,计算比较规则,易于实现程序化。矩阵位移法可以认为是限单元法在杆系结构中的应用,也称为杆系有限单元法。

矩阵位移法的基本思路是(1)结构离散化,将结构分解为若干个单元;(2)进行单元分析,建立单元刚度方程;(3)以结点位移为基本未知量,根据变形协调条件将各单元综合成整体,根据平衡条件建立结构的总刚度方程;(4)由结构的总刚度方程求出结点位移,从而求出杆端内力。可见矩阵位移法是在一分一合的过程中,将复杂结构的求解问题转化为简单单元的分析 and 集合。

单元可根据力学性质进行分类。对杆系结构而言,主要可分为刚架中直杆单元和桁架中直杆单元。在有限元中,将刚架中的直杆单元称为梁单元,桁架中的直杆单元称为杆单元。梁单元的结点位移包括线位移和角位移,可以承受轴力、剪力和弯矩。杆单元的结点位移只有线位移,只能承受轴力。

8.1.1 矩阵位移法的基本步骤

1. 结构离散化

离散化是假想将结构分解为有限个单元,用这些单元的集合体代替真实结构。离散化

之后单元的数目不是无限的,所以叫做有限单元体系。离散化后的计算简图称为有限元模型。对于杆系结构而言,一根直杆通常可看做一个单元,有时可看做几个单元。单元与单元相连接的点称为结点。杆件的转折点、汇交点、支承点、截面突变点均是结点,有时集中荷载作用点也作为结点。

结构离散化时,划分单元的大小和数目应根据计算精度的要求和计算机的容量来确定。划分单元时,应考虑以下因素。

- (1) 离散体系的外形应尽量和实际结构一致。
- (2) 内力大、位移大的部位,单元要分得小一些;反之,可以分得大些。
- (3) 每个单元由一种材料构成,单元内截面大小不变。
- (4) 不能将结构离散化为一个几何可变体系。

如图 8.1(a)所示,简支梁划分为 1 个梁单元、2 个结点,而图 8.1(b)中则将简支梁划分为 4 个梁单元、5 个结点。可见,同一个结构可采用不同的离散方法,具体采用什么离散方法由计算问题的需要决定。



图 8.1

图 8.2(a)为变截面无铰拱,为了实现利用等截面直杆单元近似计算变截面杆件的目的,在进行有限元划分时,用一系列短的直杆代替曲杆,以阶梯状变截面杆代替连续变截面杆。这样处理后就可以得到图 8.2(b)所示的有限元模型。显然,这样处理的计算结果是近似的,计算精度取决于划分单元的多少。

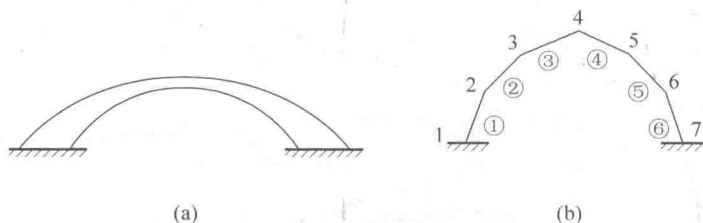


图 8.2

图 8.3 所示平面桁架可划分为 7 个杆单元、5 个结点。注意,一根桁架杆件不能离散为两个杆单元,否则桁架将成为瞬变体系。

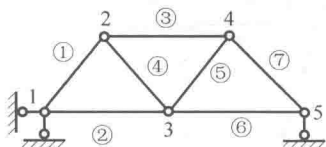


图 8.3

2. 单元分析

单元分析就是建立结点位移和结点力之间关系的单元刚度矩阵。对于杆系结构,单元为等截面直杆,此时单元刚度矩阵反映的是杆端位移和杆端力之间的关系。

此外,矩阵位移法分析的荷载必须作用在结点上。当荷载作用在单元中间时,可采用静力等效方法将单元中间的荷载转化为等效结点荷载。

对每一个单元进行上述分析,得到单元刚度矩阵和结点荷载向量。

3. 整体分析

整体分析就是将各个单元组成结构进行分析,从而建立整体结点位移和结点力之间的关系,即建立整体刚度方程。

8.1.2 坐标系及符号规定

为了便于形成通用的计算程序,在进行单元分析和整体分析时,通常采用局部坐标系(或称为单元坐标系)和整体坐标系。这里采用右手坐标系,以直杆单元 ij 的 i 端为坐标原点,以从 i 向 j 的方向为 $\bar{x}$ 轴的正方向,以 $\bar{x}$ 轴的正向逆时针转 90° 为 $\bar{y}$ 轴的正方向,这样就形成与单元完全结合在一起的坐标轴,称为局部坐标系。 i 和 j 分别称为始端和末端。图 8.4 和图 8.5 分别为杆单元和梁单元的局部坐标系。图上所示的结点力和结点位移均为正方向,即线位移和力沿坐标轴的正方向时为正,转角和弯矩以逆时针为正。负值则表示实际方向与图示方向相反。当用局部坐标系时,杆端力和位移上均加一横线。图 8.4 表示杆单元中第②个单元,其两端的结点编号分别为 i 和 j ,它在局部坐标系中的杆端位移向量和杆端力向量分别为

$$\bar{\mathbf{U}}^e = (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j)^{eT} \quad (8.1)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^e = (\bar{F}_{Ni} \quad \bar{F}_{Qi} \quad \bar{F}_{Nj} \quad \bar{F}_{Qj})^{eT} \quad (8.2)$$



图 8.4

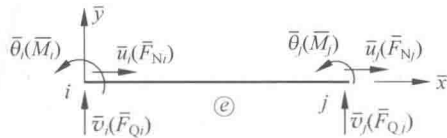


图 8.5

图 8.5 表示梁单元中第②个单元,其两端的结点编号分别为 i 和 j ,它在局部坐标系中的梁端位移向量和梁端力向量分别为

$$\bar{\mathbf{U}}^e = (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j)^{eT} \quad (8.3)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^e = (\bar{F}_{Ni} \quad \bar{F}_{Qi} \quad \bar{M}_i \quad \bar{F}_{Nj} \quad \bar{F}_{Qj} \quad \bar{M}_j)^{eT} \quad (8.4)$$

图 8.6 中第②个杆单元在图示整体坐标系 xOy 中杆端位移 $\mathbf{U}^e$ 和杆端力 $\mathbf{F}^e$ 的向量分别为

$$\mathbf{U}^e = (u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j)^{eT} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{F}^e = (F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{xj} \quad F_{yj})^{eT} \quad (8.6)$$

图 8.7 中第②个梁单元在图示整体坐标系 xOy 中梁端位移 $\mathbf{U}^e$ 和梁端力 $\mathbf{F}^e$ 的向量分别为

$$\mathbf{U}^e = (u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j)^{eT} \quad (8.7)$$

$$\mathbf{F}^e = (F_{xi} \quad F_{yi} \quad M_i \quad F_{xj} \quad F_{yj} \quad M_j)^{eT} \quad (8.8)$$

结点位移和结点力向量中的各分量都与坐标系直接相关,采用不同坐标系时,同一向量中同一位置的分量值可能是不相同的,因此,必须注意是采用局部坐标系还是整体坐标系。

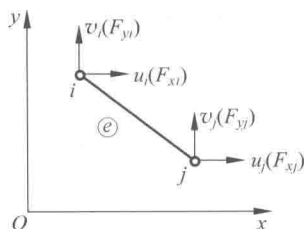


图 8.6

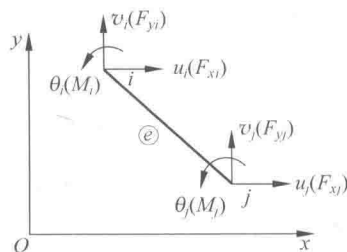


图 8.7

8.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵

8.2.1 局部坐标系下的梁单元

图 8.8 为没有任何约束的梁单元,称为一般单元或自由单元。设 6 个杆端位移已知,且杆上不受外荷载作用,要确定 6 个杆端力的大小,即建立单元杆端位移和杆端力之间的关系。这可采用位移法中基本体系的做法,在单元两端加上人为控制的附加约束,使梁单元在两端产生 6 个指定位移,然后根据这 6 个杆端位移来推导相应的 6 个杆端力。计算时忽略轴向受力状态和弯曲受力状态之间的相互影响,分别推导轴向变形和弯曲变形的刚度矩阵。

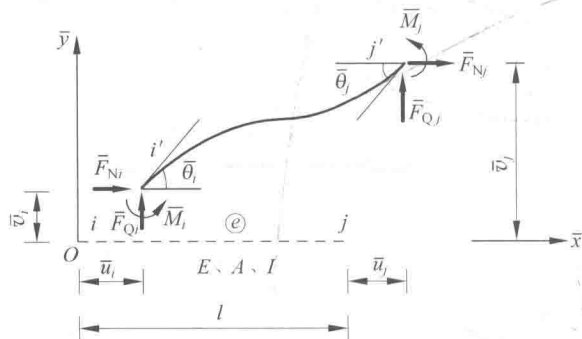


图 8.8

首先,由杆端轴向位移 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{u}_j$, 可得杆端的轴力 $\bar{F}_{Ni}$ 、 $\bar{F}_{Nj}$ 为

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Ni} &= -\frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i) \\ \bar{F}_{Nj} &= \frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

其次,由杆端横向位移 $\bar{v}_i$ 、 $\bar{v}_j$ 和转角 $\bar{\theta}_i$ 、 $\bar{\theta}_j$ 可得杆端弯矩和杆端剪力为

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Qi} &= \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_i - \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_j \\ \bar{M}_i &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_i - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_j \\ \bar{F}_{Qj} &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_i + \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_j \\ \bar{M}_j &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_i - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_j \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

将式(8.9)和式(8.10)合在一起,写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Qi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{Nj} \\ \bar{F}_{Qj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}^e \quad (8.11)$$

它可简写为

$$\bar{F}^e = \bar{k}^e \bar{U}^e \quad (8.12)$$

式(8.11)和式(8.12)称为局部坐标系下的单元刚度方程。其中,

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (8.13)$$

$\bar{k}^e$ 为局部坐标系下的单元刚度矩阵,简称单刚。它的行数等于杆端力列向量的维数,而列数等于杆端位移列向量的维数。由于杆端力和杆端位移的维数总是相等的,因此, $\bar{k}^e$ 是方阵。注意,这里的杆端位移和杆端力向量的各分量是按照式(8.3)和式(8.4)排列的。如果改变向量的排列顺序,矩阵 $\bar{k}^e$ 中的各元素也要发生相应的改变。单元刚度矩阵具有以下性质。

(1) 它只与杆件本身性质有关而与外荷载无关。

(2) 单元刚度系数具有明确的物理意义。 $\bar{k}^e$ 中的每个元素称为单元刚度系数。代表由单位杆端位移所引起的杆端力。 $\bar{k}_{lm}^e$ 为 $\bar{k}^e$ 中第 l 行、第 m 列的元素,它表示第 m 个杆端位移分量等于 1 (其余杆端位移分量均为零) 时,引起的第 l 个杆端力。如: $\bar{k}_{63}^e = \frac{2EI}{l}$ 表示第 3 个杆端位移分量 $\bar{\theta}_i = 1$ 时引起的第 6 个杆端力 $\bar{M}_j$ (j 端的弯矩)。以此类推, $\bar{k}^e$ 中某一列的 6 个元素分别表示当某个杆端位移分量等于 1 时所引起的 6 个杆端力分量。为帮助理解,式(8.13)中 $\bar{k}^e$ 每一列的上方都标明了对应的单位位移分量。例如第 2 列对应于 $\bar{v}_i = 1$

所引起的杆端力。

(3) 单元刚度矩阵是对称的, 即 $\bar{k}^e$ 中 $\bar{k}_{lm}^e = \bar{k}_{ml}^e$, 这是反力互等定理的必然结果。

(4) 一般单元的刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 具有奇异性, 即 $\bar{k}^e$ 的行列式 $|\bar{k}^e| = 0$, 它不存在逆矩阵。因此, 若已知单元杆端位移 $\bar{U}^e$, 由式 (8.11) 可求单元杆端力 $\bar{F}^e$ 。但对于给定杆端力 $\bar{F}^e$, 式 (8.11) 不能求得唯一确定的位移。从物理概念上来说, 这是由于所讨论的单元是一个自由单元, 两端没有任何支承约束, 此时杆件除了由杆端力引起的轴向变形和弯曲变形外, 还可以有任意的刚体位移, 因此, 给定 $\bar{F}^e$ 无法求解 $\bar{U}^e$, 除非增加足够的约束条件。从数学角度看, 式 (8.13) 所示矩阵具有线性相关性, 则 $\bar{k}^e$ 是奇异的。譬如: 第 1 行元素和第 4 行元素相加, 所得的一行元素全为零, 第 2 行元素和第 5 行元素相加, 所得的一行元素全为零。因此, 第 1 行和第 4 行线性相关, 第 2 行和第 5 行线性相关。

例 8.1 建立图 8.9 所示刚架中各单元在局部坐标下的单元刚度矩阵。已知各杆的 $EI = 2 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, $EA = 1 \times 10^4 \text{ kN}$ 。

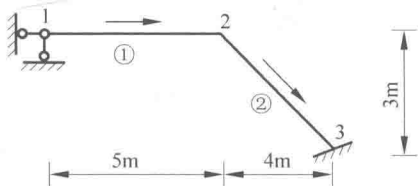


图 8.9

解: (1) 对结点和单元进行编号。杆旁边的箭头指示该杆局部坐标的 $\bar{x}$ 轴方向。

(2) 单元①长度 $l = 5\text{m}$, 相关参数计算如下:

$$\frac{EA}{l} = 2 \times 10^3 \text{ kN/m}, \quad \frac{12EI}{l^3} = 1.92 \times 10^4 \text{ kN/m},$$

$$\frac{6EI}{l^2} = 4.8 \times 10^4 \text{ kN}, \quad \frac{4EI}{l} = 1.6 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$\frac{2EI}{l} = 8 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

将上述数值代入式 (8.13), 可得单元①的刚度矩阵为

$$\bar{k}^{(1)} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 19.2 & 48 & 0 & -19.2 & 48 \\ 0 & 48 & 160 & 0 & -48 & 80 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -19.2 & -48 & 0 & 19.2 & -48 \\ 0 & 48 & 80 & 0 & -48 & 160 \end{bmatrix}$$

(3) 单元②长度及力学参数与单元①一样, 因此, 局部坐标系下的单元刚度矩阵也完全一样, 即

$$\bar{k}^{(2)} = \bar{k}^{(1)}$$

8.2.2 连续梁单元

对于连续梁, 在忽略轴向变形情况下, 取每跨为一个单元, 如图 8.10 所示。

此时梁单元的杆端位移只有 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$, 其余杆端线位移均为零, 即

$$\bar{u}_i = \bar{v}_i = \bar{u}_j = \bar{v}_j = 0 \quad (8.14)$$

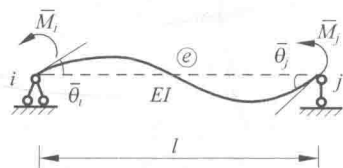


图 8.10

将式(8.14)代入式(8.11),整理后可得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Nj} \\ \bar{F}_{Qi} \\ \bar{F}_{Qj} \\ \bar{M}_i \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}^e \quad (8.15)$$

取弯矩-角位移相关的子矩阵,可得连续梁的单元刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_i \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}^e \quad (8.16)$$

连续梁单元的刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (8.17)$$

连续梁单元的刚度矩阵是非奇异的。这是由于图 8.10 所示的简支单元不是自由单元,而是具有完整约束的简支梁,因此,刚度矩阵可逆。

通常,在单元中某个或某些杆端位移的值已知情况下,可建立特定单元,称为特殊单元。特殊单元的刚度矩阵是否奇异取决于特殊单元是否存在刚体位移,如果存在刚体位移,则刚度矩阵是奇异的,否则可逆。

8.2.3 局部坐标系下的杆单元

图 8.11 所示杆单元在局部坐标系下的刚度方程如式(8.9)所示。写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Nj} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}^e \quad (8.18)$$

式(8.18)也可理解为式(8.11)的特殊情况,相当于梁单元没有抗弯能力,而将第 2、3、5、6 行和列删除后得出。

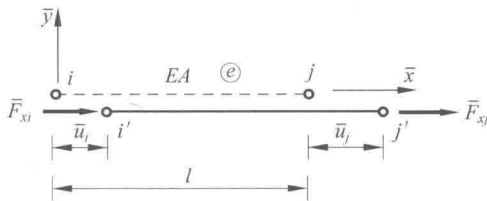


图 8.11

对于斜杆单元,其轴力和轴向位移在整体坐标系中将有沿 x 轴和 y 轴的两个分量,为了便于将局部坐标系的单元刚度方程转化为整体坐标系下的刚度方程,可将式(8.18)扩展为 4 阶形式,即

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Qi} \\ \bar{F}_{Nj} \\ \bar{F}_{Qj} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}^e \quad (8.19)$$

因此,相应的刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (8.20)$$

式(8.20)为杆单元在局部坐标系下的刚度矩阵。它是 4×4 的方阵,为奇异阵。

8.3 整体坐标系下的单元刚度矩阵

8.2 节中的单元刚度矩阵是建立在局部坐标系下的。对于一个结构来说,各单元的局部坐标系可能各不相同。为便于建立结构整体的变形协调条件和平衡条件,必须选定一个统一的坐标系,称为整体坐标系。为推导整体坐标系下的单元刚度方程和刚度矩阵,需要用坐标变换的方法将局部坐标系下的杆端位移和杆端力转换到整体坐标系下,然后建立整体坐标系下的刚度方程和刚度矩阵。

8.3.1 坐标变换

设有整体坐标系 xOy 和一局部坐标系 $\bar{x}O\bar{y}$ 。 Ox 轴逆时针方向的转角 α 为正,如图 8.12 所示。设向量 $\mathbf{V}$ 在整体坐标系 x, y 轴上的投影为 V_x, V_y , 现欲求它在局部坐标系 $\bar{x}, \bar{y}$ 轴上的投影 $\bar{V}_x, \bar{V}_y$ 。由图 8.12 可知:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_x &= V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha \\ \bar{V}_y &= -V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

记 $C = \cos \alpha, S = \sin \alpha$, 将式(8.21)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

或

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{T}_1 \mathbf{V} \quad (8.23)$$

式中, $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{V}_x \ \bar{V}_y)^T$ 为局部坐标系下的向量, $\mathbf{V} = (V_x \ V_y)^T$ 为整体坐标系下的向量, $\mathbf{T}_1$ 为坐标变换矩阵。

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

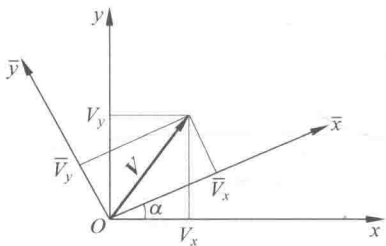


图 8.12

若向量从局部坐标系变换到整体坐标系,由式(8.23)可得

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}_1^{-1} \bar{\mathbf{V}} \quad (8.25)$$

由于坐标变换矩阵 $\mathbf{T}_1$ 为正交矩阵,因此,其逆矩阵等于转置矩阵,即

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1^T \quad (8.26)$$

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1^T = \mathbf{T}_1^T \mathbf{T}_1 = \mathbf{I} \quad (8.27)$$

式中, $\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{T}_1$ 同阶的单位矩阵。因此,式(8.25)可表示为

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{V}} \quad (8.28)$$

1. 梁单元的坐标变换矩阵

对平面梁单元的杆端力向量或杆端位移向量做坐标变换时,由于弯矩(或角位移)在坐标系中可看成是沿 z 轴方向的向量。当坐标系转动 α 角时,绕 z 轴旋转的弯矩(或角位移)无变化,因此可得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Qi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{Nj} \\ \bar{F}_{Qj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} C & S & 0 & & & \\ -S & C & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C & S & 0 \\ 0 & & & -S & C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_i \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_j \end{bmatrix}^e \quad (8.29)$$

写成矩阵形式为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e \quad (8.30)$$

式中,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & & & \\ -S & C & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C & S & 0 \\ 0 & & & -S & C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

称为梁单元的坐标变换矩阵。矩阵 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{T}_1$ 具有相同的性质,也是正交矩阵,即

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (8.32)$$

因此,式(8.30)的逆变换为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}^e \quad (8.33)$$

显然,杆端力之间的这种变换关系同样适用于杆端位移,即

$$\bar{\mathbf{U}}^e = \mathbf{T} \mathbf{U}^e \quad (8.34)$$

$$\mathbf{U}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{U}}^e \quad (8.35)$$

2. 杆单元的坐标变换矩阵

直接应用式(8.22)可得平面杆单元的杆端力向量的坐标变换: