



普通高等教育“十五”国家级规划教材配套辅导

# 高等数学辅导

## 第五版 上册

同济大学高等数学第五版教材辅导编写组

教材习题详解

典型例题解析

重点难点分析

教材内容精讲

吉林大学出版社

# 高等数学辅导

第五版 上册

同济大学高等数学第五版教材辅导编写组

教材习题详解  
典型例题解析  
重点难点分析

吉林大学出版社

高等数学辅导(上下)

同济大学高等数学(第五版)教材辅导编写组

责任编辑:于泓

I. 高…

II. 同…

III. 高等数学 - 高等学校 - 自学参考资料

出版: 吉林大学出版社

发行: 吉林音像出版社

印刷: 石家庄市蓝翔印刷有限公司

开本: 787 × 960 1/16 印张: 47

字数: 898 000

印次: 2005年9月第一次印刷

版次: 2005年8月第1版

定价: 46元(上、下册) 单册: 23元

ISBN 7 - 5601-2541-7/G · 185

# 前 言

同济大学主编的《高等数学》(第五版)是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材,该书结构严谨,逻辑清晰,层次分明,在讲授数学基础知识的同时,又注意渗透数学思想方法。为帮助广大读者学好该书,我们根据无数大学生学习此书的反馈信息,并结合硕士研究生入学考试的要求,组织了北京大学、清华大学、同济大学、南开大学等高校一线的专家学者编写了这套配套辅导书。

全书分为上、下两册,内容编排完全与教材同步,完全按教材章节编写,上册七个章节,下册五个章节。本书的编写力求突出以下几个特点:

1. 在每章的开始给出了本章知识的考点精要及分析,使读者对本章的考点分布及考试要求一目了然,在学习中做到有的放矢。

2. 每章的知识网络图和各节基本内容的表格化,可以使读者提纲挈领,深刻地理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. 各章节的典型例题既包括与基本概念有关的各种题型又有综合多个知识点的考研真题,从基础到提高,重在分析思路和提炼方法,适合各种水平读者的需要。

4. 对教材每节的习题和总习题给出了详尽的解答,以备读者在学习中参考。

《高等数学辅导》有科学完整的体系,合理地使用本书,必将事半功倍。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少精华。在此,向这些书籍的编著者表示感谢。由于时间仓促和作者水平有限,书中的不足之处恳请广大读者和专家给予批评指正。

编者

2005年7月于北京

# 目 录

全课程知识框架 .....	1
第一章 函数与极限 .....	3
考点精要及分析(3)      本章知识网络图(4)      重点记忆知识点(5)	
第一节 映射与函数 .....	5
一、基本内容概述(5)    二、重点难点分析(10)    三、典型例题解析(11)	
四、教材习题 1-1 详解(14)	
第二节 数列的极限 .....	19
一、基本内容概述(19)    二、重点难点分析(20)    三、典型例题解析(20)	
四、教材习题 1-2 详解(23)	
第三节 函数的极限 .....	24
一、基本内容概述(24)    二、重点难点分析(25)    三、典型例题解析(26)	
四、教材习题 1-3 详解(27)	
第四节 无穷小与无穷大 .....	29
一、基本内容概述(29)    二、重点难点分析(29)    三、典型例题解析(30)	
四、教材习题 1-4 详解(31)	
第五节 极限运算法则 .....	33
一、基本内容概述(33)    二、重点难点分析(34)    三、典型例题解析(35)	
四、教材习题 1-5 详解(37)	
第六节 极限存在准则 两个重要极限 .....	39
一、基本内容概述(39)    二、重点难点分析(40)    三、典型例题解析(40)	
四、教材习题 1-6 详解(43)	
第七节 无穷小的比较 .....	45
一、基本内容概述(45)    二、重点难点分析(46)    三、典型例题解析(46)	
四、教材习题 1-7 详解(48)	
第八节 函数的连续性与间断点 .....	50
一、基本内容概述(50)    二、重点难点分析(50)    三、典型例题解析(51)	
四、教材习题 1-8 详解(54)	
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 .....	55
一、基本内容概述(55)    二、重点难点分析(55)    三、典型例题解析(56)	
四、教材习题 1-9 详解(57)	
第十节 闭区间上连续函数的性质 .....	59
一、基本内容概述(59)    二、重点难点分析(59)    三、典型例题解析(60)	
四、教材习题 1-10 详解(62)	
教材总习题一详解 .....	62
第二章 导数与微分 .....	66
考点精要及分析(66)      本章知识网络图(67)      重点记忆知识点(67)	
第一节 导数概念 .....	68

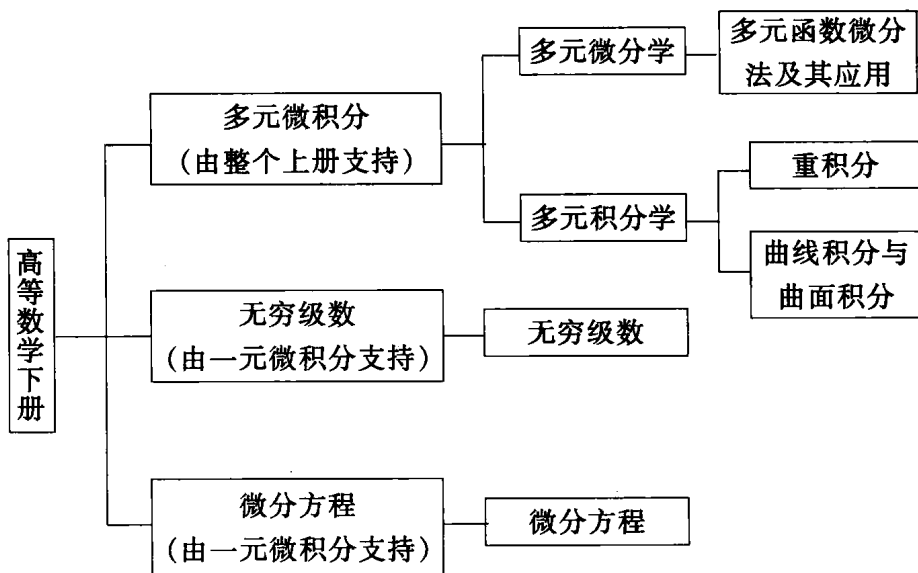
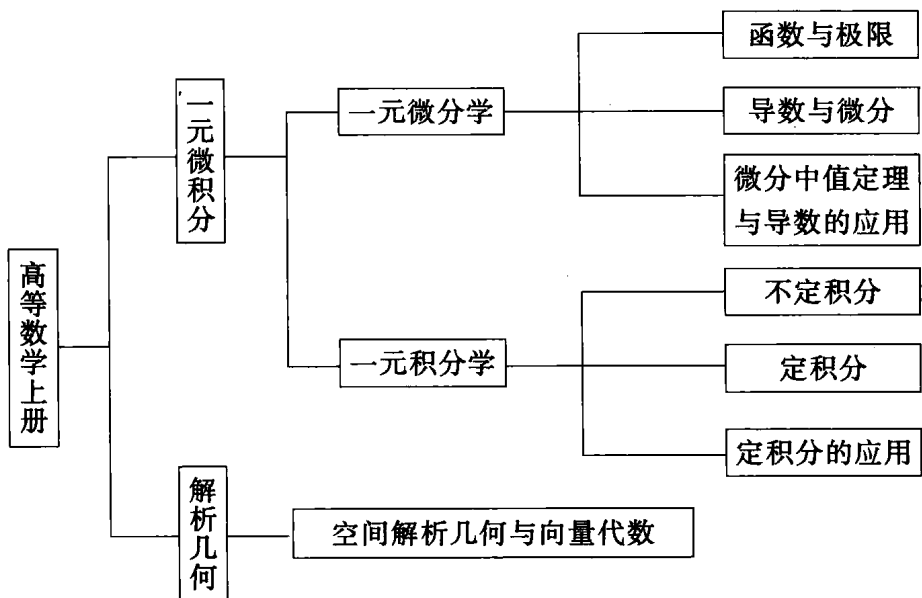
一、基本内容概述(68)	二、重点难点分析(70)	三、典型例题解析(70)	
四、教材习题 2-1 详解(75)			
第二节 函数的求导法则			78
一、基本内容概述(78)	二、重点难点分析(79)	三、典型例题解析(79)	
四、教材习题 2-2 详解(82)			
第三节 高阶导数			87
一、基本内容概述(87)	二、重点难点分析(88)	三、典型例题解析(88)	
四、教材习题 2-3 详解(90)			
第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数 相关变化率			92
一、基本内容概述(92)	二、重点难点分析(93)	三、典型例题解析(93)	
四、教材习题 2-4 详解(95)			
第五节 函数的微分			100
一、基本内容概述(100)	二、重点难点分析(101)	三、典型例题解析(102)	
四、教材习题 2-5 详解(105)			
教材总习题二详解			108
<b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b>			112
考点精要及分析(112)	本章知识网络图(113)	重点记忆知识点(113)	
第一节 微分中值定理			114
一、基本内容概述(114)	二、重点难点分析(115)	三、典型例题解析(116)	
四、教材习题 3-1 详解(121)			
第二节 洛必达法则			124
一、基本内容概述(124)	二、重点难点分析(125)	三、典型例题解析(126)	
四、教材习题 3-2 详解(130)			
第三节 泰勒公式			133
一、基本内容概述(133)	二、重点难点分析(133)	三、典型例题解析(134)	
四、教材习题 3-3 详解(137)			
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸			140
一、基本内容概述(140)	二、重点难点分析(140)	三、典型例题解析(141)	
四、教材习题 3-4 详解(144)			
第五节 函数的极值与最大值最小值			150
一、基本内容概述(150)	二、重点难点分析(150)	三、典型例题解析(151)	
四、教材习题 3-5 详解(155)			
第六节 函数图形的描绘			158
一、基本内容概述(158)	二、重点难点分析(159)	三、典型例题解析(159)	
四、教材习题 3-6 详解(160)			
第七节 曲 率			165
一、基本内容概述(165)	二、重点难点分析(165)	三、典型例题解析(166)	
四、教材习题 3-7 详解(168)			
第八节 方程的近似解			170

一、基本内容概述(170)	二、重点难点分析(170)	三、典型例题解析(170)	
四、教材习题3-8 详解(171)			
教材总习题三详解			172
<b>第四章 不定积分</b>			<b>178</b>
考点精要及分析(178)	本章知识网络图(179)	重点记忆知识点(179)	
第一节 不定积分的概述与性质			180
一、基本内容概述(180)	二、重点难点分析(181)	三、典型例题解析(181)	
四、教材习题4-1 详解(184)			
第二节 换元积分法			187
一、基本内容概述(187)	二、重点难点分析(188)	三、典型例题解析(190)	
四、教材习题4-2 详解(194)			
第三节 分部积分法			200
一、基本内容概述(200)	二、重点难点分析(201)	三、典型例题解析(201)	
四、教材习题4-3 详解(206)			
第四节 有理函数的积分			211
一、基本内容概述(211)	二、重点难点分析(212)	三、典型例题解析(212)	
四、教材习题4-4 详解(216)			
第五节 积分表的使用			222
一、基本内容概述(222)	二、重点难点分析(222)	三、典型例题解析(222)	
四、教材习题4-5 详解(223)			
教材总习题四详解			226
<b>第五章 定积分</b>			<b>236</b>
考点精要及分析(236)	本章知识网络图(237)	重点记忆知识点(238)	
第一节 定积分的概念与性质			238
一、基本内容概述(238)	二、重点难点分析(240)	三、典型例题解析(241)	
四、教材习题5-1 详解(244)			
第二节 微积分基本公式			249
一、基本内容概述(249)	二、重点难点分析(249)	三、典型例题解析(250)	
四、教材习题5-2 详解(253)			
第三节 定积分的换元法和分部积分法			257
一、基本内容概述(257)	二、重点难点分析(257)	三、典型例题解析(258)	
四、教材习题5-3 详解(261)			
第四节 反常积分			271
一、基本内容概述(271)	二、重点难点分析(272)	三、典型例题解析(273)	
四、教材习题5-4 详解(275)			
第五节 反常积分的审敛法 $\Gamma$ 函数			278
一、基本内容概述(278)	二、重点难点分析(280)	三、典型例题解析(280)	
四、教材习题5-5 详解(280)			
教材总习题五详解			283

<b>第六章 定积分的应用</b> .....	291
<b>考点精要及分析(291)</b> <b>本章知识网络图(291)</b> <b>重点记忆知识点(292)</b>	
<b>第一节 定积分的元素法</b> .....	293
一、基本内容概述(293)    二、重点难点分析(294)    三、典型例题解析(294)	
<b>第二节 定积分在几何学上的应用</b> .....	294
一、基本内容概述(294)    二、重点难点分析(294)    三、典型例题解析(294)	
四、教材习题 6-2 详解(300)	
<b>第三节 定积分在物理学上的应用</b> .....	310
一、基本内容概述(310)    二、重点难点分析(311)    三、典型例题解析(311)	
四、教材习题 6-3 详解(313)	
教材总习题六详解 .....	318
<b>第七章 空间解析几何与向量代数</b> .....	322
<b>考点精要及分析(322)</b> <b>本章知识网络图(323)</b> <b>重点记忆知识点(323)</b>	
<b>第一节 向量及其线性运算</b> .....	326
一、基本内容概述(326)    二、重点难点分析(327)    三、典型例题解析(327)	
四、教材习题 7-1 详解(329)	
<b>第二节 数量积 向量积 混合积</b> .....	331
一、基本内容概述(331)    二、重点难点分析(332)    三、典型例题解析(332)	
四、教材习题 7-2 详解(335)	
<b>第三节 曲面及其方程</b> .....	337
一、基本内容概述(337)    二、重点难点分析(337)    三、典型例题解析(338)	
四、教材习题 7-3 详解(340)	
<b>第四节 空间曲线及其方程</b> .....	343
一、基本内容概述(343)    二、重点难点分析(343)    三、典型例题解析(343)	
四、教材习题 7-4 详解(345)	
<b>第五节 平面及其方程</b> .....	346
一、基本内容概述(346)    二、重点难点分析(347)    三、典型例题解析(347)	
四、教材习题 7-5 详解(349)	
<b>第六节 空间直线及其方程</b> .....	351
一、基本内容概述(351)    二、重点难点分析(353)    三、典型例题解析(353)	
四、教材习题 7-6 详解(356)	
教材总习题七详解 .....	360



# 全课程知识框架





# 第一章 函数与极限

在本章里,我们首先学习了函数及其相关概念,并介绍了函数的四个基本性质和几个常用的初等函数;接着讨论了序列、函数的极限,包括各种情况下极限的定义形式和几种不同函数形式求极限的常用方法;然后研究了无穷小量和无穷大量,包括无穷小的比较;最后说明了函数的连续性,并且介绍了利用连续函数的性质求解一些常见命题的方法.本章知识是高等数学的基础,极限概念和求极限运算贯穿了高等数学的始终,因此本章需要重点理解的是极限的概念及其本质.

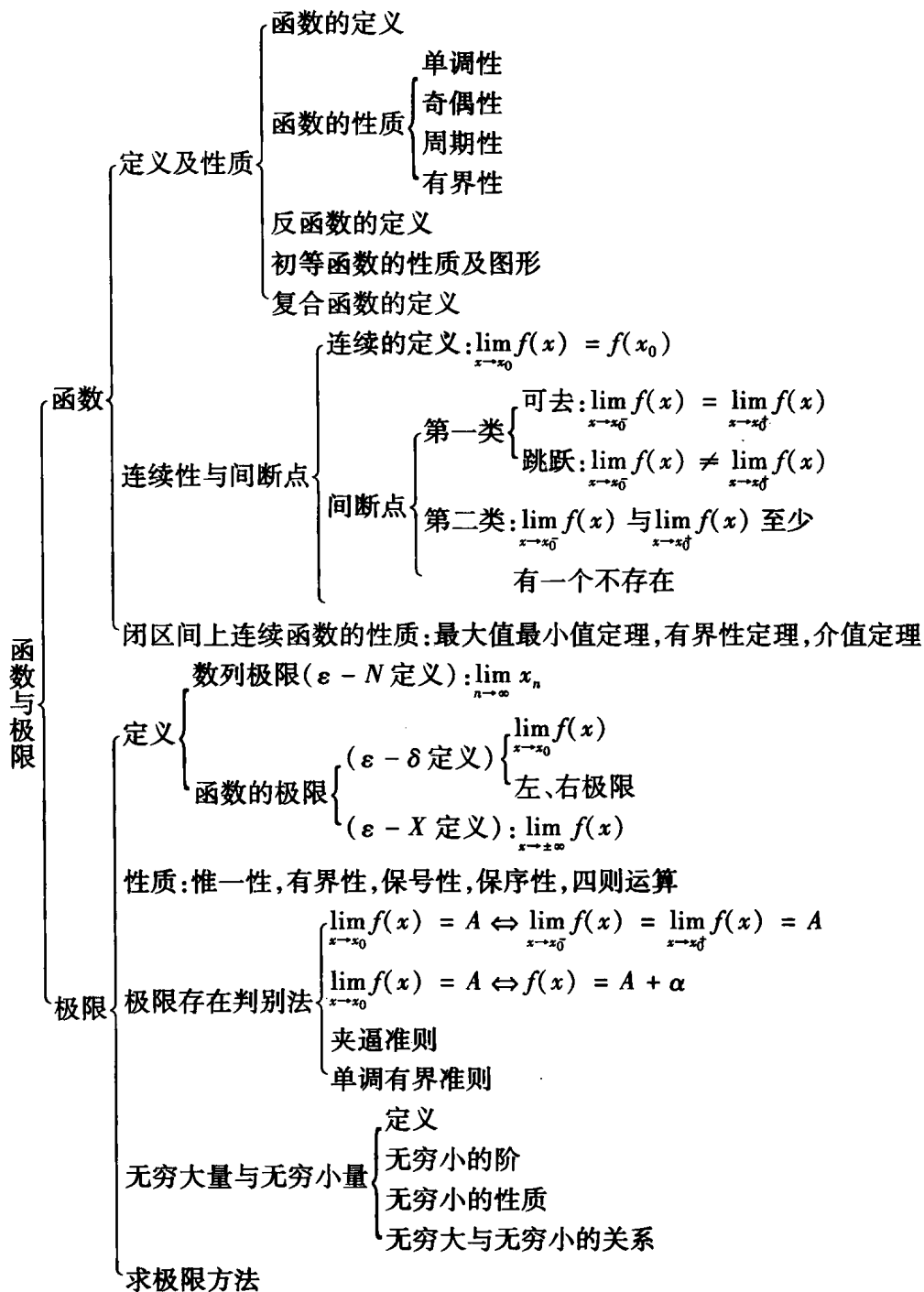
## 考点精要及分析

复合函数,特别是分段函数的复合;极限的概念,极限存在准则,求极限的方法(求极限的方法主要有:极限四则运算法则、两个重要的极限、等价无穷小代换、夹逼准则和单调有界准则);无穷小的阶;函数间断点的类型;有限区间上连续函数的介值定理和最大值最小值定理.以历年考研数学考点分析为例,可见上述为本章学习重点.

### 考点分析

分值 年份 \ 考点	复合函数	极限四则 运算法则	两个重要 极限	单调有界 准则	无穷小的阶
1996			3		
1997		3			
1998					
1999					3
2000	3		3		
2001		3		3	
2002			3		
2003	4				
2004		4			
2005					4
合计	7	10	9	3	7

# 本章知识网络图



## 重点记忆知识点

### \* 1 \* 初等函数恒等式

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad f^{-1}[f(x)] = x(f[f^{-1}(x)] = x)$$

### \* 2 \* 常用极限公式

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 (a > 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty (a > 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1)$$

### \* 3 \* 常用的等价无穷小

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\arctan x \sim x$ ,  $\ln(1+x) \sim x$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $a^x - 1 \sim x \ln a$ .

## 第一节 映射与函数

### 一、基本内容概述

表 1.1-1 函数及相关的定义

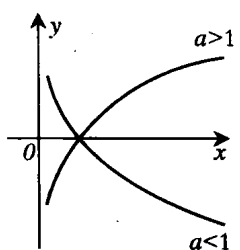
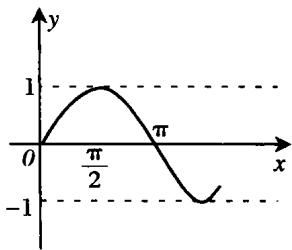
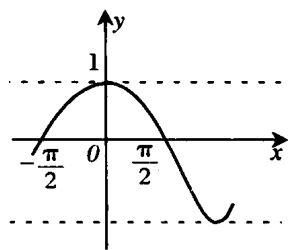
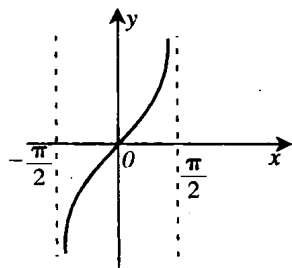
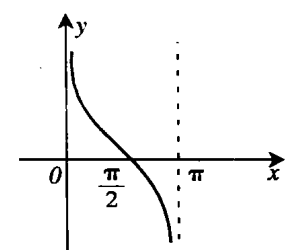
名 称	定 义
函 数	设 $X, Y$ 是两个非空实数集合, 若存在对应法则 $f$ , 使得对于任给的 $x \in X$ , 存在惟一点 $y \in Y$ 与之对应, 则称 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的函数, 记作 $y = f(x)$ , $X$ 称为定义域, $W = \{y \mid y = f(x), x \in X\} \subset Y$ , 称为函数 $f$ 的值域.
反函数	设 $f(x)$ 的定义域为 $X$ , 值域为 $W$ , 若对于任给 $y \in W$ , 在 $X$ 中只有一个数 $x$ 与之对应, 使得 $f(x) = y$ , 把 $y$ 看作自变量, $x$ 看作函数, 得到的一个新函数, 称为函数 $f$ 的反函数, 记作 $f^{-1}$ , $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ .
复合函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $U$ , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 $X$ , 值域为 $U^*$ , 且 $U^* \subset U$ , 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 或 $f \circ \varphi$ 为定义在 $X$ 上的复合函数, $u$ 为中间变量.

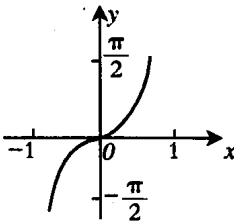
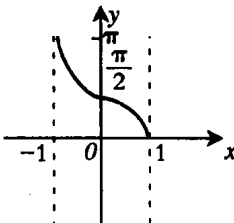
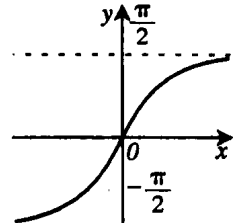
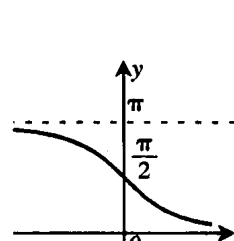
表 1.1 - 2 函数的几种特性

性 质	定 义
有界性	<p>设<math>f(x)</math>的定义域为<math>X</math>,若存在<math>k_1</math>,使得对于任给<math>x \in X</math>,有<math>f(x) &lt; k_1</math>,则称<math>k_1</math>为<math>f(x)</math>的上界.若存在<math>k_2</math>,使得对于任给<math>x \in X</math>,<math>f(x) &gt; k_2</math>,则称<math>k_2</math>为<math>f(x)</math>的下界.</p> <p>若存在<math>M &gt; 0</math>,使得对于任给<math>x \in X</math>,有<math> f(x)  &lt; M</math>,则称<math>f(x)</math>在<math>X</math>上有界,或称<math>f(x)</math>为<math>X</math>上的有界函数.反之称<math>f(x)</math>无界.</p>
单调性	<p>设<math>f(x)</math>的定义域为<math>X</math>,若对于任意<math>x_1, x_2 \in X</math>,当<math>x_1 &lt; x_2</math>时,若<math>f(x_1) \leq f(x_2)</math>,则称函数<math>f(x)</math>在<math>X</math>上单调增;若<math>f(x_1) &lt; f(x_2)</math>,称<math>f(x)</math>严格单调增.</p> <p>当<math>x_1 &lt; x_2</math>时,若<math>f(x_1) \geq f(x_2)</math>,则称函数<math>f(x)</math>在<math>X</math>上单调减;若<math>f(x_1) &gt; f(x_2)</math>,称<math>f(x)</math>严格单调减.</p>
奇偶性	<p>设<math>f(x)</math>的定义域<math>X</math>关于原点对称,</p> <p>若对于任给<math>x \in X</math>,有<math>f(-x) = f(x)</math>,则称<math>f(x)</math>为偶函数.</p> <p>若对于任给<math>x \in X</math>,有<math>f(-x) = -f(x)</math>,则称<math>f(x)</math>为奇函数.</p>
周期性	<p>设<math>f(x)</math>的定义域为<math>X</math>,若存在<math>T \neq 0</math>,使得对于任给<math>x \in X</math>,有<math>x + T \in X</math>,且<math>f(x + T) = f(x)</math>,则称<math>f(x)</math>为周期函数,<math>T</math>为<math>f(x)</math>的周期.</p> <p>通常把<math>f(x)</math>的最小正周期简称为<math>f(x)</math>的周期.</p>

表 1.1 - 3 基本初等函数与初等函数

名 称	定义式	性 质	要 点	图 形
基本初等函数	<p>幂函数</p> <p><math>y = x^\alpha</math> (<math>\alpha</math>为常数) 定义域一般为 (<math>0, +\infty</math>)</p>	<p><math>\alpha &gt; 0</math>时 函数单调增 <math>\alpha &lt; 0</math>时 函数单调减</p>	<p>定义域可为 (<math>-\infty, +\infty</math>)如 <math>y = x^2</math>,也可为 [<math>0, +\infty</math>),如 <math>y = x^{\frac{1}{2}}</math>.</p>	
	<p>指数函数</p> <p><math>y = a^x</math> (<math>a &gt; 0, a \neq 1</math>) 定义域为 (<math>-\infty, +\infty</math>)</p>	<p><math>a &gt; 1</math>时, 函数单调增 <math>a &lt; 1</math>时, 函数单调减</p>		

名称	定义式	性质	要点	图形
基本初等函数 三解函数	对数函数 $y = \log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1$ ) 定义域为 ( $0, +\infty$ )	$a > 1$ 时, 函数单调增 $a < 1$ 时, 函数单调减	$y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数 $\log_e x = \ln x$	
	正弦函数 $y = \sin x$ 定义域为 ( $-\infty, +\infty$ )	奇函数, 周期 函数 $T = 2\pi$ , 有界函数 $ \sin x  \leq 1$	值域为 [-1, 1]	
	余弦函数 $y = \cos x$ 定义域为 ( $-\infty, +\infty$ )	偶函数, 周期 函数 $T = 2\pi$ , 有界函数 $ \cos x  \leq 1$	值域为 [-1, 1]	
	正切函数 $y = \tan x$ 定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	奇函数, 周期 函数, $T = \pi$ , 一个周期内 为单调增函数		
	余切函数 $y = \cot x$ 定义域为 $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	周期函数 $T = \pi$ , 在一个周期 内为单调减函数		

名称	定义式	性质	要点	图形
三解函数	正割函数 $y = \sec x$ $= \frac{1}{\cos x}$	周期函数 $T = 2\pi$ , 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上无界		
	余割函数 $y = \csc x$ $= \frac{1}{\sin x}$	周期函数 $T = 2\pi$ , 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上无界		
反三解函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$ 定义域为 $[-1, 1]$	奇函数, 单调增函数	值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$ 定义域为 $[-1, 1]$	单调减函数	值域为 $[0, \pi]$	
	反正切函数 $y = \arctan x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$	奇函数, 有界函数 $ \arctan x  < \frac{\pi}{2}$ 单调增函数	值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$	有界函数 $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$ 单调减函数	值域为 $(0, \pi)$	

基本初等函数

反三解函数



名称	定义式	性质	要点	图形
初等函数	凡是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后能用一个公式表示的函数称为初等函数			

表 1.1 - 4 双曲函数

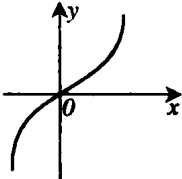
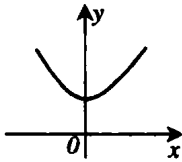
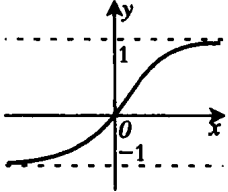
名称	定义式	性质	要点	图形
双曲函数	双曲正弦 $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$	奇函数, 单调增函数	值域为 $(-\infty, +\infty)$	
	双曲余弦 $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$	偶函数	值域为 $[1, +\infty)$	
	双曲正切 $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$	奇函数, 单调增函数, 有界函数	值域为 $(-1, 1)$	

表 1.1 - 5 分段函数

名称	定义	要点	图形
分段函数	用两个或两个以上公式表示的函数	分段函数的复合	
	符号函数 $\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$		