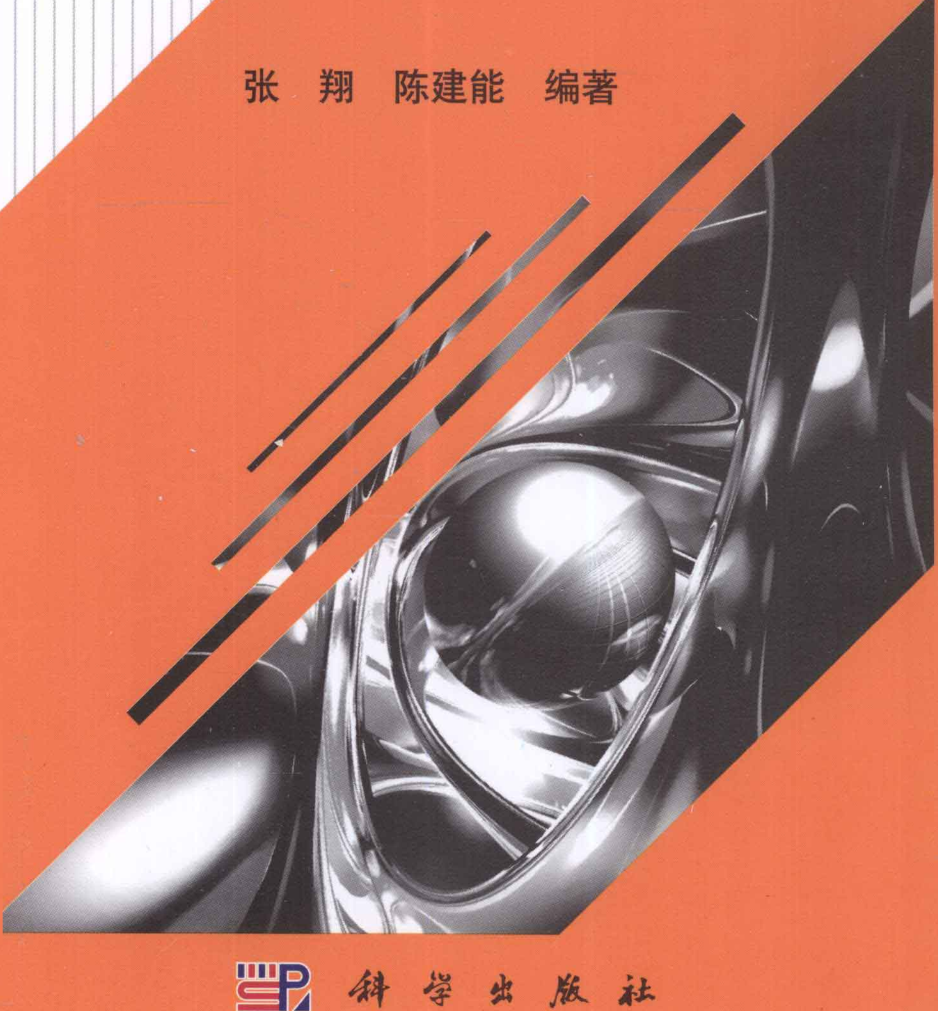
普通高等教育“十二五”规划教材

机械优化设计

张　翔　陈建能　编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

机械优化设计

张　翔　陈建能　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了机械优化设计的基本理论、常用方法和机械优化设计实例。内容包括引论、优化设计的理论基础、一维优化方法、多维无约束优化方法、约束优化方法、多目标优化设计、优化设计的若干应用问题、现代优化计算方法与优化工具软件应用概述、优化设计实例。重点章设有“本章导读”，引导不同学习需求的读者取舍学习内容；每一章都配有习题；附录提供了混合罚函数调用 Powell 法求优参考程序和 MATLAB 优化工具使用示例，供初学者参考。本书第 6 章介绍了多目标优化设计的求解理论与方法，特别适合对多目标优化设计有实际应用需求的读者。

本书可作为工程类专业的大学生和研究生的教材，也可供相关的师生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械优化设计/张翔，陈建能编著. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-033074-1

Ⅰ.①机… Ⅱ.①张…②陈… Ⅲ.①机械设计：最优设计-高等学校-教材 Ⅳ.①TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 267311 号

责任编辑：毛　莹　潘继敏 / 责任校对：赵燕珍
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2012 年 3 月第一次印刷　印张：14
字数：290 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

优化设计是将最优化技术和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供一种基于定量分析择优的设计方法。应用优化设计方法能从众多的可行设计方案中，准确迅速地找到尽可能完善或最适宜（即最优）的设计方案，从而大大提高设计质量和设计效率。优化思想几乎可渗透到人类的一切活动中，因此优化设计是现代设计方法中最活跃的分支之一。

本书是根据作者多年讲授本科生课程“优化设计方法”和硕士生课程“优化设计理论与方法”的教学经验和体会，并结合科研应用的成果编写而成的。在编著中尝试传授知识与培养能力并重，本书具有如下几个特点。

(1) 注重实用性，兼顾理论性。从工程实用性出发，精选实用、好用的若干优化方法。为使学习者能用好、用活这些方法，兼顾不同需求的学习者，对一些重要优化方法涉及的相关理论，本书做了相应的介绍和公式推导。

(2) 力求深入浅出。对于一些较为抽象、难以理解的内容，一方面从编排上尽量循序渐进；另一方面尽可能地给出几何图形，从几何意义上予以解释。

(3) 兼顾各学习层次，便于自学。本书一些重点章，设有“本章导读”，方便不同要求的学习者取舍学习内容。

(4) 注重能力培养。基于：①多年教学实践证明，编写优化方法的计算机程序是掌握、熟悉优化方法的一个十分有效的途径；②编写优化方法程序，可使学习者得到较为完整的编写、调试中小规模程序的训练，从而明显地提高学习者应用计算机解决问题的能力，达到掌握知识与能力培养并重的目的。对重要的优化方法，安排了编程要点的说明与提示。

(5) 较为系统和深入地介绍多目标优化设计的求解理论。多目标优化设计是一个相当普遍的工程设计问题，但因具有多解性（最优解不唯一），相应的求解理论和方法与单目标优化相比，远未成熟。而目前多数优化设计教材在这方面的内容，以简单罗列方法为主，难以帮助学习者在实施多目标优化设计中，掌控好求解过程，把握好求解结果。所以，在第 6 章的多目标优化设计中，较为系统地介绍了多目标优化设计的求解理论和实用方法。同时结合作者的观点，在第 6 章分析了多目标优化设计求解存在的问题与研究方向，与此相对应，在第 9 章的应用实例中，收入了作者科研课题中的 2 个多目标优化设计的应用实例。

(6) 加强优化迭代算法的可读性。为提高优化方法的迭代计算的可读性，与算法的结构化编程相对应，本书用 N-S 图取代传统的程序计算框图，介绍优化方法的计算流程。

本书是在张翔 2001 年编著出版的《优化设计方法及编程》的基础上修订而成的。

参加本次编写的人员及分工如下：张翔（第 1～4、6 章及第 5 章部分内容），陈建能（第 7 章部分内容及第 9 章），林伟青（第 8 章部分内容及附录 F2），施火结（第 5 章部分内容），陈金兰（第 8 章部分内容），方志和（第 7 章部分内容及附录 F1）。电子教案及习题解答由林伟青、施火结两位老师完成，可提供给任课教师，供教学参考。

本书承蒙清华大学吴宗泽教授、浙江理工大学赵匀教授担任主审。他们对本书提出了宝贵的意见，并给予了大力的支持和帮助，在此深表感谢。任金波老师为本书绘制了所有插图，本书的电子文稿由林海坤排版编辑，特此致谢。

限于作者对优化设计理论和方法的把握水平和经验，书中难免存在不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

作　者

2011 年 10 月

目　　录

前言

第 1 章　引论 …… 1

1.1　术语及概念 …… 1

1.2　优化设计的数学模型 …… 3

1.3　习题 …… 10

第 2 章　优化设计的理论基础 …… 11

2.1　本章导读 …… 11

2.2　向量、矩阵的若干概念 …… 11

2.3　目标函数的性态分析基础 …… 15

2.4　函数的凸性 …… 22

2.5　目标函数的无约束极值条件 …… 25

2.6　优化设计的约束极值条件 …… 27

2.7　优化设计的数值解法及终止准则 …… 32

2.8　习题 …… 35

第 3 章　一维优化方法 …… 37

3.1　引言 …… 37

3.2　确定搜索区间的进退法 …… 39

3.3　黄金分割法 …… 43

3.4　二次插值法 …… 48

3.5　习题 …… 53

第 4 章　多维无约束优化方法 …… 54

4.1　本章导读 …… 54

4.2　坐标轮换法 …… 54

4.3　共轭方向法 …… 57

4.4　鲍威尔法 …… 63

4.5　梯度法 …… 71

4.6　牛顿法 …… 72

4.7　变尺度法 …… 74

4.8　习题 …… 80

第 5 章　约束优化方法 …… 82

5.1　本章导读 …… 82

5.2　随机方向法 …… 82

5.3 复合形法 ………… 86
5.4 惩罚函数法 ………… 92
5.5 拉格朗日乘子法 ………… 106
5.6 习题 ………… 110
第 6 章 多目标优化设计 ………… 112
6.1 本章导读 ………… 112
6.2 求解多目标优化设计的理论基础 ………… 112
6.3 求解多目标优化的评价函数法 ………… 118
6.4 求解多目标优化的其他方法 ………… 127
6.5 几种多目标优化求解方法对比 ………… 130
6.6 习题 ………… 130
第 7 章 优化设计的若干应用问题 ………… 131
7.1 关于数学模型的建立 ………… 131
7.2 数学模型的尺度变换 ………… 135
7.3 建模中数表和图线的程序化 ………… 138
7.4 优化设计的实施 ………… 142
7.5 优化计算结果的分析 ………… 145
7.6 习题 ………… 146
第 8 章 现代优化计算方法与优化工具软件应用概述 ………… 148
8.1 现代优化计算方法 ………… 148
8.2 MATLAB 优化工具应用概述 ………… 158
8.3 习题 ………… 164
第 9 章 优化设计实例 ………… 165
9.1 复演预期函数机构的设计 ………… 165
9.2 圆柱齿轮减速器的优化设计 ………… 168
9.3 圆柱螺旋压缩弹簧的优化设计 ………… 172
9.4 椭圆齿轮-曲柄摇杆-轮系引纬机构的设计 ………… 175
9.5 手脚联控机构的多目标优化设计 ………… 184
9.6 应用的扩展——两个非工程设计的应用实例 ………… 187
9.7 习题 ………… 192
参考文献 ………… 194
附录 混合罚函数优化程序与 MATLAB 使用示例 ………… 195
F1 混合罚函数调用 Powell 法求优参考程序 ………… 195
F2 MATLAB 优化工具使用示例 ………… 207

第1章　引　　论

人们在做任何一项带有决策性的工作时，总是希望尽可能从一切可行的方案中，选择出一个最好或最佳的方案，这就是最优化问题。而对于设计工作，这样的问题即为优化设计问题。优化设计是数学规划理论应用于设计领域的一个分支，它先将工程设计问题转化为最优化数学模型，然后选择适当的求解方法——优化方法，以计算机为计算工具，求取最优的参数方案。

优化设计的方法在结构设计、化工系统设计、电气传动设计、制造工艺设计等方面都有广泛的应用，而且取得了不少成果。例如，在机械设计中，对于机构、零件、部件、工艺设备的参数确定，以及一个分系统的设计，都有许多运用优化设计取得良好经济效果的实例。实践证明，在机械设计中采用优化设计，不仅可以减轻机械设备自重、降低材料消耗与制造成本，而且可以提高产品的质量与工作性能。因此，优化设计已成为现代机械设计理论和方法中的一个重要领域，并且越来越受到从事机械设计的科学工作者和工程技术人员的重视。

本章主要介绍有关优化设计的基本概念和术语。

1.1　术语及概念

1.1.1　优化或最优化的概念

引例　某一元函数 $f(x)$的几何图形如图1.1所示。根据数学分析的知识可知，在 x_1、x_2、x_4 三点处，$f(x)$分别有三个极小值，而 $f(x_4)$ 为 $f(x)$ 的最小值。若加入 $x \leqslant x_3$ 限制条件，则 $f(x)$的最小值为 $f(x_2)$。从数学规划或优化设计的角度，将 $f(x_2)$ 称为函数 $f(x)$在 $x \leqslant x_3$ 条件下的最优值。由此例可引出以下几个概念。

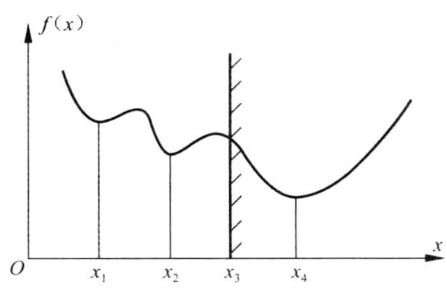


图1.1　一元函数的优化问题

何谓优化或最优化？用数学语言来说，就是找出给定的函数在某些限制条件下的最小值或最大值。将该最小值（或最大值）称为最优值，相应的解即变量的一组取值（变量值）称为最优点，两者统称最优解。求解的方法称为优化方法（或最优化方法），求解的过程称为优化过程。那么，为什么将求最小值（或最大值）这种在数学上属于极值问题的有关概念，用优化或最优化来表示呢？这是因为：

（1）由于多变量函数较复杂，往往很难精确得到其绝对极值。因此，求解的结果都是在一定的精度前提条件下获得的。

（2）在许多情况下，对寻找的最小值（或最大值）还附加一些对变量取值的限制条件，此时所得到的最小值（或最大值）只是在一定的限制条件为前提下的最好，即最优的结果，而并不是函数原本的最小值（或最大值）。

所以，虽然从数学角度上看，追求的目标是函数值最小或最大，但由于结果具有相对性，因此，用优化或最优化来表达有关概念，以此描述与刻画有关问题更为准确。

1.1.2 优化设计

将优化方法应用到工程设计，在一切可行的设计方案中选择一个最好的方案，这样的设计称为优化设计。以下通过一个例子来加深理解优化设计的问题，同时介绍一些概念。

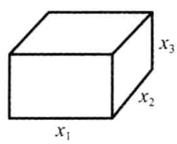


图 1.2 立方体装物箱子

例 1.1 有一个金属板制成的立方体装物箱子（图 1.2），体积为 1m^3，长度（x_1）不得小于 1.5m，要求合理地选择长（x_1）、宽（x_2）、高（x_3）使制造时耗用的金属板最少。

解

（1）问题分析。依题意设计问题为：在满足长度 x_1 大于 1.5m、体积等于 1m^3 的前提下，合理选择 x_1、x_2、x_3 使箱子的表面积最小。即从无穷种 x_1、x_2、x_3 组合的尺寸方案——设计方案中，选择出既满足设计的限制条件，又能使箱子的表面积达到最小的设计方案。

（2）问题的数学表达。若表面积是 x_1、x_2、x_3 的函数，用代号 $f(x_1,x_2,x_3)$表示，则

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

$f(x_1,x_2,x_3)$称为优化设计的目标函数。

要求 $f(x_1,x_2,x_3)$取得最小值，即求解

$$\min f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \quad ①$$

并且要求

$$x_1 \geqslant 1.5 \quad \text{（箱子长度大于 1.5）} \quad ②$$

$$x_2 > 0 \quad \text{（箱子宽度大于 0）} \quad ③$$

$$x_3 > 0 \quad \text{（箱子高度大于 0）} \quad ④$$

$$x_1x_2x_3 = 1 \quad \text{（箱子体积等于 1）} \quad ⑤$$

式②～式⑤是变量取值制约条件的数学表达式，称为优化设计的约束条件或约束方程。

上述的①～⑤五个数学表达式，构成这一优化设计的数学模型。其数学意义为：在满足四个约束条件的前提下，求当 $f(x_1,x_2,x_3)$的值为最小时，相应变量 x_1、x_2、x_3 的数值。

（3）计算结果。选用适当的优化方法求解上述数学模型，可得当 $x_1^*=1.5$、$x_2^*=0.81649658$、$x_3^*=0.81649658$ 时，函数 $f(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=6.232313$ 为本设计的最小值，即最优值。

1.1.3 优化设计的工作内容

分析例 1.1 的求解过程可知，优化设计的工作内容，大致可分为两大部分，分别为：

（1）分析设计问题，建立优化设计的数学模型。

这一部分的工作，就是用数学语言来表达设计的问题，把设计问题转换成数学问题。可分为以下 3 方面的工作。

① 将设计追求的指标，用函数的形式表示，称为目标函数。

② 把影响指标变化的参数（因素）作为函数的变量，称为设计变量。

③ 为确保设计质量，而对参数取值提出的限制条件，称为约束条件。将其用方程（等式或不等式方程）来表达，又称为约束方程。

（2）选择适当的优化方法，求解数学模型。

1.2 优化设计的数学模型

分析上述内容可知，设计变量、目标函数、约束方程是建立优化设计数学模型的 3 个基本要素，这也是优化设计中常用的术语，本节对这 3 个要素及相关的术语作进一步介绍。

1.2.1 设计变量与设计空间

由例 1.1 可知，优化设计的结果是用一组设计参数的最优组合来表示的。这些设计参数通常可概括地划分为两类：一类是可以根据客观规律、具体条件或已有数据等预先给定的参数，称为设计常量，如计算质量时材料的密度；另一类是在优化过程中不断变化，最后使设计指标（目标）达到最优的独立的设计参数，称为设计变量。优化设计的目的，就是寻找这些设计变量值的某种组合，使某个或多个设计指标达到最优。

为了表达方便，用 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 顺序表示 n 个设计变量。

例如，标准直齿圆柱齿轮的设计，共有 3 个独立可变的待确定参数，即齿数（Z_1）、齿宽系数（ψ_d）和模数（m）。在按齿轮质量最小的优化设计中，这 3 个独立参数即为设计变量，若改用 $x_i(i=1,2,3)$ 来表示，这 3 个设计变量可表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{齿数 } Z_1 \\ \text{齿宽系数 } \psi_d \\ \text{模数 } m \end{bmatrix}$$

优化设计的设计变量数目用 n 表示。若以 n 个设计变量作为 n 个坐标轴，则设计变量的取值域，就构成了一个 n 维实空间（n 维欧氏空间），将其称为 n 维设计空间。这样，设计变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的每一组取值，都对应于设计空间上的一个坐标点，称为设计点。

由向量的概念可知，对于 n 维空间的任一坐标点 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，都可表示为以原点为起点、该坐标点为终点的 n 维向量，即

$$\boldsymbol{X}_1' = [x_1' \quad x_2' \quad \cdots \quad x_n']^{\mathrm{T}}$$

当 $n=2$、3 时，如图 1.3 所示。所以，在 n 维设计空间中，可简便用一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 来表示一个设计点，也就是将 n 个设计变量看成是一个 n 维向量的 n 个分量，即设计变量

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$$

简记为

$$\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n (\mathbf{R}^n \text{ 为 } n \text{ 维欧氏空间})$$

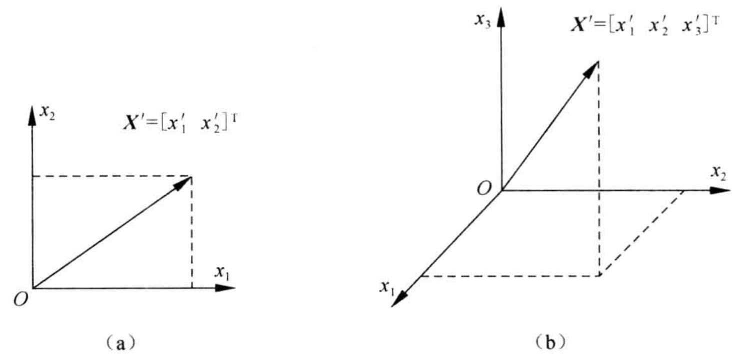


图 1.3　设计变量所组成的设计空间

根据设计空间的概念，设计空间的维数是与优化设计的变量数目相对应的，所以又把设计变量的数目称为优化设计的维数。由于空间的维数表示向量的自由度，即设计的自由度，所以优化设计的维数越多即设计变量越多，则设计的自由度越大、可供选择的方案越多、设计越灵活、相应的难度也越大、求解越复杂。一般地，可按优化设计的维数，来划分优化设计问题的规模等级。当设计变量数目为 2～10 时，为小型优化问题；当设计变量数目为 10～50 时，为中型优化问题；当设计变量数目大于 50 时，为大型优化问题。

1.2.2 目标函数

在设计中，设计者总是希望所设计的产品或工程设施具有最好的设计方案，而这往往是基于对某个或多个性能指标的评价与对比。在优化设计中，可将所追求的性能指标用设计变量的函数形式表达出来，而后通过对比函数值的大小，来实现设计方案的评价与对比。如行走机械的变速箱设计，要求最小的质量或最紧凑的体积；平面四杆机构设计，有些场合要求最小传动角越大越好，有些场合则要求实际轨迹与设计要求的理论轨迹吻合度最高等。在优化设计中，需针对这些指标建立相应可进行度量的关于设计变量的函数，如例 1.1 中的 $f(x_1, x_2, x_3)$。这种用于度量设计指标优劣程度的关于设计变量的函数，称为优化设计的目标函数，简称目标函数。对于目标函数需着重把握下述 3 个概念。

概念 1　目标函数是设计变量的函数，用代号表示为 $f(\boldsymbol{X})$。

概念 2　目标函数是用于度量设计所追求指标的优劣程度。度量的方法是比较函数值的大小，所以指标的优劣程度可描述为 $\min f(\boldsymbol{X})$ 或 $\max f(\boldsymbol{X})$，$\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$，相应的数值为最优值。

概念 3　由于 $\max f(\boldsymbol{X})$ 等价于 $\min(-f(\boldsymbol{X}))$，所以统一用最小值表示优化设计的最优值，用求最小来描述优化设计问题，即优化设计问题的数学描述为

$$\min f(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$$

根据设计追求指标的数目（目标函数数目），优化设计可分为单目标优化设计与多目标优化设计。只有一个目标函数的优化设计问题，称为单目标优化；有多个目标函数的优化设计问题，称为多目标优化。

例如，要求结构紧凑问题。这是要求空间三维尺寸同时最小的设计问题，共有 3 个设计指标，为多目标优化问题：

指标 1　长度尽量小，用 $f_1(\boldsymbol{X})$ 表示长度为设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的函数；

指标 2　宽度尽量小，用 $f_2(\boldsymbol{X})$ 表示宽度为设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的函数；

指标 3　高度尽量小，用 $f_3(\boldsymbol{X})$ 表示高度为设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的函数。

该多目标优化问题可表示为

$$\begin{cases} \min f_1(\boldsymbol{X}) \\ \min f_2(\boldsymbol{X}) \\ \min f_3(\boldsymbol{X}) \end{cases}$$

这样，原设计问题就转换为求 3 个函数最小值的数学问题。一般来说，对于工程设计，目标函数越多，设计的综合效果越好。

对于实际的多目标优化问题，往往当其中的某一个目标函数趋向最小值时，其他几个目标函数并不会同时趋向各自的最小值，有些甚至趋向最大值。因此，从求解数学模型的角度来看，多目标优化最优解的数学意义，与单目标优化相比有很大差别。相应的求解理论与方法，多目标优化要比单目标优化复杂得多。本书将在第 6 章较

系统地介绍多目标优化设计的求解理论与方法。

1.2.3 约束条件

如上所述，设计空间内所有点的坐标都是设计方案，但并不是最好的方案，而且也并不都是可行的方案。其中有些方案明显不合理，例如，某一尺寸出现负值，面积出现负值等。有些从设计目标的角度看是最好的，但它所对应设计变量的值可能明显不合理，或违背设计提出的条件。例如，连杆机构中的杆长小于零、等于零或不适当的过长；有些方案可能违背机械的某种工作性能，如按一组设计变量组成的机构其传动角过小，使力的传递效果变坏；某些结构尺寸不能满足强度要求等。

为了能得到满足实际应用要求的最优方案，在优化设计中必须提出一些必要的条件，以便对设计变量的取值范围加以限制。这些根据设计要求而对设计变量的取值进行限制的条件，就是优化设计的约束条件（或称为设计约束）。

根据是否有约束条件，把优化问题分为约束优化（带有约束条件的优化问题）和无约束优化（没有约束条件的优化问题）。

由例 1.1 可知，在数学模型中，约束条件用数学方程来表达，称为约束方程。按其数学方程的表达形式，约束条件可分为不等式约束和等式约束，分别表示为

$$g_u(\boldsymbol{X}) = g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0, \quad u = 1, 2, \cdots, q$$
$$h_v(\boldsymbol{X}) = h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \quad v = 1, 2, \cdots, p$$

式中，$g_u(\boldsymbol{X})$和 $h_v(\boldsymbol{X})$都是设计变量的函数；q 和 p 分别表示不等式约束方程和等式约束方程的个数。不等式约束也可表示为 $g_u(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$，但其等效为 $-g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0$，所以在本书中约定，统一用 $g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0$ 的表示方法。对于等式约束，当约束方程的数目与设计变量的数目相等，即 $p=n$，且 p 个等式约束方程线性无关时，设计问题只有唯一解，无优化可言，所以，对于优化设计的数学模型，要求 $p<n$。

按约束条件的意义或性质，约束条件又可分为边界约束和性能约束两种。边界约束是对设计变量取值上、下界的约束，如给出齿轮的齿数、模数的上、下界值；性能约束是根据设计的性能（质量）要求，对设计变量作取值的限制，如机械结构的刚度要求、机械零件的强度要求、平面四杆机构设计的最小传动角等。

下面结合一个例子，一方面进一步理解约束条件的几何意义；另一方面引入一些新概念。

例 1.2 某优化问题的约束条件为 $g_1(\boldsymbol{X}) = 0.5 - x_1 \leqslant 0$，$g_2(\boldsymbol{X}) = 0.5 - x_2 \leqslant 0$，$g_3(\boldsymbol{X}) = x_1^2 - x_2 + 0.25 \leqslant 0$，$g_4(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2 - 4 \leqslant 0$。

分析 因为变量数目为 2，所以设计空间为二维平面。

根据不等式约束方程可知，当约束方程值等于零时，设计变量处于满足或违反约束条件的临界点，相应的约束函数曲线是设计变量取值的边界线。方程为

$$g_u(\boldsymbol{X}) = 0, \quad u = 1, 2, 3, 4$$

以上式为边界曲线作图如图 1.4 所示。

在图 1.4 中的由 $g_1(\boldsymbol{X})=0$、$g_3(\boldsymbol{X})=0$、$g_4(\boldsymbol{X})=0$ 围成的小区域内，任取设计点，均可满足各约束条件。由此可以进一步理解，对于约束优化问题，设计空间 $\mathbf{R}^n$ 被分成两部分。一部分是满足各设计约束的设计点的集合 $\mathscr{D}$，称为可行设计区域，或称可行域；其余部分则为非可行域。可行域内的设计点称为可行设计点，或称可行点。另外，由图 1.4 可以看出，约束条件 $g_2(\boldsymbol{X})=1-x_2\leqslant 0$ 对设计变量的取值起不到约束作用，称为冗余约束或多余约束。

若再加入 $h(\boldsymbol{X})=x_1-x_2+1=0$ 约束，则可行区域缩小到一条短线段上，如图 1.5 所示 AB 线段。

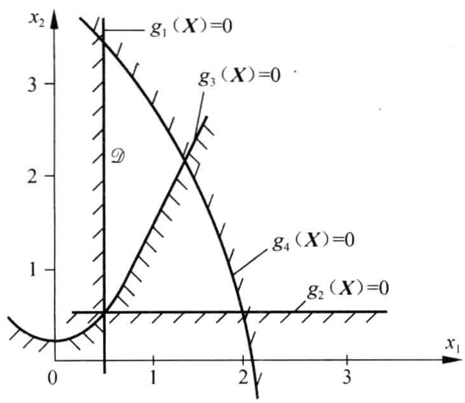


图 1.4　只有不等式约束时的可行域

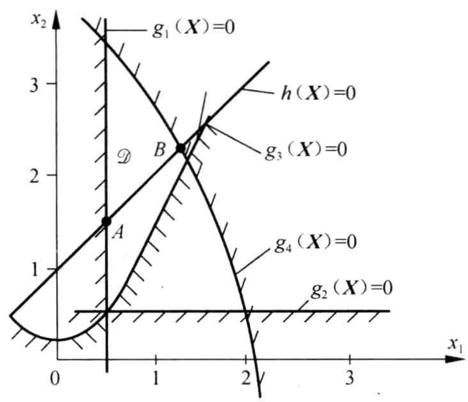


图 1.5　同时有等式和不等式约束的可行域

由图 1.5 可以看出，加入了等式约束后，加大了选取可行点的难度，即加大了优化问题的求解难度，等式约束的数目越多，求解难度越大。

不过在有些情况下，利用等式约束方程对数学模型进行改造后，能够降低优化问题的求解难度。如本例，由 $h(\boldsymbol{X})=x_1-x_2+1=0$ 可得

$$x_2 = x_1 + 1$$

将 $x_2=x_1+1$ 这一关系式回代各约束条件方程及目标函数，显然原先的二维优化问题变为关于 x_1 的一维优化问题，反而更容易求解。所以，在条件许可时，应尽量利用等式约束，消去优化问题中的某些设计变量，使优化设计的维数降低。这样既减少了约束条件，又降低了优化难度，对优化的求解是十分有利的。

1.2.4　优化设计的数学模型

根据前述优化设计数学模型三个组成部分的表示方法，可得优化设计的数学模型表示形式。

无约束优化问题的数学模型的一般形式为

$$\min f(\boldsymbol{X}),\quad \boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$$

约束优化问题的数学模型的一般形式为

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in \mathscr{D} \in \mathbf{R}^n \\
\text{s. t.} \quad & g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, \quad u = 1,2,\cdots,q \\
& h_v(\boldsymbol{X}) = 0, \quad v = 1,2,\cdots,p
\end{aligned}$$

对上述数学模型求解，就是求取可使得目标函数值达到最小时的一组设计变量值

$$\boldsymbol{X}^* = [x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]^{\mathrm{T}}$$

该设计点 $\boldsymbol{X}^*$ 称为最优点，相应的目标函数值 $f^* = f(\boldsymbol{X})^*$ 称为最优值，两者总合就是优化问题的最优解。

从数学规划论的角度看，当目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 和约束函数 $g_u(\boldsymbol{X})$、$h_v(\boldsymbol{X})$ 均为设计变量的线性函数时，称为线性规划问题，否则为非线性规划问题。机构和机械零、部件的优化设计问题，大多属于非线性规划问题。若 $\boldsymbol{X}$ 为随机值，则属于随机规划问题。

例 1.3 设计一曲柄滑块机构(图 1.6)，合理确定曲柄 1 杆长 l_1 和初位角 φ_0，及连杆 2 杆长 l_2，使滑块 3 相对曲柄轴心 A_0 的位移 s，在曲柄转角 $\varphi = 0 \sim \pi/2$ 按 $1+\cos\varphi^2$ 规律变化，且要求 $0 \leqslant l_1 \leqslant 10$，$0 \leqslant l_2 \leqslant 10$。试建立该优化问题的数学模型。

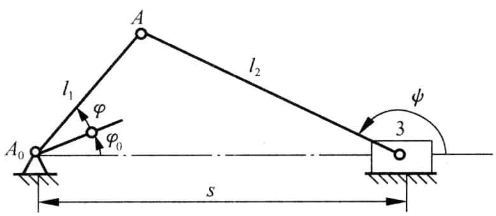


图 1.6 曲柄滑块机构

解 如图 1.6 所示，取 A_0 为坐标原点建立坐标系，可得如下投影方程式：

$$\begin{cases} l_1\cos(\varphi_0+\varphi) - l_2\cos\psi = s \\ l_1\sin(\varphi_0+\varphi) - l_2\sin\psi = 0 \end{cases}$$

联立解得

$$s = l_1\cos(\varphi_0+\varphi) - l_2\sqrt{1-\left[\frac{l_1}{l_2}\sin(\varphi_0+\varphi)\right]^2}$$

取 l_1、l_2 和 φ_0 三个参数为设计变量，分别以 x_1、x_2 和 x_3 代替，则 s 就是它们的函数。

实际上，s 在 $\varphi = 0 \sim \pi/2$ 不可能完全按 $1+\cos\varphi^2$ 变化。因此，可将 s 与$1+\cos\varphi^2$ 之差的平方和最小作为追求的设计目标，并以 $\min f(\boldsymbol{X})$表示。再考虑必要的曲柄存在条件($l_1 \leqslant l_2$)及题示的杆长约束($0 \leqslant l_1 \leqslant 10$，$0 \leqslant l_2 \leqslant 10$)，考虑到杆长的实际下界不

能为 0,所以取杆长下界为 0.1。列出相应的优化设计数学模型如下:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{X}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\varphi - s)^2 \mathrm{d}\varphi \\
& \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1+\cos^2\varphi - x_1\cos(x_3+\varphi) + x_2\sqrt{1-\left[\frac{x_1}{x_2}\sin(x_3+\varphi)\right]^2} \right\} \mathrm{d}\varphi \\
& \boldsymbol{X} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^3 \\
\text{s. t.} \quad & g_1(\boldsymbol{X}) = x_1 - x_2 \leqslant 0 \\
& g_2(\boldsymbol{X}) = 0.1 - x_1 \leqslant 0 \\
& g_3(\boldsymbol{X}) = x_1 - 10 \leqslant 0 \\
& g_4(\boldsymbol{X}) = 0.1 - x_2 \leqslant 0 \\
& g_5(\boldsymbol{X}) = x_2 - 10 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

本例学习的要点小结:

(1) 建立数学模型的流程与格式。

(2) 如何将设计的要求表达为优化设计的目标函数。本例设计要求是在从动件上实现给定的运动规律,经分析将其表达为从动件的实际运动规律与给定的运动规律误差最小,即将 s 与 $1+\cos\varphi^2$ 之差的平方和最小作为目标函数,用误差最小表达了“实现给定的运动规律”。

(3) 取杆长下界为 0.1 的实际意义在于:若直接将 $0\leqslant l_1\leqslant 10$,$0\leqslant l_2\leqslant 10$ 表达成约束方程,如 $g_2(\boldsymbol{X})=-x_1\leqslant 0$,则在数值求解时,若在边界 $g_2(\boldsymbol{X})=-x_1=0$ 上取设计点,是不违反约束的,即从数值求解的角度看,边界 $g_2(\boldsymbol{X})=-x_1=0$ 上的任一点都是可行的,但 $g_2(\boldsymbol{X})=-x_1=0$ 意味着杆长为零,没有实际的应用意义。所以要综合考虑设计要求和变量具体取值的实际应用意义来确定边界条件。

(4) 如上所述,本例目标函数的抽象表达式为(目标值 − 实际值)^2,这一形式的数学模型具有很广的应用价值,不但可以从实现给定规律推广到实现给定的运动轨迹等,还可以应用到方程求根(目标值为 0,方程值就是实际值)、方程求解、曲线拟合等数值求解。

例 1.4 欲选 4 种球轴承,个数分别为 x_1、x_2、x_3 和 x_4,单价分别为 c_1、c_2、c_3 和 c_4。要求 $x_1+x_2\geqslant 24$,$x_3+x_4\geqslant 32$,$x_1+x_2+x_3\geqslant 36$,且总价格最低。

解 根据该优化问题给定的条件与要求,取设计变量为 $\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^{\mathrm{T}}$,总价格为目标函数,即

$$
\min f(\boldsymbol{X}) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4
$$

考虑题示的约束条件之后,该优化问题数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{X}) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4 \\
& \boldsymbol{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^4 \\
\text{s. t.} \quad & g_1(\boldsymbol{X}) = 24 - (x_1 + x_2) \leqslant 0 \\
& g_2(\boldsymbol{X}) = 32 - (x_3 + x_4) \leqslant 0
\end{aligned}
$$

$$g_3(\boldsymbol{X}) = 36 - (x_1 + x_2 + x_3) \leqslant 0$$

本例学习的要点是将 $g_u(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$ 的要求，在建立数学模型时将其转换为 $g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0$ 的形式。

在以上两个示例中，例 1.3 为非线性规划问题，例 1.4 为线性规划问题。

1.3 习　　题

1.1 某厂每日(8h 制)产量不低于 1800 件。计划聘请两种不同级别的检验员，一级检验员标准为：速度为 25 件/h，正确率为 98%，计时工资为 4 元/h；二级检验员标准为：速度为 15 件/h，正确率为 95%，计时工资 3 元/h。检验员每错检一件，工厂损失 2 元。现有可供聘请检验员人数为：一级 8 人和二级 10 人。为使总检验费用最省，该厂应聘请一级、二级检验员各多少人?

1.2 已知一拉伸弹簧受拉力 F，剪切弹性模量 G，材料重度 r，许用剪切应力 $[\tau]$，许用最大变形量 $[\lambda]$。欲选择一组设计变量 $\boldsymbol{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}} = [d \quad D_2 \quad n]^{\mathrm{T}}$ 使弹簧质量最小，同时满足下列限制条件：弹簧圈数 $n \geqslant 3$，簧丝直径 $d \geqslant 0.5$，弹簧中径 $10 \leqslant D_2 \leqslant 50$。试建立该优化问题的数学模型。

注 弹簧的应力与变形计算公式如下：

$$\tau = k_s \frac{8FD_2}{\pi d^3}, \quad k_s = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}, \quad c = \frac{D_2}{d}(\text{旋绕比}), \quad \lambda = \frac{8F_n D_2^3}{Gd^4}$$

1.3 某厂生产一个容积为 $8000\mathrm{cm}^3$ 的平底、无盖的圆柱形容器，要求设计此容器消耗原材料最少，试写出这一优化问题的数学模型。

1.4 要建造一个容积为 $1500\mathrm{m}^3$ 的长方形仓库，已知每平方米墙壁、屋顶和地面的造价分别为 4 元、6 元和 12 元。基于美学的考虑，其宽度应为高度的两倍。现欲使其造价最低，试导出相应优化问题的数学模型。

1.5 绘出约束条件

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 8, \quad -2x_1 + x_2^2 \leqslant 8, \quad x_1 x_2 \leqslant 4$$

所确定的可行域。

1.6 试在三维设计空间中，绘制下列设计变量所对应的向量。

$$\boldsymbol{X}_1 = [1 \quad 3 \quad 2]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X}_2 = [2 \quad 3 \quad 4]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X}_3 = [4 \quad 1 \quad 4]^{\mathrm{T}}$$