数理经济现代分析基础

Foundation of Modern Analysis in Mathematical Economics

张从军　王宏勇　史　平　宋瑞丽

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数理经济现代分析基

SHULI JINGJI XIANDAI FENXI JICHU

Foundation of Modern Analysis in Mathematical Economics

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书介绍数理经济的现代分析工具，以现代分析为基础，以经济应用为归结。本书数学知识跨度较大，但不追求纯数学的完整证明；经济应用部分的篇幅不长，但可足见数学工具的作用，目的是给学生提供比较系统而又容易理解的现代分析基础内容。希望读者通过本书的学习，既能学会以现代分析的有关知识作为工具，又能了解现代分析在数理经济等方面的应用，为进一步的经济研究和数学研究奠定基础。

本书包括泛函分析、凸分析、时间序列分析、随机分析、分形基础与分形市场分析、集值分析的基本内容和相关经济应用。

本书适合作为高等学校经济、管理类各专业本科高年级学生和研究生的相关课程教材，也可作为数学类专业的金融、统计方向的专业课教材，还可供有关经济工作者、数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理经济现代分析基础／张从军等编著. --北京：高等教育出版社，2012.1

ISBN 978-7-04-034123-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数理经济学-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 257057 号

策划编辑 张长虹　　责任编辑 张长虹　　封面设计 李卫青　　版式设计 马敬茹

插图绘制 尹　莉　　责任校对 胡美萍　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	19	版　　次	2012 年 1 月第 1 版
字　　数	350 千字	印　　次	2012 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	35.50 元

物 料 号　34123-00

前　言

经济学是一门研究人类经济行为和经济现象及人们在经济活动中如何进行权衡取舍的学问。正是由于资源的稀缺性与人类的需求的无止境性这一对基本冲突才产生了经济学，逼迫人们作出权衡取舍的选择，尽可能有效地利用资源，用有限的资源最大限度地满足人们的需求。现代经济学是按照科学的方法运用分析工具系统地探索人类经济行为和社会经济现象的一门科学。

任何一个规范经济理论的分析框架基本上由以下五个部分组成：界定经济环境、设定行为假设、给出制度安排、选择均衡结果、进行评估比较。以上五部分可以说是所有规范经济理论一致使用的分析框架，无论其中使用数学较多还是较少。

这样的分析框架，往往需要一系列强有力的“分析工具”，这种工具的力量在于用较为简明的数学结构深入分析纷繁错综的经济行为和现象。所以现代经济学中几乎每个领域或多或少都用到数学、统计及计量经济学方面的知识。

随着现代经济学的教育和研究在中国迅速地发展和深入，越来越多的人认识到数学在经济学中的重要性，想学好数学，但面对数学纷繁复杂的类目，许多人不知道学什么好。我们认为，要学好经济学，至少要掌握微积分、线性代数、概率论与数理统计的基本内容。要研究经济学，就要掌握现代经济学的基本分析框架和研究方法，并学习数理经济的现代分析工具，学习了这些知识，学起现代经济学来就会感到相对容易，这些数学工具是学好高级微观经济学和高级宏观经济学重要的数学知识。这些数学工具对培养逻辑分析能力和创造性思维能力大有作用。许多学生害怕现代经济学中的许多理论论证，其原因就是没有坚实的现代分析基础。即使今后不从事研究工作，具备了逻辑分析和创造性思维能力对日常工作也会有一定帮助。

因此，如何开设经管类专业数学课程，如何通过此类课程提高财经人才的数学素养，怎样使经济数学课程的体系更趋符合财经专业的培养目标，怎样兼顾经济数学课程的理论性与应用性、思想性与工具性？这些都是当前值得重视的课题。作为我们主持承担的全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题、中国高等教育学会“十一五”教育科学研究规划课题、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题的研究内容之一，结合一线教学实践，我们多年来一直进行着探索与实践。现在的这本《数理经济现代分析基础》就是我们对上述问题思考

与实践所作的一点尝试。

本书以数学为基础，结合经济应用，数学知识跨度虽大，但不追求纯数学的完整证明；经济应用篇幅不长，但可足见数学工具的作用，目的是给学生提供比较系统而又容易理解的现代分析基础内容。希望读者通过本书的学习，既能学会以现代分析的有关知识作为工具，又能了解现代分析在数理经济等方面的应用，为进一步的经济研究和数学研究奠定基础。

本书是在作者为数学专业和经管专业高年级本科生和研究生开设的相关课程基础上经整合、加工、修改而成的。这些课程已开设多年。基本内容有：泛函分析、凸分析、时间序列分析、随机分析、分形基础与分形市场分析、集值分析等。

鉴于本书是向读者介绍数理经济现代分析的方法与工具，也考虑到读者关注的重点和本书的篇幅有限，对某些基本而又必要的数学结果，一般只给出了结论而省略其证明。而对涉及需要读者掌握其思想方法的结论及经济应用，本书都给出了较详细的证明。为使读者便于学习，也兼顾不同读者的基础和兴趣，本书在编排上自成体系，各章相互独立。

我们希望读者通过本书，既可了解现代数学的经济应用和经济问题的数理分析方法，又可作为工具书随时对某些问题进行查阅。特别，对于经管类各专业的学生，我们希望通过本书，让他们了解经济学的数理分析方法，掌握处理经济问题的一些现代数学工具；对于数学类专业的学生，我们希望通过本书，让他们熟悉现代数学工具的经济应用背景。同时，我们也希望本书既是一本数理经济现代分析的入门著作，又能将读者引向某些数理经济研究领域的前沿，以便在这些方向做进一步的研究。

本书由张从军教授提出编写思想、列出内容框架，由史平教授编写第一、二章，宋瑞丽博士编写第三、四章，王宏勇教授编写第五章，张从军教授编写第六章。最后全书由张从军教授统稿、定稿完成。

本书可供经管类各专业和数学类专业的金融、经济统计方向的本科高年级学生和研究生使用，也可供有关经济工作者、数学工作者参考。

高等教育出版社李艳馥、马丽、张长虹对本书的出版给予了大力支持，在此我们表示衷心感谢！我们还要感谢南京财经大学的有关同事们，是他们的鼓励和支持促成了本书的完成。本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意。

编者

于南京财经大学

2011 年 3 月

目　录

第一章　泛 函 分 析

泛函分析是 20 世纪发展起来的一门新的学科. 而产生泛函分析的背景是变分法、集合论、积分方程的发展. 德国数学家 D. Hilbert、波兰数学家 S. Banach、匈牙利 — 美国数学家 J. von Neumann 等人的开创性研究工作为泛函分析的发展作出了重要贡献. 泛函分析是一门最具综合性的基础学科, 其特点是分析的课题、代数的方法、几何的观点, 再加上广阔的应用前景. 如今泛函分析的研究成果已经广泛地应用于各种微分方程、积分方程和其他类型方程的求解, 其触角已伸向计算数学、控制理论、最优化理论、动力系统、经济学、金融学等许多领域.

本章共五节: 第一节介绍赋范线性空间与 Banach 空间的基础概念以及几个常见的 Banach 空间. 第二节介绍 Hilbert 空间的概念及其理论. 第三节讨论了有界线性算子与有界线性泛函; 对三个著名定理, 即 Banach-Steinhaus 定理、开映射定理和 Hahn-Banach 定理进行了详细论证; 此外还介绍了共轭空间、共轭算子、弱收敛与自反空间. 第四节讨论了有界线性算子的正则集与谱及紧算子的谱理论. 最后一节讨论了泛函分析在金融学中的应用. 本章所需预备知识为数学分析、线性代数、实变函数论、复变函数、微分方程的基本内容.

§1.1　赋范线性空间与 Banach 空间

在泛函分析中, 特别重要和有用的一类空间是赋范线性空间.

1.1.1　赋范线性空间的定义

定义 1.1.1　设 X 是实 (或复) 的线性空间, 如果对每个向量 $x \in X$, 有一个唯一确定的实数与之对应, 记为 $\|x\|$, 满足:

(1) $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, 其中 α 为任意实 (或复) 数;

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, x, y \in X$,

则称 $\|x\|$ 为向量 $x \in X$ 的范数, 称 X 按范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间.

注 1.1.1　为了叙述方便我们对线性空间中的零向量与数零的表示不加以区分. 除特殊说明外, 所有赋范线性空间中的范数都用 $\|\cdot\|$ 表示.

下面引进赋范线性空间中点列的收敛概念.

定义 1.1.2 设 $\{x_n\}$ 为赋范线性空间 X 中的点列. 如果存在 $x_0 \in X$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|x_n - x_0\| \to 0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 记为 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

注 1.1.2 赋范线性空间中的收敛点列的极限是唯一的.

定义 1.1.3 设 $E \subset X$, 如果对于 E 中的任一点列 $\{x_n\}$, 当 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 时, 都有 $x_0 \in E$, 则 E 称为 X 中的闭集. 如果 E 的补集 $E^c = X \backslash E$ 是闭集, 则称 E 为 X 中的开集. 对任何 $E \subset X$, 称包含 E 的最小闭集为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$; 称 E 包含的最大开集为 E 的内部, 记作 E^{i}. 如果 $\overline{E} = X$, 则称 E 是 X 的稠密子集, 或称 E 在 X 中稠密.

1.1.2　Banach 空间及其实例

定义 1.1.4 赋范线性空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 列或基本列, 是指对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. 如果 X 是完备的, 即 X 中的任意 Cauchy 列必收敛于 X 中的某一点, 则称 X 为 Banach 空间.

以下我们列举一些常用的 Banach 空间.

例 1.1.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$. 对每个 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义范数 $\|x\| = (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, 则 $\mathbb{R}^n$ 按此范数构成 Banach 空间. □

例 1.1.2 连续函数空间 $C[a,b]$, 按范数 $\|x\| = \max\{|x(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}$, $x \in C[a,b]$, 构成 Banach 空间. □

例 1.1.3 收敛序列空间 $l^p, p \geqslant 1$. 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 是实 (或复) 数列, 如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$, 则称数列 $(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 是 p 次收敛数列, p 次收敛数列的全体记为 l^p, 则 l^p 按范数 $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 构成 Banach 空间.

事实上, 由 Hölder 不等式及 Minkowski 不等式可知 l^p 按范数 $\|x\|_p$ 构成赋范线性空间. 设 $\{x_n\} \subset l^p$ 为 Cauchy 列, 其中 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots)$, 则对每个 i, $\{\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots\}$ 也是 Cauchy 列, 从而有 $\xi_i = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_i^{(n)}$. 令 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, 下面证明 $x \in l^p$. 再由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n, m \geqslant N$ 时, 有 $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. 因此对于任意 k, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 都有

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p.$$

固定上述 n, 让 $m \to \infty$, 得 $\sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \varepsilon^p$. 再令 $k \to \infty$, 知当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p,$$

故 $x-x_n\in l^p(\forall n\geqslant N)$, 因此 $x=x-x_n+x_n\in l^p$, 以及当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\|x_n-x\|_p\leqslant\varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 在 l^p 中收敛于 x, 从而 l^p 是完备的. □

例 1.1.4 有界序列空间 l^∞, 即表示有界实 (或复) 数列全体. 对每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$, 定义范数 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{j\geqslant 1}|\xi_j|$, 则 l^∞ 按范数 $\|x\|_\infty$ 是一个 Banach 空间. □

例 1.1.5 空间 $L^p(\mu)$ $(p\geqslant 1)$. 设 μ 是可测空间 X 上的正测度, f 是 X 上的可测函数, $p\geqslant 1$. 如果 $|f|^p$ 在 X 上可积, 称 f 是 X 上的 p 次幂可积函数. 用 $L^p(\mu)$ 表示所有 X 上的 p 次幂可积函数的全体, 其中两个几乎处处相等的函数看做是同一元, 在 $L^p(\mu)$ 中按通常方式定义线性运算, 则 $L^p(\mu)$ 是一个线性空间. 再定义

$$\|f\|_p=\left\{\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\right\}^{\frac{1}{p}},$$

则 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(\mu)$ 上的一个范数, 且 $L^p(\mu)$ 按范数 $\|\cdot\|_p$ 是一个 Banach 空间. 详细的证明见文献 [6]. □

例 1.1.6 空间 $L^\infty(\mu)$. 设 μ 是可测空间 X 上的正测度, f 是 X 上的可测函数, 如果存在可测子集 X_0, 使得 $\mu(X_0)=0$ 且 f 在 $X\backslash X_0$ 上是有界的, 则称 f 在 X 上是本质有界的. 用 $L^\infty(\mu)$ 表示 X 上本质有界可测函数全体按通常方式定义线性运算构成的线性空间. 与例 1.1.5 相仿, 将 $L^\infty(\mu)$ 中两个几乎处处相等的函数看做是同一元. 在 $L^\infty(\mu)$ 中定义

$$\|f\|_\infty=\inf_{\mu(X_0)=0}\sup_{x\in X\backslash X_0}|f(x)|,$$

称 $\|f\|_\infty$ 为 f 的本质上确界, 则它是 $L^\infty(\mu)$ 上的范数, 且 $L^\infty(\mu)$ 按此范数是一个 Banach 空间. 详细的证明见文献 [6]. □

注 1.1.3 如果熟悉一般测度论, 取 $X=\mathbb{N}_+$ (正整数集), μ 是 X 上的"记数测度", 那么可以看出, l^p 实际上就是 $L^p(\mu)$ 的情况, 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$.

这里我们介绍 Banach 空间的一个判别定理.

定理 1.1.1 赋范线性空间 X 是 Banach 空间的充分必要条件为 X 中的每个绝对收敛的级数都收敛, 即若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$, 则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\to x\in X$ $(n\to\infty)$.

证明 设 X 是 Banach 空间且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$, 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, 则对于 $n>m$, 有

$$\|S_n-S_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|\to 0\ (n,m\to\infty),$$

于是点列 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此 $\{S_n\}$ 收敛.

反之, 设 X 中的每个绝对收敛的级数都收敛, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 则从 $\{x_n\}$ 中选取子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}\ (k=1,2,\cdots).$$

于是级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|$ 收敛, 因此级数 $x_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 必收敛, 其前 k 项的部分和是 x_{n_k}, 设 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$, 即 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 故对于任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使当 $m,n>N$ 时有 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$, 因此, 对于充分大的 k, 都有 $\|x_n-x_{n_k}\|<\varepsilon$, 再令 $k\to\infty$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon$, 所以 $\{x_n\}$ 收敛, 即 X 完备. □

注 1.1.4 从以上定理的证明中看出, 当某一个 Cauchy 列有一个收敛的子列时, 则该 Cauchy 列本身必收敛.

1.1.3 有限维赋范线性空间的特征

若线性空间 X 中存在 n $(n\geqslant 1)$ 个向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 使得任意的 $x\in X$ 可以唯一地表示成

$$x=\sum_{k=1}^{n}c_ke_k,$$

则称 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基, 称 n 为 X 的维数, 而称 X 为 n 维线性空间. 如果 X 仅含零向量, 则称 X 为 0 维线性空间. 所有 n 维线性空间 $(n=0,1,2,\cdots)$ 统称为有限维线性空间, 非有限维线性空间称为无限维线性空间.

先引进赋范线性空间之间拓扑同构的概念.

定义 1.1.5 设 X,Y 都是赋范线性空间. 如果满足下面的条件, 就称 X,Y 拓扑同构:

(1) X,Y 作为线性空间是同构的, 从 X 到 Y 上的同构映射用 T 表示;

(2) T 是同胚映射, 即 T, T^{-1} 都是连续映射.

定理 1.1.2 任意两个同为实 (或复) 的 n 维赋范线性空间必拓扑同构.

证明 不妨设 X 是实的 n 维赋范线性空间, 且 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一组基. 下面证明 X 与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构. 任取 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义映射 $T: \mathbb{R}^n \to X$ 如下

$$T\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

由于 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一组基, 故线性无关, 于是 T 是单射. 其次, 对任何 $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n \in X$, 则有 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, 且 $T\eta = y$, 故 T 是满射. 此外, 容易证明 T 是同构映射.

由不等式 $\|T\xi\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n\| \leqslant m \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $m = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 可知

$$\|T\xi - T\eta\| \leqslant m \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

故 T 连续.

下面证明 T^{-1} 连续. 对 $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \in X$, 定义 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \|x\|$, 则 f 连续. 由于 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 线性无关, 则 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面 S 上的任一点处的值都大于零, 而 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 因此 f 在 S 上有最小值 $m' > 0$, 于是 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \|x\| \geqslant m'$.

因此对任意的 $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \in X$, 且 $x \neq 0$, 有

$$\left\| \frac{x}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\| \geqslant m',$$

故

$$\|x\| \geqslant m' \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $\|T^{-1}x\| \leqslant \dfrac{1}{m'}\|x\|$. 由此可知, 对任何 $x, y \in X$, 有 $\|T^{-1}x - T^{-1}y\| \leqslant \dfrac{1}{m'}\|x - y\|$, 故 T^{-1} 连续. 因此 X 与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构, 于是任意两个实的 n 维赋范线性空间必拓扑同构. □

推论 1.1.1 任一 n 维赋范线性空间必为 Banach 空间. 任一赋范线性空间的有限维子空间也必为 Banach 空间, 因而是闭子空间.

我们为了得到有限维赋范线性空间的特征性质, 首先给出下列有用的 F. Riesz 引理.

引理 1.1.1 设 X_0 是赋范线性空间 X 的真闭子空间, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $\|x_0\| = 1$ 且对每一 $x \in X_0$, 有 $\|x - x_0\| > 1 - \varepsilon$.

证明 任取 $x_1 \in X \backslash X_0$, 记 $d = \inf\limits_{x \in X_0} \|x_1 - x\|$. 因为 X_0 是 X 的闭子空间, 所以 $d > 0$.

不妨设 $\varepsilon < 1$, 于是 $\dfrac{d}{1-\varepsilon} > d$, 由 d 的定义, 存在 $x_2 \in X_0$, 使得 $\|x_1 - x_2\| < \dfrac{d}{1-\varepsilon}$.

令

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|},$$

则 $\|x_0\| = 1$, 并且对任意 $x \in X_0$, 有 $\|x - x_0\| \geqslant \dfrac{d}{\|x_1 - x_2\|} > 1 - \varepsilon$. □

定理 1.1.3 赋范线性空间 X 为有限维的充分必要条件是 X 中单位球面是列紧集, 即它的任意无穷子集必包含一个收敛点列.

证明 设 X 是有限维的, 由定理 1.1.2 知, X 中任意有界集都是列紧集.

反之, 设单位球面 $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是列紧的, 假设 X 是无限维的. 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 是由 $\{x_1\}$ 生成的线性子空间, 则 X_1 是 X 的真闭子空间, 于是由引理 1.1.1, 存在 $x_2 \in S$, 使得对于每一 $x \in X_1$ 有 $\|x_2 - x\| > \dfrac{1}{2}$, 特别地, $\|x_2 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$. 记 X_2 是由 $\{x_1, x_2\}$ 生成的线性子空间. 同理, X_2 是 X 的真闭子空间, 于是存在 $x_3 \in S$, 使得对于每一 $x \in X_2$ 有 $\|x_3 - x\| > \dfrac{1}{2}$, 特别地, $\|x_3 - x_2\| > \dfrac{1}{2}$, $\|x_3 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$. 如此过程继续下去, 由于 X 是无限维的, 故可以找出 S 中的点列 $\{x_n\}$, 使得对于 $i \neq j$, 有 $\|x_i - x_j\| > \dfrac{1}{2}$. 显然 $\{x_n\}$ 不可能有收敛子列, 这与 S 的列紧性相矛盾. 所以 X 是有限维的. □

§1.2 Hilbert 空间

早在泛函分析成为一门独立的学科前, Schmidt 把 Hilbert 在研究积分方程的求解与特征值理论时使函数等同于 Fourier 系数集的思想, 抽象为一般的 l^2 空间并导出其中的规范正交系. 在二维及三维欧氏空间中有两个基本概念, 即向量的长度与两向量的夹角. 赋范线性空间中元素的范数便是长度概念的推广, 但夹

角在赋范线性空间中没有对应概念. 在欧氏空间中有内积与夹角的关系. 因此为了将角度以及与角度有紧密联系的一些重要概念, 如正交、正交投影、正交分解等推广到更加一般的情形, 一种直接的方法是先将内积的概念进行推广, 然后利用内积定义正交等概念. 因此 Hilbert 空间几何学是欧氏空间几何学的抽象和推广. 在泛函分析中, 人们经常循着这样类似的思想而逐步深入.

1.2.1 Hilbert 空间的概念及实例

定义 1.2.1 设 H 为实 (或复) 数域 K 上的线性空间, 若 H 中的任意一对元素 x,y 恒对应 K 中一个数, 记为 (x,y), 满足:

(i) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),\alpha\in K$;

(ii) $(x+y,z)=(x,y)+(y,z)$, 对任意 $x,y,z\in H$;

(iii) 当 K 为实数域时, $(x,y)=(y,x)$; 当 K 为复数域时, $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(iv) $(x,x)\geqslant 0$, 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$,

那么称 H 为实 (或复) 内积空间, 简称为内积空间, (x,y) 称为 x 与 y 的内积.

注 1.2.1 (1) 对任意 $x\in H$, 定义 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 则有 Schwarz 不等式: 对 $x,y\in H$, $|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$.

(2) 三点不等式: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

(3) H 按范数 $\|\cdot\|$ 是赋范线性空间.

(4) 内积 (x,y) 是 x,y 的连续函数.

(5) 内积与范数有下列极化恒等式:

当 K 为实数域时, $(x,y)=\dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$,

当 K 为复数域时, $(x,y)=\dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$.

(6) 不难证明对 H 中任何两个向量 x,y, 成立平行四边形公式 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. 反之, 若 H 是赋范线性空间, 其范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式, 那么一定可在 H 中定义内积 (x,y), 使 $\|x\|$ 就是由内积 (x,y) 导出的范数.

定义 1.2.2 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

下面介绍几个常用的 Hilbert 空间.

例 1.2.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$.

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 中分别定义内积 $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$, 和 $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_k}$, 其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 都是 Hilbert 空间. □