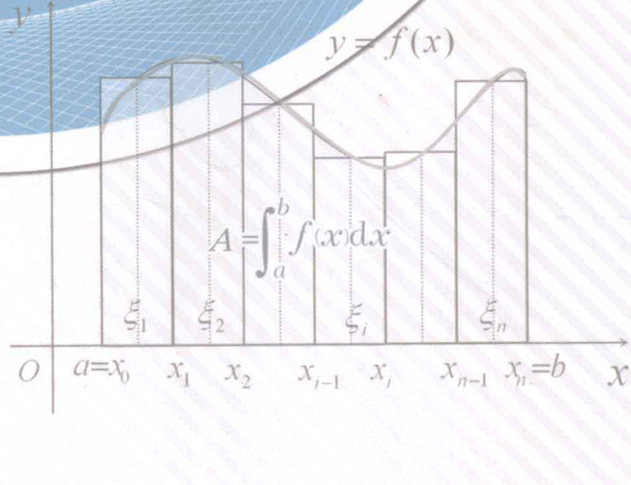
高等数学

GAODENG SHUXUE

王海英 编著

王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

王海英 编著
王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书共分为11章，主要内容有：集合与函数、数列极限、函数极限、连续性、导数与中值定理、不定积分、定积分、多元函数的微分理论、重积分（二重积分与三重积分）、无穷级数、广义级数与Euler积分等。该书选用大量的引入案例、例题，还配有大量的应用实例，每节后均配有相应的习题。

本书可作为高等院校（含继续教育）文科、工科的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 /王海英编著. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2011.9

ISBN 978-7-5124-0567-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第161047号

高等数学

王海英 编著

王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿

责任编辑 王慕冰 龚荣桂 朱胜军

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1 092 1/16 印张：19.75 字数：518千字

2011年9月第1版 2011年9月第1次印刷 印数：3 000册

ISBN 978-7-5124-0567-7 定价：34.00元

前　言

当前,我国高等教育蓬勃发展,高校教育改革不断深入,高等数学作为各院校开设的最普遍的基础课程,其所担任的课程角色、教学地位显得更为重要。为了适应21世纪“高等数学”这门课程教学内容与课程体系改革的需要,编写该教材。

在本书的编写过程中,一直遵循循序渐进的原则,深入浅出,从古到今,从最为典型的自然科学、物理学、经济学等实际例子出发,从直观的几何现象出发,引出高等数学中的每个基本概念,如极限、导数和积分等。根据这些数学知识发展的历程,按照当代大学生的逻辑思维,给出所对应的理论体系。为了对应于极限、导数和积分等高等数学中最基本参数的引入,再反过来,给出它们在不同实际问题中的应用,充分体现出学习高等数学的目的就是解决实际问题。

本书的每个章节均从实际问题引入相应概念,然后讨论给出此概念的理论体系,最后应用这些理论体系解决更广泛的实际问题。该教学过程完全迎合了我国各高校大学生的逻辑思维特点,也解决了大学生的普遍问题:学高等数学有什么用处? 因此,无论从本教材的内容安排,还是从本教材的具体内容,都充分让当代大学生处处体会到高等数学的无穷魅力。

在本书的编写过程中,编者重点突出解决实际问题的思想与思路。根据多年教学一线的教学经验,编者认为,让当代大学生学会如何从实际问题高度抽象出关键问题、如何掌握解决该问题的思想、如何培养学生“打破沙锅问到底”的“追究”精神,这些均是高等教育的具体目标。在整本教材中,都体现出该教学理念。

在本教材的每章之后,都会附有与章节相“吻合”的著名数学家的简介。一般来说,高等数学的每个理论体系都会有几个关键的“天才”数学家,他们不仅推动整个数学理论体系的发展,而且他们自身的生平、贡献、传记都是当代大学生的一本史实性教材,从中大学生们不仅可以了解数学发展史的一些知识,而且能让他们看到数学家们在追求自然科学的真理过程中所闪烁出来的人格魅力,这些均是高等数学这门课程的教育特色。

由于编者水平有限,书中难免有缺陷和错误,诚恳希望读者予以批评指正。最后,再次感谢本书所参考的书籍、文献、百度网站等涉及的相关作者。

王海英
中国地质大学(北京)
2011年8月

目　　录

第1章 函 数

函数是生产实践中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是数学研究的基本对象。初等数学研究的"数"是常数或常量，研究的几何形体是相互孤立、不变的规则几何形体，主要研究常数间的代数运算和不同形体内部及相互间的关系。高等数学研究的"数"是变量或变数，研究的几何形体是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边梯形和曲面等。高等数学将数和几何形体紧密结合起来，以函数为基本研究对象，以极限方法为基本研究方法，动态地、整体地、普遍地揭示变量间的变化规律。本章主要给出函数的概念及其几种特性，是本书必要的基础知识。

1.1 集 合

集合论是现代数学各科的基础，是德国数学家康托(George Cantor，1845—1918)于 1874 年创立的。1876—1883 年康托发表了一系列有关集合论的文章，对集合理论进行了深入的探讨。本节只是介绍集合论最基础的知识，主要内容包括集合及其运算、性质等。此外，还要介绍实数集的有关知识。

1.1.1 集合的概念

集合是数学中一个基本的概念，我们可通过例子来理解它。例如，教室里的全部学生、小王书包里的全部东西、图书馆的藏书等均构成不同的集合。又如，有理数或实数的全体也分别构成集合，通常称为有理数集或实数集。

一般地，具有某种属性的事物的全体称为集合。集合一般用大写字母表示，例如 A,B,C,L；组成该集合的事物称为该集合的元素，一般用小写字母表示，例如 a,b,c,l。若事物 a 是集合 A 的元素，则记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"；若事物 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A"。显然，事物 a 与集合 A 的关系要么 $a\in A$，要么 $a\notin A$。若集合的元素个数有限，则称为有限集；否则，称为无限集。

集合的常用表示方法有两种。一种是列举法。它是将集合中的元素全部列出来，元素之间用逗号","隔开，并用花括号"{ }"在两边括起来，表示这些元素构成整体。一般地，若集合 A 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成，则表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。

例 1.1 $A=\{a,b,c,d\}$；

$B=\{1,2,3,\cdots\}$；

$C=\{$桌子，台灯，钢笔，计算机，扫描仪，打印机$\}$；

$D=\{a,a^2,a^3,\cdots\}$。

另一种集合的表示方法称为叙述法。它是利用一项规则，概括集合中元素的属性，以便决

定某一事物是否属于该集合的方法。设 x 为某类对象的一般表示，$P(x)$ 为关于 x 的一个命题，用 $\{x|P(x)\}$ 表示"使 $P(x)$ 成立的对象 x 所组成的集合"，其中竖线"|"前写的是对象的一般表示，右边写出对象应满足(具有)的属性。也就是说，若集合 A 由具有性质 P 的元素 x 构成，则记 $A=\{x|x$ 具有性质 $P\}$。

例 1.2 全体正奇数集合表示为 $O=\{x|x$ 是正奇数$\}$；所有偶自然数集合可表示为 $E=\{m|2|m$ 且 $m\in\mathbf{N}\}$，其中 $2|m$ 表示 2 能整除 m。

根据集合的定义，它本身就具有互异性、无次序性等性质，由此，两个集合 A,B 相等，当且仅当两个集合有完全相同的元素，记作 $A=B$；否则，两个集合 A,B 不相等，记作 $A\neq B$。例如，$\{1,2,4\}=\{1,4,2\}$，$\{1,2,4\}=\{1,2,2,4\}$，$\{\{1,2\},4\}\neq\{1,2,4\}$，$\{1,3,5,\cdots\}=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$。

1.1.2 特殊集合：空集、全集和幂集

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$。例如，方程 $x^2+1=0$ 的实根所构成的集合就是空集。显然，$\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 有着本质的不同。

定义 1.1 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集，记作 E。

对于任意 $x\in A$，因为 $A\subseteq E$，所以 $x\in E$。全集只包含与讨论有关的所有对象，并不一定包含一切对象与事物。例如：在初等数论中，全体整数组成了全集；方程 $x^2+1=0$ 的解集合，在全集为实数集时是空集，而全集为复数集时解集合就不再是空集，此时解集合为 $\{i,-i\}$，其中 $i^2=1$。

定义 1.2 给定集合 A，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，称为集合 A 的幂集。记为 $P(A)$(或记为 2^A)，即 $P(A)=\{X|X\subseteq A\}$。

例如，设 $A=\{0,1,2\}$，则 $P(A)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$；再如，$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$P(\{a\})=\{\varnothing,\{a\}\}$，$P\{\varnothing\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$等。

定理 1.1 设有限集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $|P(A)|=2^n$，其中 $|P(A)|$ 表示集合 $P(A)$ 中元素的个数。

证明 集合 A 的 $m(m=0,1,2,\cdots,n)$ 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数，即 C_n^m，故 $P(A)$ 的元素个数为

$$|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m$$

根据二项式定理 $(x+y)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m x^m y^{n-m}$，令 $x=y=1$，得 $2^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m$，故 $|P(A)|=2^n$。

1.1.3 集合间的关系

"集合"、"元素"、元素与集合间的"属于"关系是三个没有精确定义的原始概念，对它们仅给出了直观的描述，以说明它们各自的含义。现在，利用这三个概念去定义集合间的相等关系、集合的包含关系、集合的子集和幂集等概念。

定义 1.3 设 A,B 是任意两个集合，如果 A 中的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 A 包含于 B 内，或 B 包含 A。记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。如果 A 不是 B 的子集，则记为 $A\not\subseteq B$(读作"A 不包含在 B 内")。

例如，设 **N** 为自然数集合，**Q** 为一切有理数组成的集合，**R** 为全体实数集合，**C** 为全体复数集合，则 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$，$\{1\}\subseteq\mathbf{N}$，$\{1,1.2,9.9\}\subseteq\mathbf{Q}$，$\{\sqrt{2},\pi\}\subseteq\mathbf{R}$。

定义 1.4　如果集合 A 的每一元素都属于集合 B，而集合 B 中至少有一元素不属于 A，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subset B$。

例如，$\{a,b\}$ 是 $\{a,b,c\}$ 的真子集，**N** 是 **Q** 的真子集，**Q** 是 **R** 的真子集，**R** 是 **C** 的真子集。

值得注意的是，符号"$\in$"和"$\subseteq$"在概念上有区别："$\in$"表示元素与集合间的"属于"关系，而"$\subseteq$"表示集合间的"包含"关系。

定理 1.2　集合 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

定理 1.3　对于任一集合 A，$\varnothing\subseteq A$，且空集是唯一的。

证明　假设 $\varnothing\subseteq A$ 为假，则至少存在一个元素 x，使 $x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$，因为空集 $\varnothing$ 不包含任何元素，所以这是不可能的。

设 $\varnothing'$ 与 $\varnothing$ 都是空集，由上述可知，$\varnothing'\subseteq\varnothing$ 且 $\varnothing\subseteq\varnothing'$，根据定理 1.2 知 $\varnothing'=\varnothing$，所以空集是唯一的。

例 1.3　设集合 $A=\{2,3\}$，集合 B 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合，则有 $A=B$。

1.1.4　集合的基本运算

集合的运算，就是以集合为对象，按照确定的规则得到另外一些新集合的过程。给定集合 A，B，可以通过集合的并（$\cup$）、交（$\cap$）、差（$-$）和对称差（$\oplus$）等运算产生新的集合。

1. 并（$\cup$）

定义 1.5　设 A，B 为任意两集合，所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或者 }x\in B\}$$

并集的文式图（Johan Wenn，英国数学家，1834—1883）见图 1.1。

例 1.4　设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,5,6\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$。集合是由互不相同的元素组成的，在 $A\cup B$ 中 2，4 各写一次，不能重写。

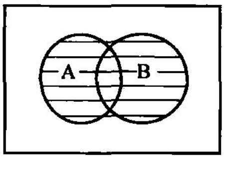


图 1.1

由集合并运算的定义知，并运算具有如下性质。

定理 1.4　设 A，B，C 为任意三个集合，则

① 幂等律　$A\cup A=A$；

② 交换律　$A\cup B=B\cup A$；

③ 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

④ 同一律　$A\cup\varnothing=A$；

⑤ 零　律　$A\cup E=A$；

⑥ $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；

⑦ $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$。

证明　性质①，②，④，⑤，⑥由定义 1.5 立即可以得到。下面仅以③的证明为示范，其他定律可类似证明。

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ 的证明：设 $x\in(A\cup B)\cup C$，则 $x\in A\cup B$ 或者 $x\in C$，即 $x\in A$ 或者 $x\in B$ 或者 $x\in C$。因此，$x\in A$ 或者 $x\in B\cup C$，即 $x\in A\cup(B\cup C)$，从而 $(A\cup B)\cup$

$C\subseteq A\cup(B\cup C)$。同理可证，$(A\cup B)\cup C\supseteq A\cup(B\cup C)$。故$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，结合律成立。

由于集合的并运算满足结合律，因此对 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 定义为至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之一的那些元素构成的集合。$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 通常缩写成 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\exists n\in\mathbf{N},x\in A_n\}$，其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集合。一般地，$\bigcup\limits_{k\in I}A_k=\{x\mid\exists k\in I,x\in A_k\}$。

集合的并运算，就是把给定集的那些元素放到一起合并成一个集合，在这个合并中相同的元素只要一个。例如，设集合 $A_1=\{1,2,3\}$，$A_2=\{3,8\}$，$A_3=\{2,3,6\}$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,6,8\}$。

2. 交($\cap$)

定义 1.6 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 共同元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$(见图 1.2)。

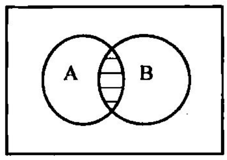


图 1.2

例 1.5 设 A 是所有能被 k 整除的整数集合，B 是所有能被 1 整除的整数集合，则 $A\cap B$ 是所有能被 k 与 1 最小公倍数整除的整数集合。

例 1.6 设集合 $A=\{X$ 高等学校的本科学生$\}$，$B=\{X$ 高等学校计算机专业的学生$\}$，则

$$A\cap B=\{X\text{ 高等学校计算机专业的本科生}\}$$

例 1.7 设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,f\}$，则 $A\cap B=\{a,c,e\}$。

由集合交运算的定义知，集合交运算具有如下性质。

定理 1.5 设 A,B,C 是任意三个集合，则

① 幂等律　$A\cap A=A$；

② 交换律　$A\cap B=B\cap A$；

③ 结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

④ 零　律　$\varnothing\cap A=\varnothing$；

⑤ 同一律　$E\cap A=A$；

⑥ $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

⑦ $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$。

若集合 A,B 没有共同的元素，则记 $A\cap B=\varnothing$，此时称集合 A,B 不相交。

由集合的交运算具有结合律，同样可以定义 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集，也可以定义集序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交集，分别记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid i\in\{1,2,\cdots,n\},x\in A_i\}$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid n\in\{1,2,\cdots,n,\cdots\},x\in A_n\}$$

一般地，集合族 $\{A_k,k\in I\}$ 中各集的交记成 $\bigcap\limits_{k\in I}A_k$ 其定义为

$$\bigcap_{k\in I}A_k=\{x\mid\forall l\in I,x\in A_l\}。$$

若序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 任意两集合 $A_i,A_j(i\neq j)$ 不相交，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两不相交的集序列。