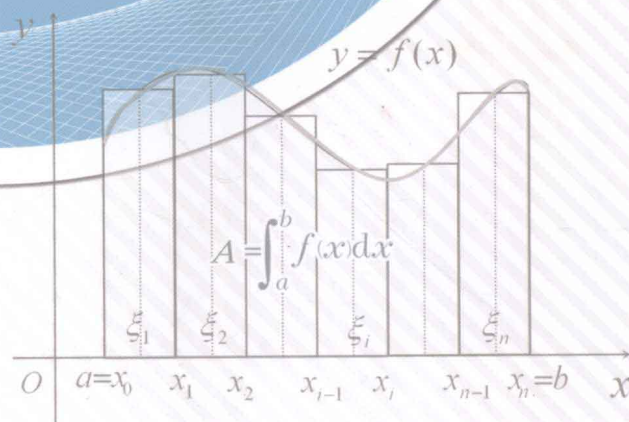


高等数学

GAODENG SHUXUE

王海英 编著

王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等数学

王海英 编著
王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书共分为 11 章,主要内容有:集合与函数、数列极限、函数极限、连续性、导数与中值定理、不定积分、定积分、多元函数的微分理论、重积分(二重积分与三重积分)、无穷级数、广义级数与 Euler 积分等。该书选用大量的引入案例、例题,还配有大量的应用实例,每节后均配有相应的习题。

本书可作为高等院校(含继续教育)文科、工科的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 /王海英编著. — 北京:北京航空航天大学出版社,2011.9

ISBN 978-7-5124-0567-7

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 161047 号

版权所有,侵权必究。

高等数学

王海英 编著

王祖朝 褚宝增 高世臣 审稿

责任编辑 王慕冰 龚荣桂 朱胜军

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:19.75 字数:518 千字

2011 年 9 月第 1 版 2011 年 9 月第 1 次印刷 印数:3 000 册

ISBN 978-7-5124-0567-7 定价:34.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

当前,我国高等教育蓬勃发展,高校教育改革不断深入,高等数学作为各院校开设的最普遍的基础课程,其所担任的课程角色、教学地位显得更为重要。为了适应 21 世纪“高等数学”这门课程教学内容与课程体系改革的需要,编写该教材。

在本书的编写过程中,一直遵循循序渐进的原则,深入浅出,从古到今,从最为典型的自然科学、物理学、经济学等实际例子出发,从直观的几何现象出发,引出高等数学中的每个基本概念,如极限、导数和积分等。根据这些数学知识发展的历程,按照当代大学生的逻辑思维,给出所对应的理论体系。为了对应于极限、导数和积分等高等数学中最基本参数的引入,再反过来,给出它们在不同实际问题中的应用,充分体现出学习高等数学的目的就是解决实际问题。

本书的每个章节均从实际问题引入相应概念,然后讨论给出此概念的理论体系,最后应用这些理论体系解决更广泛的实际问题。该教学过程完全迎合了我国各高校大学生的逻辑思维特点,也解决了大学生的普遍问题:学高等数学有什么用处?因此,无论从本教材的内容安排,还是从本教材的具体内容,都充分让当代大学生处处体会到高等数学的无穷魅力。

在本书的编写过程中,编者重点突出解决实际问题的思想与思路。根据多年教学一线的教学经验,编者认为,让当代大学生学会如何从实际问题高度抽象出关键问题、如何掌握解决该问题的思想、如何培养学生“打破沙锅问到底”的“追究”精神,这些均是高等教育的具体目标。在整本教材中,都体现出该教学理念。

在本教材的每章之后,都会附有与章节相“吻合”的著名数学家的简介。一般来说,高等数学的每个理论体系都会有几个关键的“天才”数学家,他们不仅推动整个数学理论体系的发展,而且他们自身的生平、贡献、传记都是当代大学生的一本史实性教材,从中大学生们不仅可以了解数学发展史的一些知识,而且能让他们看到数学家们在追求自然科学的真理过程中所闪烁出来的人格魅力,这些均是高等数学这门课程的教育特色。

由于编者水平有限,书中难免有缺陷和错误,诚恳希望读者予以批评指正。最后,再次感谢本书所参考的书籍、文献、百度网站等涉及的相关作者。

王海英
中国地质大学(北京)
2011 年 8 月

目 录

第 1 章 函 数	1
1.1 集 合	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 特殊集合：空集、全集和幂集	2
1.1.3 集合间的关系	2
1.1.4 集合的基本运算	3
1.1.5 集合的笛卡儿乘积	6
习题 1.1	6
1.2 实数集及其子集	7
1.2.1 实数与实数集	7
1.2.2 实数的绝对值	7
1.2.3 常用实数集：区间与邻域	8
习题 1.2	9
1.3 函数的概念	9
1.3.1 集合的概念	9
1.3.2 函数的几种特性	10
习题 1.3	12
1.4 几类特殊函数	12
1.4.1 分段函数	12
1.4.2 反函数	13
1.4.3 复合函数	13
1.4.4 初等函数	14
习题 1.4	18
1.5 常用经济数学模型及其函数	18
1.5.1 需求函数	18
1.5.2 供给函数	18
1.5.3 成本函数	19
1.5.4 收益函数	19
习题 1.5	20
数学家简介——笛卡儿	20
第 2 章 一元函数的极限	22
2.1 数列极限的概念	22
2.1.1 古代极限思想	22



2.1.2 数列极限的概念	22
习题 2.1	25
2.2 收敛数列的性质	25
2.2.1 极限的唯一性	25
2.2.2 收敛数列有界性	25
2.2.3 收敛数列保号性	26
2.2.4 四则运算性质	26
习题 2.2	28
2.3 数列收敛的判定定理	28
2.3.1 夹逼定理(两边夹定理)	28
2.3.2 单调有界定理	29
2.3.3 子数列	30
2.3.4 柯西收敛准则	31
习题 2.3	31
2.4 函数的极限	32
2.4.1 自变量 $x \rightarrow +\infty$ 时函数的极限	33
2.4.2 自变量 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	34
习题 2.4	36
2.5 函数极限的主要性质	37
习题 2.5	39
2.6 函数极限存在的判定准则	41
2.6.1 归结原则	41
2.6.2 夹逼定理	42
2.6.3 函数极限的柯西准则	43
习题 2.6	44
2.7 两个重要极限	44
2.7.1 重要极限 1	44
2.7.2 重要极限 2	45
习题 2.7	47
2.8 无穷大和无穷小	48
2.8.1 无穷大	48
2.8.2 无穷小	49
2.8.3 无穷小与无穷大的关系	52
习题 2.8	52
数学家简介——伯努利家族	53

第3章 一元函数的连续性 56

3.1 函数连续的概念	56
3.1.1 函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 的连续	56
3.1.2 函数的间断点及其分类	58

3.1.3 区间上的连续函数·····	59
习题 3.1 ·····	59
3.2 连续函数的性质与运算·····	60
3.2.1 连续函数的性质·····	60
3.2.2 初等函数的连续性·····	61
3.2.3 闭区间上连续函数的重要性质·····	62
习题 3.2 ·····	63
数学家简介——高斯 ·····	64
第 4 章 一元函数的导数与微分 ·····	67
4.1 导数的引例·····	67
4.1.1 变速直线运动的瞬时速度·····	67
4.1.2 曲线切线的斜率·····	67
4.2 导数概念·····	68
4.2.1 函数在某点处的导数·····	68
4.2.2 函数在区间上的导(函)数·····	72
习题 4.2 ·····	73
4.3 导数的运算法则及其基本公式·····	74
4.3.1 导数的四则运算·····	75
4.3.2 复合函数的求导法则·····	76
4.3.3 反函数的求导法则·····	76
4.3.4 隐函数的求导法则·····	78
4.3.5 对数求导法·····	79
4.3.6 参数变量函数的导数·····	80
4.3.7 基本初等函数求导公式汇总·····	80
习题 4.3 ·····	82
4.4 高阶导数·····	83
4.4.1 高阶导数的概念·····	84
4.4.2 高阶导数的运算与性质·····	84
习题 4.4 ·····	85
4.5 函数的微分·····	86
4.5.1 微分的定义·····	86
4.5.2 微分的运算法则·····	87
4.5.3 微分的基本公式·····	88
习题 4.5 ·····	89
4.6 导数与微分的应用案例·····	89
4.6.1 在近似计算中的应用·····	89
4.6.2 经济应用问题举例·····	90
习题 4.6 ·····	91
数学家简介——罗尔 ·····	91

第5章 中值定理及导数的应用	93
5.1 微分中值定理	93
5.1.1 罗尔定理	93
5.1.2 拉格朗日中值定理	95
5.1.3 柯西中值定理	98
习题 5.1	99
5.2 洛必达法则	100
5.2.1 基本未定式 $\frac{0}{0}$ 型	100
5.2.2 基本未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	102
5.2.3 其他型未定式	103
习题 5.2	106
5.3 函数单调性判别法	107
5.3.1 函数的单调性	107
5.3.2 函数单调性的判别	110
习题 5.3	112
5.4 函数的极值及其求法	112
习题 5.4	117
5.5 函数的最值及其求法	118
习题 5.5	123
5.6 曲线的凹向与拐点	123
习题 5.6	127
5.7 曲线的渐近线	127
习题 5.7	129
5.8 函数图形的描绘	129
习题 5.8	132
5.9 导数在经济分析中的应用	132
5.9.1 导数的经济意义	132
5.9.2 弹性分析及其应用案例	134
习题 5.9	136
数学家简介——拉格朗日	136
第6章 不定积分	138
6.1 不定积分的概念	138
6.1.1 原函数与不定积分的概念	138
6.1.2 不定积分的几何意义	140
习题 6.1	141
6.2 不定积分的基本性质与积分公式	141

6.2.1 基本性质	141
6.2.2 基本积分公式	143
习题 6.2	145
6.3 求不定积分的方法	145
6.3.1 换元积分法	145
6.3.2 分部积分法	148
习题 6.3	151
6.4 有理函数和无理函数积分的求法	152
6.4.1 有理函数的积分	152
6.4.2 简单无理函数的积分	153
习题 6.4	154
6.5 不定积分应用举例	155
习题 6.5	155
数学家简介——柯西	155
第 7 章 定积分及其应用	158
7.1 定积分的概念与性质	158
7.1.1 引 例	158
7.1.2 定积分的定义	161
7.1.3 定积分存在定理可积函数类	162
7.1.4 定积分的几何意义	162
7.1.5 定积分的性质	163
习题 7.1	165
7.2 微积分基本定理	166
7.2.1 变上限定积分及其导数	166
7.2.2 牛顿-莱布尼兹公式	167
习题 7.2	168
7.3 求定积分的方法	169
7.3.1 定积分的换元积分法	169
7.3.2 定积分的分部积分法	171
习题 7.3	172
7.4 定积分的几何应用	173
7.4.1 平面图形的面积	174
7.4.2 旋转体的体积	175
7.4.3 已知平面截面积的立体的体积	176
7.4.4 平面曲线的弧长	177
习题 7.4	178
7.5 定积分的经济应用	179
7.5.1 由边际函数求原函数	179
7.5.2 由变化率求总量	179

7.5.3 收益流的现值和将来值	180
习题 7.5	181
7.6 定积分其他方面的应用	181
7.6.1 函数的算术平均值	181
7.6.2 函数的加权平均值	182
7.6.3 变力沿直线所作的功	183
7.6.4 压力问题	183
7.6.5 变速运动	184
习题 7.6	185
数学家简介——牛顿	185
第 8 章 无穷级数	188
8.1 无穷级数的概念	188
习题 8.1	189
8.2 无穷级数的性质	190
8.2.1 收敛级数的基本性质	190
8.2.2 无穷级数的应用案例	192
习题 8.2	192
8.3 正项级数	192
8.3.1 正项级数的概念	192
8.3.2 正项级数敛散性的判别	193
习题 8.3	197
8.4 任意项级数	198
8.4.1 交错级数及其敛散性的判别	198
8.4.2 绝对收敛与条件收敛	199
习题 8.4	200
8.5 幂级数	202
8.5.1 幂级数的概念	202
8.5.2 幂级数的敛散性	202
习题 8.5	204
8.6 泰勒公式与函数的幂级数展开式	205
8.6.1 泰勒中值定理的引入	205
8.6.2 泰勒定理	205
8.6.3 泰勒级数与麦克劳林级数	207
8.6.4 函数展开成幂级数的方法	209
习题 8.6	211
8.7 级数理论的应用	211
8.7.1 函数的幂级数展开式应用——近似计算	211
8.7.2 级数在经济学上的应用	212
习题 8.7	213

数学家简介——莱布尼兹	213
第9章 多元函数微积分理论	215
9.1 空间解析几何简介	215
9.1.1 空间直角坐标系	215
9.1.2 空间两点间的距离	215
9.1.3 空间曲面及其方程	216
习题 9.1	218
9.2 多元函数的基本概念	218
9.2.1 平面点集	218
9.2.2 多元函数的概念	219
习题 9.2	220
9.3 二元函数的极限与连续	221
9.3.1 二元函数的极限	221
9.3.2 二元函数的连续性	223
9.3.3 二元连续函数的性质	224
9.3.4 多元初等函数的连续性	225
习题 9.3	225
9.4 偏导数	226
9.4.1 偏导数的概念及其计算	226
9.4.2 偏导数的几何意义	229
9.4.3 偏导数与连续的关系	229
9.4.4 偏导数的经济意义	229
9.4.5 偏导数在经济分析中的应用	230
9.4.6 高阶偏导数	231
习题 9.4	233
9.5 全微分	234
9.5.1 全微分的概念	234
9.5.2 函数可微的条件	235
9.5.3 全微分在近似计算中的应用	237
习题 9.5	238
9.6 多元复合函数的求导法则	238
9.6.1 中间变量是一元函数的情况	238
9.6.2 中间变量是多元函数的情况	239
习题 9.6	241
9.7 多元隐函数的求导法则	241
习题 9.7	242
9.8 二元函数的极值、最值及其求法	243
9.8.1 二元函数极值及其求法	243
9.8.2 二元函数的最值及其求法	244

习题 9.8	246
9.9 条件极值与拉格朗日乘数法	247
习题 9.9	248
9.10 多元函数微积分理论的应用	249
9.10.1 在几何学上的应用	249
9.10.2 在经济上的应用	250
习题 9.10	251
数学家简介——傅里叶	252
第 10 章 广义积分与 Euler 积分	253
10.1 广义积分的提出背景	253
10.2 无穷区间上的广义积分	254
10.2.1 无穷区间上广义积分的概念	254
10.2.2 无穷区间上广义积分的性质	256
10.2.3 无穷区间上广义积分的敛散性判别法	257
习题 10.2	258
10.3 有限区间上无界函数的广义积分(瑕积分)	259
10.3.1 有限区间上无界函数的广义积分的概念	259
10.3.2 无穷限积分的性质	261
10.3.3 无界函数广义积分的敛散性判别法	262
习题 10.3	262
10.4 Euler 积分	264
10.4.1 Euler 第一型积分: B 函数 $B(p, q)$	264
10.4.2 Euler 第二型积分: Γ 函数 $\Gamma(s)$	265
10.4.3 Γ 函数和 B 函数的关系	266
习题 10.4	266
数学家简介——欧拉	266
第 11 章 重积分	268
11.1 实际生活中的两个问题案例及其求解思路	268
11.1.1 曲顶柱体的体积	268
11.1.2 平面薄片的质量	269
11.2 二重积分的概念及性质	269
11.2.1 二重积分的概念	269
11.2.2 二重积分的几何意义	271
11.2.3 二重积分的性质	271
习题 11.2	272
11.3 二重积分的计算	273
11.3.1 在直角坐标系下二重积分的计算	273
11.3.2 在极坐标系下二重积分的计算	278

习题 11.3	281
11.4 二重积分的应用	282
11.4.1 利用二重积分求曲面面积和曲顶柱体的体积	282
11.4.2 平面薄片的重心	284
11.4.3 平面薄片的转动惯量	286
11.4.4 平面薄片对质点的引力	287
习题 11.4	287
11.5 三重积分	288
习题 11.5	292
数学家简介——泰勒	292
附录 A 《高等数学》数学符号及希腊字母中英文发音列表	294
附录 B 基于 MATLAB 数学软件的常用一元函数的图形	295
参考文献	301

第 1 章

函 数

函数是生产实践中各种变量之间相互依存关系的一种抽象,是数学研究的基本对象。初等数学研究的“数”是常数或常量,研究的几何形体是相互孤立、不变的规则几何形体,主要研究常数间的代数运算和不同形体内部及相互间的关系。高等数学研究的“数”是变量或变数,研究的几何形体是不规则的几何形体,如曲线、曲面、曲边梯形和曲面等。高等数学将数和几何形体紧密结合起来,以函数为基本研究对象,以极限方法为基本研究方法,动态地、整体地、普遍地揭示变量间的变化规律。本章主要给出函数的概念及其几种特性,是本书必要的基础知识。

1.1 集 合

集合论是现代数学各科的基础,是德国数学家康托(George Cantor, 1845—1918)于 1874 年创立的。1876—1883 年康托发表了一系列有关集合论的文章,对集合理论进行了深入的探讨。本节只是介绍集合论最基础的知识,主要内容包括集合及其运算、性质等。此外,还要介绍实数集的有关知识。

1.1.1 集合的概念

集合是数学中一个基本的概念,我们可通过例子来理解它。例如,教室里的全部学生、小王书包里的全部东西、图书馆的藏书等均构成不同的集合。又如,有理数或实数的全体也分别构成集合,通常称为有理数集或实数集。

一般地,具有某种属性的事物的全体称为集合。集合一般用大写字母表示,例如 A, B, C, L ; 组成该集合的事物称为该集合的元素,一般用小写字母表示,例如 a, b, c, l 。若事物 a 是集合 A 的元素,则记为 $a \in A$, 读作“ a 属于 A ”; 若事物 a 不是集合 A 的元素,则记作 $a \notin A$, 读作“ a 不属于 A ”。显然,事物 a 与集合 A 的关系要么 $a \in A$, 要么 $a \notin A$ 。若集合的元素个数有限,则称为有限集; 否则,称为无限集。

集合的常用表示方法有两种。一种是列举法。它是将集合中的元素全部列出来,元素之间用逗号“,”隔开,并用花括号“ $\{ \}$ ”在两边括起来,表示这些元素构成整体。一般地,若集合 A 由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 构成,则表示为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

例 1.1 $A = \{a, b, c, d\};$

$B = \{1, 2, 3, \dots\};$

$C = \{\text{桌子, 台灯, 钢笔, 计算机, 扫描仪, 打印机}\};$

$D = \{a, a^2, a^3, \dots\}。$

另一种集合的表示方法称为叙述法。它是利用一项规则,概括集合中元素的属性,以便决

定某一事物是否属于该集合的方法。设 x 为某类对象的一般表示, $P(x)$ 为关于 x 的一个命题, 用 $\{x|P(x)\}$ 表示“使 $P(x)$ 成立的对象 x 所组成的集合”, 其中竖线“|”前写的是对象的一般表示, 右边写出对象应满足(具有)的属性。也就是说, 若集合 A 由具有性质 P 的元素 x 构成, 则记 $A=\{x|x \text{ 具有性质 } P\}$ 。

例 1.2 全体正奇数集合表示为 $O=\{x|x \text{ 是正奇数}\}$; 所有偶自然数集合可表示为 $E=\{m|2|m \text{ 且 } m \in \mathbf{N}\}$, 其中 $2|m$ 表示 2 能整除 m 。

根据集合的定义, 它本身就具有互异性、无次序性等性质, 由此, 两个集合 A, B 相等, 当且仅当两个集合有完全相同的元素, 记作 $A=B$; 否则, 两个集合 A, B 不相等, 记作 $A \neq B$ 。例如, $\{1, 2, 4\}=\{1, 4, 2\}$, $\{1, 2, 4\}=\{1, 2, 2, 4\}$, $\{\{1, 2\}, 4\} \neq \{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5, \dots\}=\{x|x=2k+1, k \in \mathbf{N}\}$ 。

1.1.2 特殊集合: 空集、全集和幂集

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$ 。例如, 方程 $x^2+1=0$ 的实根所构成的集合就是空集。显然, $\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$ 有着本质的不同。

定义 1.1 在一定范围内, 如果所有集合均为某一集合的子集, 则称该集合为全集, 记作 E 。

对于任意 $x \in A$, 因为 $A \subseteq E$, 所以 $x \in E$ 。全集只包含与讨论有关的所有对象, 并不一定包含一切对象与事物。例如: 在初等数论中, 全体整数组成了全集; 方程 $x^2+1=0$ 的解集合, 在全集为实数集时是空集, 而全集为复数集时解集合就不再是空集, 此时解集合为 $\{i, -i\}$, 其中 $i^2=1$ 。

定义 1.2 给定集合 A , 由集合 A 的所有子集为元素组成的集合, 称为集合 A 的幂集。记为 $P(A)$ (或记为 2^A), 即 $P(A)=\{X|X \subseteq A\}$ 。

例如, 设 $A=\{0, 1, 2\}$, 则 $P(A)=\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$; 再如, $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$, $P(\{a\})=\{\emptyset, \{a\}\}$, $P\{\emptyset\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 等。

定理 1.1 设有限集合 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则 $|P(A)|=2^n$, 其中 $|P(A)|$ 表示集合 $P(A)$ 中元素的个数。

证明 集合 A 的 $m(m=0, 1, 2, \dots, n)$ 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数, 即 C_n^m , 故 $P(A)$ 的元素个数为

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = \sum_{m=0}^n C_n^m$$

根据二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m y^{n-m}$, 令 $x=y=1$, 得 $2^n = \sum_{m=0}^n C_n^m$, 故 $|P(A)|=2^n$ 。

1.1.3 集合间的关系

“集合”、“元素”、元素与集合间的“属于”关系是三个没有精确定义的原始概念, 对它们仅给出了直观的描述, 以说明它们各自的含义。现在, 利用这三个概念去定义集合间的相等关系、集合的包含关系、集合的子集和幂集等概念。

定义 1.3 设 A, B 是任意两个集合, 如果 A 中的每一个元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 或 A 包含于 B 内, 或 B 包含 A 。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。如果 A 不是 B 的子集, 则记为 $A \not\subseteq B$ (读作“ A 不包含在 B 内”)。

例如,设 N 为自然数集合, Q 为一切有理数组成的集合, R 为全体实数集合, C 为全体复数集合, 则 $N \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$, $\{1\} \subseteq N$, $\{1, 1.2, 9.9\} \subseteq Q$, $\{\sqrt{2}, \pi\} \subseteq R$ 。

定义 1.4 如果集合 A 的每一元素都属于集合 B , 而集合 B 中至少有一元素不属于 A , 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ 。

例如, $\{a, b\}$ 是 $\{a, b, c\}$ 的真子集, N 是 Q 的真子集, Q 是 R 的真子集, R 是 C 的真子集。

值得注意的是, 符号“ $\in$ ”和“ $\subseteq$ ”在概念上有区别: “ $\in$ ”表示元素与集合间的“属于”关系, 而“ $\subseteq$ ”表示集合间的“包含”关系。

定理 1.2 集合 $A=B$ 的充分必要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

定理 1.3 对于任一集合 A , $\emptyset \subseteq A$, 且空集是唯一的。

证明 假设 $\emptyset \subseteq A$ 为假, 则至少存在一个元素 x , 使 $x \in \emptyset$ 且 $x \notin A$, 因为空集 $\emptyset$ 不包含任何元素, 所以这是不可能的。

设 $\emptyset'$ 与 $\emptyset$ 都是空集, 由上述可知, $\emptyset' \subseteq \emptyset$ 且 $\emptyset \subseteq \emptyset'$, 根据定理 1.2 知 $\emptyset' = \emptyset$, 所以空集是唯一的。

例 1.3 设集合 $A = \{2, 3\}$, 集合 B 为方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合, 则有 $A = B$ 。

1.1.4 集合的基本运算

集合的运算, 就是以集合为对象, 按照确定的规则得到另外一些新集合的过程。给定集合 A, B , 可以通过集合的并($\cup$)、交($\cap$)、差($-$)和对称差($\oplus$)等运算产生新的集合。

1. 并($\cup$)

定义 1.5 设 A, B 为任意两集合, 所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 和 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

并集的文式图(Johan Wenn, 英国数学家, 1834—1883)见图 1.1。

例 1.4 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。集合是由互不相同的元素组成的, 在 $A \cup B$ 中, 4 各写一次, 不能重写。

由集合并运算的定义知, 并运算具有如下性质。

定理 1.4 设 A, B, C 为任意三个集合, 则

- ① 幂等律 $A \cup A = A$;
- ② 交换律 $A \cup B = B \cup A$;
- ③ 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- ④ 同一律 $A \cup \emptyset = A$;
- ⑤ 零律 $A \cup E = A$;
- ⑥ $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$;
- ⑦ $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 。

证明 性质①, ②, ④, ⑤, ⑥由定义 1.5 立即可以得到。下面仅以③的证明为示范, 其他定律可类似证明。

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 的证明: 设 $x \in (A \cup B) \cup C$, 则 $x \in A \cup B$ 或者 $x \in C$, 即 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 或者 $x \in C$ 。因此, $x \in A$ 或者 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A \cup (B \cup C)$, 从而 $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ 。同理可证 $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ 。故 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 。

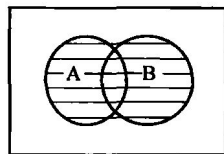


图 1.1

$C \subseteq A \cup (B \cup C)$ 。同理可证, $(A \cup B) \cup C \supseteq A \cup (B \cup C)$ 。故 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, 结合律成立。

由于集合的并运算满足结合律, 因此对 n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并集 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 定义为至少属于 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 之一的那些元素构成的集合。 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 通常缩写成 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 。 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集合。一般地, $\bigcup_{k \in I} A_k = \{x \mid \exists k \in I, x \in A_k\}$ 。

集合的并运算, 就是把给定集的那些元素放到一起合并成一个集合, 在这个合并中相同的元素只要一个。例如, 设集合 $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{3, 8\}, A_3 = \{2, 3, 6\}$, 则 $\bigcup_{i=1}^3 A_i = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ 。

2. 交 ($\cap$)

定义 1.6 设任意两个集合 A 和 B , 由集合 A 和 B 共同元素组成的集合, 称为集合 A 和 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ (见图 1.2)。

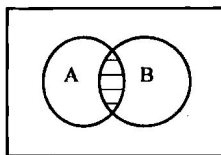


图 1.2

例 1.5 设 A 是所有能被 k 整除的整数集合, B 是所有能被 1 整除的整数集合, 则 $A \cap B$ 是所有能被 k 与 1 最小公倍数整除的整数集合。

例 1.6 设集合 $A = \{X \text{ 高等学校的本科学生}\}, B = \{X \text{ 高等学校计算机专业的学生}\}$, 则 $A \cap B = \{X \text{ 高等学校计算机专业的本科生}\}$

例 1.7 设集合 $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, c, e, f\}$, 则 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 。

由集合交运算的定义知, 集合交运算具有如下性质。

定理 1.5 设 A, B, C 是任意三个集合, 则

- ① 幂等律 $A \cap A = A$;
- ② 交换律 $A \cap B = B \cap A$;
- ③ 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- ④ 零律 $\emptyset \cap A = \emptyset$;
- ⑤ 同一律 $E \cap A = A$;
- ⑥ $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$;
- ⑦ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ 。

若集合 A, B 没有共同的元素, 则记 $A \cap B = \emptyset$, 此时称集合 A, B 不相交。

由集合的交运算具有结合律, 同样可以定义 n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交集, 也可以定义集序列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的交集, 分别记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, x \in A_i\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid n \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}, x \in A_n\}$$

一般地, 集合族 $\{A_k, k \in I\}$ 中各集的交记成 $\bigcap_{k \in I} A_k$ 其定义为

$$\bigcap_{k \in I} A_k = \{x \mid \forall l \in I, x \in A_l\}。$$

若序列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 任意两集合 $A_i, A_j (i \neq j)$ 不相交, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是两两不相交的集序列。