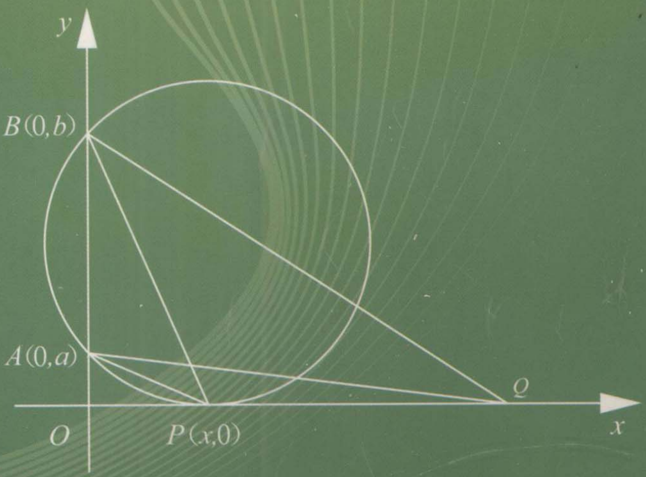
名家导学系列

孙维刚初中数学

孙维刚 编著



$4(2x^2-2x-3)=x^2(x-1)^2$

$\Delta=b^2-4ac$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

名家导学系列

孙维刚初中数学

孙维刚　编著

北京大学出版社
·北 京·

内容简介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作，涵盖了现行教育大纲中所要求掌握的内容，是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对基础知识的分析把握，以及对方法和思想的指导，各章由学习指导和例题两部分组成，在详述概念后，引申概念外围的规律、方法，以及解题思考规律。书中提出，学好数学必须站在系统的角度看问题，力求一题多解、多解归一（结论一个）、多题归一（善于总结），善于用"动"的观点思考问题（做到"风物长宜放眼量"），这对开启学生的数学智慧，掌握科学的学习方法、思维规律，提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为中学教师和学生的辅导用书或自学教材。

图书在版编目（CIP）数据

孙维刚初中数学/孙维刚编著. —北京：北京大学出版社，2005.1
（名家导学系列）
ISBN 7-301-08496-X

Ⅰ.孙…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 135311 号

书　　名：孙维刚初中数学
著作责任者：孙维刚　编著
责 任 编 辑：温丹丹
标 准 书 号：ISBN 7-301-08496-X/G・1380
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 58874083　编辑部 62765126
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京东方人华北大彩印中心　　电话：62754190
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　14.75 印张　383 千字
2005 年 1 月第 1 版　　2006 年 4 月第 2 次印刷
定　　价：19.00 元

第 三 版 序

拿着笔,眼前不断地浮现出孙维刚老师著述时的情景。

他真的很忙,也很累。对于出版社的约稿,从不会拒绝别人要求的孙老师,总是一拖又拖,直至无法再拖,最后,只好硬着头皮放下手里永远干不完的“活儿”,伏案而书。

每逢写作,他总习惯桌子上除了稿纸以外,就是一支笔,其他东西统统搬走。

桌子还是那张桌子,灯光依旧。

我还清楚地记得他写作本书时用的那支笔,一支套着白色金属帽,有着草绿色笔杆的普通钢笔。因长时间的频繁使用,笔尖早已磨秃了,但写起字来却很流畅。他说:“这支笔可立了功,从一参加工作,我就用它,从没有离开过。”后来,这支笔在一次开会时不慎遗失,为此,他遗憾了很多日子。

孙老师写作起来,速度很快。从早晨到晚上,头都不肯抬一抬,只看见他握笔的手在稿纸上疾速地移动,发出沙沙的声音,间或夹杂着晃动涂改液的嗒嗒声。就这样,一天一万字,一气呵成。那笔尖流淌出的智慧,分明是他和学生心的碰撞。因此,读他的文字,就像听见他在课堂上的讲课,娓娓道来,带领着他的学生思潮如涌。

当这部著述终于完成时,他微微活动一下早已疲惫的身躯,细细地审视着手中的稿子,自言自语地说:“我要对得住我的读者。”这是他的心声。我还清楚地记得他很多次地引用过好友周沛耕老师的话:“教师的一切成就都是学生给的。”

另外,当您拿到这本由北京大学出版社出版的《孙维刚初中数学》时,一定要将前面“作者的话”细细地阅读,因为里面有很多重要的话要告诉您,这也是孙老师生前常常说给来信、来电或当面咨询的读者的话。

最后,衷心地希望这本《孙维刚初中数学》能对广大青少年朋友学习数学有所启迪。

如今,斯人已逝,谨以此序寄以无限的思绪。

王海亭

2003 年元月于北京

第二版修订说明

幸蒙老师和同学们的关怀，拙述《初中数学》、《高中数学》两本书，至今已六次印刷，逾16万册。

其间，我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议，使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上，两书都在解题思考规律的应用，即提高解题能力方面，进行了补充。《初中数学》在一些主要章节，补充了一些新的例题分析；《高中数学》，则补充了"第四篇　解题思考分析的再示范"。

《初中数学》书中某些知识，在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学，本次再版，仍予保留。我的考虑是：

1. 读者中许多学生初中毕业后要继续学习，特别是要升入普通高中，书中对这些少量知识的学习指导，还是很有价值的；

2. 本书立足于对知识分析把握的指导，立足于对方法和思想的建议和指导，所以阅读这些部分是有益的。

另外，想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学，是学生投入最多的一门课程，但许多同学却为并没取得理想效果所苦，部分同学甚至陷入题海，昏天黑地，以至望而却步。

究其原因，在于方法不得要领，或根本不当。

本人认为，学好数学，首重概念扎实、基础知识牢固，这几乎是人所共识。但究竟什么是"扎实"、"牢固"？又怎样才能"扎实"、"牢固"？则恐多有差异，甚至大相径庭了。

汽车飞驰，离不开动力的心脏——发动机，但必须通过变速箱、大轴，最后作用到轮子上。解数学题亦如此，概念、基础知识（发动机），要发挥作用，也必须靠一连串连接装置，即对概念的理解、引伸，概念外围的规律、方法，以及解题思考规律，这些在课本上是没有的。

学好数学，还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干，又不为其所累。怎样才是和才能"聪明地做题"？

而最根本的出路，是在学习过程中，提高了能力，完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切？本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

限于水平，书中疏误仍将很多，诚请批评指正，不胜感谢。

孙维刚

1999年2月于北京

作者的话

数学是一门很重要的基础课.如何学好数学,这是许多中学生共同关心的问题.为此,本书就初中代数和平面几何的学习,结合自己多年的教学经验和具体实例,对如何学、学什么的有关方法和要求作了论述.供同学们学习参考.

一、明确学习数学的目的

明确目的,这是做好一件事情的前提.

学习数学的目的是什么呢?

人们常说,要把数学学好,因为它是学好许多功课的基础.但这个“基础”指什么?在理解上,差别就大了.

有人说,初中化学里计算化合物组成的百分比、利用化学反应方程式的计算,都要利用比例,这是数学里学的;高中化学里有关质量分数、物质的量浓度的计算,也要用数学;而物理中,只要把公式确定好了,余下的工作就是公式变形及代入数值进行计算,这些都是数学的问题.所以,数学学不好,物理、化学也学不好,因此,数学是基础.

这种理解是片面和肤浅的,只把数学视为一种工具(尽管是非常重要的工具)是不利于把数学学好的.

恩格斯指出:数学,是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学.

近年来,已经有人提出:数学,是研究人类的存在形式和思维方式的科学.它既不能完全包含于社会科学之内,也不能完全包含于自然科学之内.科学的分类,已经不能只分为自然科学和社会科学两大类,还应该有第三大类:数学.

许许多多优秀的学生,正是在学习数学的过程中,自觉或不自觉地优化了自己的思维方式,培养和提高了能力,发展和完善了自己的素质.说句通俗话,把不聪明的自己变得聪明了起来,让聪明的自己更加聪明,从而使他们成了各个领域内的佼佼者.

基于上述认识,就产生了下面的学好数学的具体作法.

二、深入本质,渗透思想,升华观点

学习中要“抓住本质”,这是许多人的经验.但什么是“本质”,怎样去抓住它.在认识上人们又有很大差距.

有人认为,对于定义、定理、公式,不仅要熟记它们的文字表述,还要准确无遗漏地掌握它的构成,这就是“抓住本质”了.例如,圆的定义“在平面中,到一个定点的距离等于定长的点的集合”中,有三个要素“平面”、“定点”、“定长”.

不能否认,这种认识并无错误,但它绝未达到理想的境界,一方面,这样学下去,随着新的概念、知识的不断进入,记忆上不堪重负,因而要经常复习,否则,常常学新忘旧,因为它们在脑子中各自为政,没有浑然一体嘛;进一步说,这个学习过程,对一名学生在思维建设上,是没有促进作用和价值的.

那么,在学习知识上,正确的作法是什么呢?

应该从系统的角度学习知识，置知识于系统中，着眼于知识之间的联系和规律，从而深入本质，因为联系和规律就是本质. 着眼于数学思想的渗透.

举例做个说明.

初中《几何》中有一条定理：如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补，如图 0-1 所示.

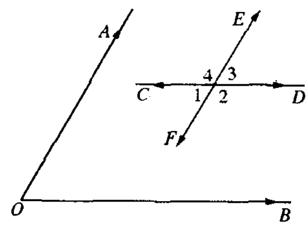


图 0-1

当 $CD \parallel OB$、$EF \parallel OA$ 时，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 和 $\angle AOB$ 相等或互补.

但何时相等，何时互补呢？没有明确说明.

这时，如果我们把图中 5 个角的边的射线方向都加以标注，则不难得到结论：当两组平行边的射线方向全相同或全相反时，这两个角相等；两组平行边的射线方向一同一反时，这两个角互补. 即：

$\angle AOB = \angle 3$，$\angle AOB + \angle 2 = \angle AOB + \angle 4 = 180^\circ$，$\angle AOB = \angle 1$.

这样，就发掘了知识之间的联系和规律，加深了理解.

进一步，如果再把两条射线方向相同的关系规定为“+”，方向相反的关系规定为“-”；把两个角相等的关系规定为“+”，互补的关系规定为“-”. 那么，初一代数中有理数乘法的符号法则：“+”、“+”得“+”，“+”、“-”得“-”，“-”、“+”得“-”，“-”、“-”得“+”. 不正描述了本定理确切的结论吗！

认识又加深了，大自然中的联系竟如此微妙！

再进一步. 如果将直线 EF 平移，使它与 OA 所在直线重合，如图 0-2 所示，由前所述，当然继续有 $\angle AOB = 3$，$\angle AOB + \angle 2 = 180^\circ$，$\angle AOB = \angle 1$. 但这时，上述关系，不正分别是“两直线平行（$CD \parallel OB$），则同位角相等（$\angle AOB = \angle 3$）”；“两直线平行（$CD \parallel OB$），则同旁内角互补（$\angle AOB + \angle 2 = 180^\circ$）”；和“两直线平行（$CD \parallel OB$），则内错角相等（$\angle AOB = \angle 1$）”吗！

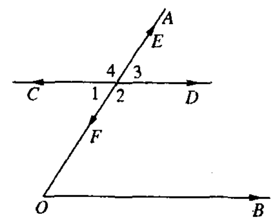


图 0-2

微妙的联系正向纵深发展！

在图 0-2 的基础上，把 CD 平移，使之与 OB 所在直线重合. 那么，$\angle AOB$ 和 $\angle 3$ 的相等，不也是“角相等定义”吗！$\angle AOB$ 分别和 $\angle 2$ 及 $\angle 4$ 的互补，不也是平角定义吗！而 $\angle AOB$ 和 $\angle 1$ 的相等，竟然可同时认为是对顶角相等！如图0-3所示.

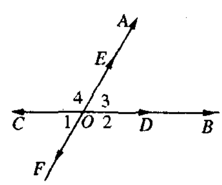


图 0-3

知识间的联系，竟如此令人意想不到，却又如此合情合理.

分散在初中《几何》第一册里的有关角的 40 多条定义、定理中的 6 条定义、定理（角相等定义、平角定义、对顶角相等、两直线平行则同位角相等、同旁内角互补、内错角相等），竟全包括在一条定理（如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补）内. 事实是，这一条定理是那 6 条定义、定理的联合推广；那 6 条定理则是这一条定理的特例. 因为，它们原本是一个系统. 这种学习方法，就是置知识于系统中，着眼于知识之间的联系.

它的优越在哪里呢？

首先，这个融汇贯通的过程，使我们透过繁杂的现象，抓住了本质，同时简化了记忆.

更重要的是，接触了一种崭新的认识问题的思想方法：由寻找联系入手，运用规定（定义）平移、变换等数学思想和从“特殊到一般，又从一般到特殊”的方法，把个别、离散的现象构造成浑然一体的系统，这已经标志着能力的提高和素质的发展了. 以这种提高和发展，去学习、去解题，将与过去

不可同日而语. 因为解题过程的本质，就是以敏锐的观察、分析，去发现和建立已知条件和结论之间的联系.

三、"头悬梁、锥刺股"就是刻苦吗

老师们多次向学生介绍过古人苏秦"头悬梁、锥刺股"的故事，勉励学生像他那样发愤学习. 不少同学也常常以"头悬梁、锥刺股"的精神自勉、自激、要求自己，上课时，瞪大了眼睛，张开自己脑中的"口袋"，把老师讲的每句话、写出的每个字，统统装进自己的"口袋"中；课后认真完成作业，按时交作业，发下来有错必改，做完老师留的作业，还要自己再找题做，熟能生巧嘛！做完作业，还要主动复习、经常复习，"顽强"地和疲劳、瞌睡做"斗争"，直到把笔记或书上划出的重点啃得滚瓜烂熟.

这算不算刻苦学习了呢？

笔者以为，精神诚可贵，效果未必好. 因为，学习本身也是科学. 在课堂听讲、做作业、复习这三个环节上，都要科学、有成效地刻苦学习，这应表现为如下的努力.

（一）超前思维，向老师挑战

课堂上，努力争取想在教师讲授的前面. 定理、公式，争取自己推导出来；例题，争取自己先分析、解答；进而，当命题的条件刚刚写出，自己就去猜想它的结论；一个新的概念出现时，自己就试着去定义它；甚至，随着课程的进行、知识的发展，自己设想，又该提出什么命题了，又该定义什么名词了……

当然，高水平的教师在讲课时，应该给学生的超前思维留有时间上的余地，甚至创造条件，鼓励和启发学生超前思维；而听课学生的超前思维，又应该和老师密切配合，不能因为自己还没想出来，就充耳不闻老师的讲解，自己另搞一套.

课堂听讲的这种方式的优点在于，例题既然是自己解出来的，定理、公式既然是自己证出来的，当然理解深刻，印象深刻，记忆久远，不易遗忘. 即使忘了也不怕，因为本来就是自己推出来的，就再推嘛！省却了许多临考前还要复习背诵的时间.

更重要的是，在这个过程中，培养了能力，在45分钟的课堂上，每当有个短短的一两分钟甚至几分几秒钟的间隙，都要努力去往前想. 这种高强度的要求，才是真正的刻苦. 这样必能很好地锻炼思维.

"向老师挑战"是什么意思？

上面谈到，课堂上的超前思维过程，常常还没来得及想出来，老师已经开始讲解了，或者，自己虽想出了结论，但与随即而来的老师的结论或方法不同. 这时，不应立即"缴械投降"，还要做些"挣扎". 首先是要问"为什么"，甚至力图否定老师的结论或方法，这样做的结果，如果没有成功，则证明老师是对的，这时再接受老师的结论或方法. 由于从反面尝试了"打不倒它"的滋味，自然对这个结论或方法，就有了深刻的体会，从而实现了高质量的理解和消化老师的讲授；如果否定的努力成功了，它的意义，决不在于一两个结论或方法的改进上，许多出类拔萃的学生的成功，都是在这里埋下了飞跃的种子.

讲三个真实的故事.

第一个故事，1988年3月的一次数学课上，我把一道从课外读物上选来的题目，抄在黑板上：

a,b,c,x 都是实数，并且 $a<b<c$，试求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

一部分同学经过思考，提出了如下相同的解法（后来我讲一些教师解此题并在北京市数学奥林匹克学校写出此题，大家也是这个解法，当然，也有不少人不会解此题）.

首先，运用实数绝对值定义，分情况打开绝对值号，得

$$
原式=\begin{cases}-(x-a)-(x-b)-(x-c),(x\leqslant a)\\ x-a-(x-b)-(x-c),(a<x\leqslant b)\\ x-a+x-b-(x-c),(b<x\leqslant c)\\ x-a+x-b+x-c,(x>c)\end{cases}
$$

整理得

$$
原式=\begin{cases}a+b+c-3x,(x\leqslant a)\\ -a+b+c-x,(a<x\leqslant b)\\ -a-b+c+x,(b<x\leqslant c)\\ 3x-(a+b+c),(x>c)\end{cases} \tag{$*$}
$$

在每一段上进行分析.

Ⅰ 当 $x\leqslant a$ 时,由于 $a+b+c$ 是定值,则当 x 取得最大值 a 时,得到这一段上原式的最小值为 $a+b+c-3a=b+c-2a$;

Ⅱ 当 $a<x\leqslant b$ 时,由于 $-a+b+c$ 是定值,则当 x 取最大值 b 时,得到在这一段上原式的最小值为 $-a+b+c-b=c-a$;

Ⅲ 当 $b<x\leqslant c$ 时,由于 $-a-b+c$ 是定值,则当 x 取最小值时,原式得到在这一段上的最小值,但 x 在这一段上无小值,$x>b$,故原式在这一段上的最小值大于 $-a-b+c+b=c-a$;

Ⅳ 当 $x>c$ 时,由于 $-a-b-c$ 是定值,则当 x 取最小值时,原式得到在这一段上的最小值,但 x 在这一段上无最小值,$x>c$,故原式在这一段上的最小值大于 $3c-(a+b+c)-2c-a-b$.

比较Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的结果,由于 $a<b<c$,则 $c-a<c-a+(b-a)=b+c-2a$,同时,$c-a<c-a+(c-b)=2c-a-b$,故所求原式的最小值,在第Ⅱ段上取得,为 $c-a$,此时,$x=b$.

我为了显示数形结合思考的优越性,在黑板上,写出了我的函数解法(由于我在教学上从系统出发,着眼于联系、规律,着意于能力、素质,课程进度自然加快,初二结束时,学完初三功课,高一结束时,学完高三功课,所以,此时已学到二次函数了).

从上面($*$)开始,改写($*$)式为

$$
原式=\begin{cases}-3x+a+b+c,(x\leqslant a)\\ -x-a+b+c,(a<x\leqslant b)\\ x-a-b+c,(b<x\leqslant c)\\ 3x-(a+b+c),(x>c)\end{cases}
$$

则函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的图像如图 0-4 所示.

显然 $f(x)$ 的图像在 $x=b$ 时为最低点,即 $x=b$ 时,$f(x)$ 得到最小值,为

$$
f(b)=|b-a|+|b-b|+|b-c|=c-a.
$$

这个解法的前半部分与解法一相同,有个繁琐的打开绝对值号的过程,但后半部分直观性强,简捷,如图 0-4 所示.

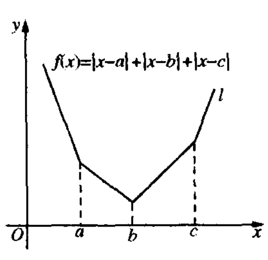


图 0-4

这时，李毅同学举手了，“孙老师，我的解法比您的还简单.”

他走上黑板，画了一条数轴，如图 0-5 所示.

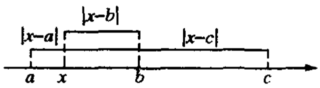


图 0-5

然后说，$|x-a|$表示点 x 和点 a 之间的距离，$|x-a|+|x-b|+|x-c|$表示了点 x 到点 a、b、c 的距离之和. 当然，这三条线段没有重叠部分时，这和最小，此时 $x=b$，这最小和为点 a、c 的距离，为$|a-c|=c-a$. 如图 0-6 所示.

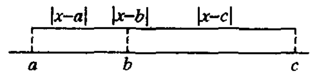


图 0-6

多么简捷，多么清新，漂亮极了.

而且，他还加以推广，总结出了一般规律：

当给出 $a<b<c<d$ 时，x 取点 b、点 c 间（包括 b、c）的任一值，原式皆得最小值，从图 0-6 上易见，它为

$$(d-a)+(c-b);$$

当给出 $a<b<c<d<e$ 时，取 $x=c$ 时，原式得最小值，它为$(e-a)+(d-b)$；

以此类推，$a,b,c,d,\cdots$有奇数个时，使 x 为中间的 1 个；$a,b,c,d,\cdots$有偶数个时，使 x 为中间的两个之间的任一值（包括这两个值）.

瞧，对于一个 14 岁的孩子，不是难能可贵吗！

一年后，李毅同学在 1989 年 4 月全国初中数学联赛中，获北京赛区一等奖，并越级参加北京市高中一年级数学竞赛，再获一等奖. 半年后刚入高一的李毅同学，参加 1989 年度全国高中数学联赛，以两试满分并列全国和北京赛区第一名，1990 年度获二等奖，1991 年度再获一等奖及北京赛区第一名，1992 年度，被免试录取入北京大学物理系.

第二个故事.

“向老师挑战”，也包括“向课本挑战”.

事情发生在 1987 年 6 月，彭壮壮同学正读初一，刚刚 13 岁，学习“算术根的性质”.

我介绍了课本上对根的性质的证明方法：

二次算术平方根的性质

(1) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，$(a,b\geqslant 0)$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$.

证明：

(1) 当 $a,b\geqslant 0$ 时，

$\because (\sqrt{ab})^2=ab,(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，及 $\sqrt{ab}\geqslant 0,\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geqslant 0$，

$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

(2) 当 $a\geqslant 0,b>0$ 时，

$\because \left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b},\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\dfrac{a}{b}$，及$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\geqslant 0,\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$，

$\therefore \sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

这时，彭壮壮同学举手到黑板前，写出了运用(1)的结论，这是对于(2)的一种全新的证明.

当 $a\geqslant 0,b>0$ 时，

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{\frac{a}{b}\cdot b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

这个巧妙的证明，我还没有在任何书上见过，但它的价值，并不止于此. 彭壮壮是有意识地应用了“把新课题归结到旧知识的基础上”这个解决问题的基本思想.

半年后，当学到“对数性质”时，班上广大同学都运用这个思想，迅速想出了优于课本上的对于“商的性质”的证明，如下所示，

“商的对数的性质”

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N. \quad (M, N, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

课本上的证明：

当 $M, N, a > 0$，且 $a \neq 1$ 时，

设 $x = \log_a \frac{M}{N}, y = \log_a M, z = \log_a N.$

由对数定义可得，$a^x = \frac{M}{N}, a^y = M, a^z = N,$

所以，$a^x = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$

则　$x = y - z,$

即　$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$

而我们班上多数同学的证明为，

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a \frac{M}{N} + \log_a N - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \cdot N - \log_a N = \log_a M - \log_a N.$$

简捷明快！谁的功劳？是基本数学思想武装了头脑的结果，追根溯源，当归功于“向老师挑战”.

一年后，彭壮壮同学又应用这个思想和方法，对于高等数学中的一门课程《实变函数》“集合论”中的一道习题，借助于“交”对于“并”的分配律的结论和狄莫更公式，漂亮地完成了“并”对于“交”的分配律的证明. 由于中学同学知识所限，这里不再予以介绍.

1988 年，彭壮壮在北京市初二数学竞赛中获二等奖，1989 年 4 月，获全国初中数学联赛北京赛区二等奖，1990 年，学完中学数学后赴美国探亲，1991 年获全美数学竞赛前 25 名，即取得进入美国数学国家集训队资格（因不是永久居住者，未实际参加）. 继而，以一篇数学论文《求解 P 进制下的分数》获“美国西屋科学奖”（美国高中学生最高水平竞赛，俗称少年诺贝尔大奖），并被哈佛大学免试录取，对此事，中美两国报刊多有报道.

“向老师挑战”中，不是胜利者，但“难酬蹈海亦英雄”，常常使自己更上一层楼.

第三个故事.

1987 年 4 月在一堂平面几何课上，我说：“有人说，直线是半径无穷大的圆，作为一句不严格的话，这话不无道理”.

我从两个角度做了解释.

一是，在高等数学里，曲线上各点的曲率，等于在这点的曲率半径的倒数，即曲率 $k = \frac{1}{R}$，而直线各点处的曲率 $k = 0$，只能 $R \to \infty$，当然，这里并不严谨.

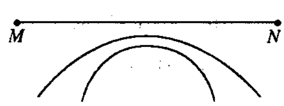


图 0-7

另一种解释是，我画了一幅图，如图 0-7 所示，显然，圆弧的弯曲程度

愈接近直线时，圆心愈向下方远离而去，通过取圆弧上面两个点连结后，做所得线段的垂直平分线，求交点（圆心），易于看出这种趋势. 而当圆弧完全变成直线后，由于所做垂直平分线互相平行，没有交点，如果把它们看成在下方无穷远处相交，那么圆心无穷远，半径不就无穷大了吗！当然，这也并不严谨.

这时，有两个同学举起了手.

一是李毅同学，他用曲率 $k=\lim\limits_{\Delta_s \to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta_S}$ 提出质疑. 待我解答完毕后，年仅13岁的庄孜昀同学仍举着手，他画了这样的图（见图0-8）后说："如果这些圆弧在直线 MN 的上方，弯曲程度逐渐接近直线，仍用您刚才的解释，那么，圆心岂不是要跑到直线 MN 的上方的无穷远处吗？然而一个圆，怎么能有两个圆心呢"！

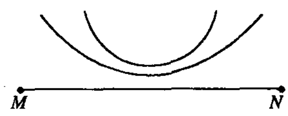


图 0-8

问得多么好！

一年后，庄孜昀同学在北京市初二数学竞赛中获三等奖. 两年后，又获北京市初中化学竞赛一等奖和1989年全国初中数学联赛北京赛区三等奖. 1991年，获全国高中物理竞赛北京赛区二等奖. 1992年高考中，他以北京市东城区理科考生"状元"的成绩，考入清华大学无线电系.

（二）题不求多，但求精彩，要求"知人善用"

做习题，是学好数学的必要过程；也是培养能力、发展素质的重要环节.

因为解答习题要应用数学概念、定理公式等数学知识，因此解习题一方面有助于重温这些概念、定理公式；另一方面，也有助于检查对概念、定理公式的理解是否准确，有无遗漏或曲解，从而加深对它们的理解和掌握.

同时，解答习题的过程，是应用学过的知识，去解决以"新面孔"出现的课题的过程，它一方面将训练应用知识的能力；另一方面，习题的面孔是"陌生"的，需要观察它的特点，进行分析，作出判断，而后才能对选择哪个方向、应用哪些知识去解决它，作出决策；并且，在进入解决的途中，随时根据情况的发展，或做些调整，或修正原来的方向，这是一个复杂的思维过程，一个有效地培养能力的过程，一个可以有力地训练思维、完善素质的过程.

但是，许多同学做了不少题目，上述两个方面收获甚少，这是为什么呢？

这里恐怕主要有两个原因：其一，是否从思想上明确了如上所述的做题目的；其二，是否在用科学的态度和方法去做题.

什么是科学的态度和方法呢？

1. 题不求多，但求精彩

这有点儿像吃饭，吃不饱不好，但过饱，甚至饱了还要往肚里塞，不但后塞进去的食物不会吸收，甚至引起肠胃功能紊乱，连开始吃进去的食物都不能消化吸收. 同时，营养价值很低的食物吃很多，不如吃适量的高营养的食物.

从这个意义上，对于题目的选择可提出如下的建议：

（1）题目本身应无错误；

（2）不要选只是对概念、定理、方法进行复述的题目，这种题目，对于理解知识、培养能力，几乎无作用；

（3）题目从解法上看，亦是充满活力，不要死气沉沉、只是繁琐地堆砌公式或冗长无味；

（4）同一类型的题目，解透一两个有代表性的即可，不必大量重复；

（5）不问津那些对于概念无理解价值、在思考方法上远离一般规律的偏题、怪题.

题目选精彩了,更重要的是练习的方法要对头,这样才能达到预期的目的,即“知人善用”.

练习的方法怎样才能算对头?

2. 讲究做题的方法

(1)一题多解,多解归一,多题归一

对于“一题多解”,顾名即可思义.需要说明的是,如果只是追求多解的数量,每个解求不作深入的探讨,这样的一题多解,从收效和它所花费的时间相比,是太不值得的.

如果不同角度的解法,在思路上拉开的距离较大,应用的知识改换较多,将加深对题目本质的理解、加深对每个解法本质的理解、加深对所用概念、定理公式及相互联系的理解.这样的一题多解,才是有价值的.例如前面对于“已知 a、b、c、x 都是实数,并且 $a<b<c$,试求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值”的一题的 3 种解法.

“一题多解”刚刚是第一步,还要“多解归一”.

什么是“多解归一”?

是指把多种解法相互比较,进行抽象,挖掘本质,达到赏玩于股掌之上的程度,举两个例子.

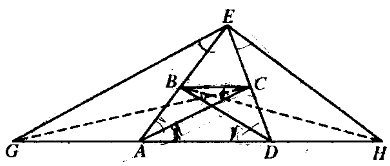


图 0-9

第一个例子:已知　如图 0-9 所示,梯形 $ABCD$ 中,$AD//BC$,AB、DC 交于 E,$EG//AC$,$EH//BD$,G、A、D、H 共线.

求证　$GA=DH$.

证法一　连结 GC,HB.

$\because EG//AC$(已知),

$\therefore S_{\triangle ACG}=S_{\triangle ACE}$,(同底等高的三角形,面积相等)

同理,$S_{\triangle DBH}=S_{\triangle DBE}$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DCB}$.

$\because S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCE}$,$S_{\triangle DBE}=S_{\triangle DCB}+S_{\triangle BCE}$,

$\therefore S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$,(等量加等量,和相等)

$\therefore S_{\triangle ACG}=S_{\triangle DBH}$.(等量代换)

又$\because AD//BC$,(已知)

$\therefore$ 点 C 和点 B 到直线 $GADH$ 的距离相等,设为 h.

由于
$$S_{\triangle ACG}=\frac{1}{2}GA\cdot h,\quad S_{\triangle DBH}=\frac{1}{2}DH\cdot h,$$

故
$$GA=DH.$$

证法二　设 BC 所在直线分别与 EG、EH 交于 M、N,连结 AM,DN,如图 0-10 所示,则由已知,四边形 $ACMG$ 和 $DBNH$ 都是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形).

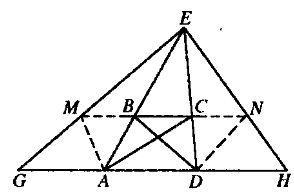


图 0-10

则
$$S_{\square ACMG}=2S_{\triangle ACM},\quad S_{\square DBNH}=2S_{\triangle BDH}.$$

又$\because AC=AC$,$EG//AC$,(已知)

$\therefore S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ACE}$.(同底等高的三角形等积)

同理,$S_{\triangle BDN}=S_{\triangle DBE}$.

然后用证法一中的过程,

可得　$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$,

于是　$2S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle DBE}$.(等量公理)

$\therefore S_{\square ACMG}=S_{\square DBNH}$.(等量代换)

又$\because AD/\!/BC$,(已知)

$\therefore$ 当$\square ACMG$和$\square DBNH$分别以 GA 和 DH 为底时,其高相等,设为 h.(平行线间距离处处相等)

由 $S_{\square ACMG}=GA\cdot h$, $S_{\square DBNH}=DH\cdot h$,

得到 $GA=DH$.

表面上看.两种证法从一开始添加辅助线,就分道扬镳了,但走到最后,都走到了需要证明 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$这座"桥"前,都要走过这座"桥",证明才能完成,可见,证出 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$是关键.这是"多解归一"的第一个层次.

在到达这座"桥"之前,两种证法走的路径虽各不相同,证法一是连结 GC、HB,证法二是完成平行四边形后再各取其一半,但过程的实质没有区别,都是借助于平行线间距离处处相等,分别把它们的面积挂钩到$\triangle ACE$和$\triangle DBE$ 的面积上,多么相似!

同样地,在过"桥"之后,无论证法一中由 $S_{\triangle ACG}=S_{\triangle DBH}$导出 $GA=DH$,还是证法二中由 $S_{\square ACMG}=S_{\square DBNH}$推出 $GA=DH$,过程的本质又无不同,都先由平行线关系导致高相等,然后,高相等的等积三角形(或平行四边形)的底相等.何其相似.这是"多解归一"的第二个层次.

再深入一步,如果把走到"桥"前的过程返回来看,证法一和证法二都是把点 E 沿着 EG、EH 这两条轨道滑动.证法二是分别滑到 M、N 就停止了;而证法一则是一直滑到终点 G、H.这样,便达到了"多解归一"的第三个层次.

至此,再返视这道有相当难度的题目,它原来不过是三个因素(利用顶点平行滑动后证等积和反过来等积后证等边、两块等积形加上公共部分后仍等积)的有机结合,不但可以把"庞然大物"视为"草芥",而且对这三个因素的运用能力提高了一步.

第二个例子:因式分解 a^3-8a+7.

解法一 原式 $=a^3-a-7a+7=a(a^2-1)-7(a-1)=(a-1)(a^2+a-7)$.

解法二 原式 $=a^3-8a+8-1=(a^3-1)-8(a-1)=(a-1)(a^2+a-7)$.

解法三 原式 $=8a^3-7a^3-8a+7=(8a^3-8a)-(7a^3-7)$

$=8a(a+1)(a-1)-7(a-1)(a^2+a-1)=(a-1)(a^2+a-7)$.

以上三种解法,只想出任何一种(特别解法三)时,都会对"拆项法"产生畏惧心理,因为,为什么把 7 拆成 $-1+8$,分解就能成功,似乎太偶然了.可怕!

但若写出解法一和解法二两种解法后,并加以比较,会发现它们都有着共同的必然,那就是欲"拆"某项时,要视另外两项的系数而定,使拆后和另外两项配组后,组与组之间,有公因可提,恰如俗话所说"言左右而顾它".这就是"多解归一"的那个"一".

有了这个"归一",把 a^3 拆成了 $-7a^3+8a^3$,才会产生解法三.

甚至,运用照顾另两项的思想,可不可以添上所缺的 a^2 项呢?这就产生了解法四.

解法四 原式 $=a^3-a^2+a^2-8a+7=a^2(a-1)+(a-1)(a-7)=(a-1)(a^2+a-7)$.

时至今日,对于这种可分解的三次缺项式的因式分解,谁都可以"翻手为云,覆手为雨"了,手到擒来,功劳记谁账?"多解归一"!

"多解归一"继续前进,就来到了"多题归一".

什么是"多题归一"?

这个提法,从字面上来说,语意不太明确,事实上,这里有两层含义.

第一层含义是,举一反三,善于发现,有所前进.

如前述李毅同学解那道求$|x-a|+|x-b|+|x-c|$的最小值题目时,从已知 $a<b<c$,自觉分析了 $a<b<c<d$ 时的情况,从而解决了 $a<b<c<d\cdots$任意个数的一切情况,就属于这层意义上的"多

题归一”.

第二层含义是,“举二反三,有所发现,有所前进”.

这里的“举二”中的二,是指从几道题目的分析中,抽象出解题的共同规律和方法.

看一组题目,第 1 题:

已知　如图 0-11 所示,BO、CO 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$,$MON /\!/ BC$.

求证　$MN = BM + CN$.

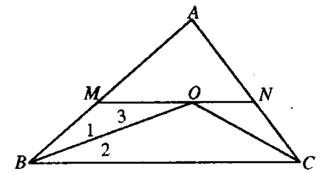


图 0-11

证明　$\because MON /\!/ BC$,(已知)

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.(两直线平行,则内错角相等)

又$\because \angle 2 = \angle 1$,(已知)

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.(等量代换)

$\therefore MO = BM$.(等腰三角形判定定理)

同理　$NO = CN$.

$\therefore MN = MO + NO = BM + CN$.

第 2 题:

已知　如图 0-12 所示. CO、BO 分别平行 $\angle ACB$ 的外角和 $\angle ABC$,$MNO /\!/ BC$.

求证　$MN = BM - CN$.

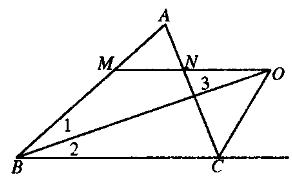


图 0-12

证明　$\because MNO /\!/ BC$,(已知)

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.(两直线平行,内错角相等)

又$\because \angle 2 = \angle 1$,(已知)

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.(等量代换)

$\therefore MO = BM$.(等腰三角形判定定理)

同理　$NO = CN$.

$\therefore MN = MO - NO = BM - CN$.

总结　对两题的证明进行分析,不难发现,$\triangle BMO$和$\triangle CNO$ 是等腰三角形的判定,对于完成两题的证明,都起了重要作用,因而,是不是可以把“图形中存在角的平分线,又存在一条和角一边平行的直线时,应立即找出必然存在的一个等腰三角形”作为一条思考规律. 这就是“举二反三,有所发现,有所前进”的第一种情况是:从几道题的分析中,总结出了共同的、具体的思考规律.

第二种情况是,总结抽象出的不是具体的思考规律,而是普适的思想方法. 这种“举二反三”,却常常为人们所忽视,尽管它的意义可能更重大.

例如,人们无不钦羡高斯幼年时的聪明灵活,用

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+99+100 &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51) \\ &= 101 \times 50 = 5050 \end{aligned}$$

的方法,迅速完成了老师为了为难学生而设计的题目.

但很少人推敲,小高斯的聪明,源自何处? 其实,小高斯不过是运用“动的思想”,换了角度来看问题,不是吗?

原题所显示的看问题的方向是如箭头所示:

$$\overrightarrow{\quad 1+2+3+\cdots+99+100 \quad}$$

而小高斯则站在对准 50 和 51 间缝隙的位置上,观察问题,如图 0-13 所示.

两相对比,当有启发:灵活性的本质,是换个角度看问题的思考习惯.

不是吗? 前述李毅同学巧妙地解答“求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值”那道题目,不正是从站在题目呈现的“代数面孔”的角度,大交叉地换位到几何的角度去思考的结果吗?!

而有时,特别在解一些难度较高的题目时,甚至要求在解题过程中,审时度势,随时换个角度看问题.

下面是一道较难的数学竞赛题目.

已知　在 $2n \times 2n$ 的方格棋盘中放 $3n$ 个棋子,每格至多放一个棋子,如图 0-14 所示,如果棋盘的每一横行称为行,每一纵行称为列.

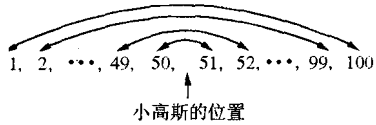


图 0-13

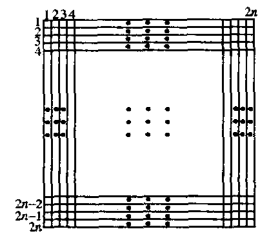


图 0-14

求证　这 $3n$ 个棋子,至多占有 n 行 n 列. 即,至多用 n 个行条、n 个列条,可以把这些棋子都盖住.

分析　为了使有限的条子把棋子都盖住,开始时,应尽量使每条条子多盖一些棋子,由于条子只有 $2n$ 张,棋子有 $3n$ 个,那么,必定需要一部分条子所盖的棋子数目 $\geqslant 2$. 这样,就找到了解决本问题的入手点. 分两种情况:

Ⅰ　当棋盘中,每行的棋子数大于等于 2 的行数目 $\geqslant n$ 时,先用 n 行条子盖住其中的 n 行,所盖住的棋子总数 $k \geqslant 2n$.

这样,所剩棋子总数为 $3n-k \leqslant n$,那么再用 n 列条子,足可以全部盖住它们(因为每列条子至少可以盖住一个棋子);

Ⅱ　当棋盘中,棋子数大于等于 2 的行数目 $<n$ 时 ,先从 n 行条子取出一部分把它们盖住,设用去了 l 行,盖住了棋子 $2l$ 个,再用剩下的 $n-l$ 行条子去盖每行一个棋子的行,这时,总共盖住的棋子数为

$$k \geqslant 2l+(n-l)=n+l,$$

再往下的推证就比较困难了,势必讨论这 l 行中棋子更精确些的总数问题,可以说,问题复杂化,一时陷入僵局了.

这时,如果我们换个角度看问题:

对情况Ⅱ,(从带有“ * ”标记的地方开始)先用 n 行条子盖住这些行和另外一些行.

由于所剩 n 行内,每行棋子数不超过 1,因而所剩棋子总数不超过 n,那么,再用 n 列条子,足可以把它们都盖住. 证毕.

多么简洁明了! 原因在哪里?

原因是,对于情况Ⅰ,是用 $3n$ 减去被盖住的棋子总数,来证明剩余棋子总数不大于 n.

而对于情况Ⅱ,则是用剩余行数为 n,每行内棋子不多于 1 个,来证明剩余棋子总数不大于 n.

从情况Ⅰ到情况Ⅱ,条件的改变使原思路受阻,立刻抓住形势的特点,把看问题的角度,从计算盖住的总数,转移到尚未盖的行数上. 立即使“山重水复疑无路”的局面,转呈“柳暗花明又一村”.

这就是，在解题（特别是难题）的过程中，审时度势，随时换个角度看问题.

以上只以“换个角度看问题”作为例子，说明“多题归一”的最高层次，但所说这最高层次的“多题归一”的“归一”，绝不仅限于“换个角度看问题”.

（2）对待失误，善于反思，“吃一堑，长一智”

修正错误，也是讲究做题方法的一个内容. 因为题做错了，是纠正自己对概念的片面理解或不正确思想方法的良机. 如果只是重做一遍，而不去分析发生错误的第一层原因，第二层原因……那么，即使这次做对了，再做类似的题还会出错. 更重要的是，认识上得不到提高.

正确的态度和作法是，回忆当时做题的思考过程，找出产生错误的概念理解上的原因是什么？在知识掌握上的原因是什么？在思想方法上的原因是什么？找出避免这种失误的切实可行的办法，不就是“吃一堑、长一智”了吗！

而且，找出的失误原因，应当是深一层的（即本质上）原因，从而避免失误，这样才能真正起到“吃一堑、长一智”的作用.

（三）在“有所总结，有所发现，有所创造，有所前进”中，融汇贯通

前面关于讲究做题方法，谈到要总结规律和方法，这是学习中进行总结的第一个层次.

第二个层次的总结是小结，是把一个单元的内容进行条理、归纳，分出概念、定理公式、基础知识、方法几个类别；找出每个类别里主次排列、相互间的联系及本单元有关题目的解题思考方法.

第三个层次的总结是全书复习. 是在各部分小结的基础上，在已经寻找联系和规律的基础上，进行概括，进行贯通，把全书（知识）归纳在一个或几个系统内，统率在一个或几个想法之下，达到对全书了若指掌的程度，同时把自己驾驭知识的水平又提高一步.

至此，我想读者不难同意，与此相比，所谓“头悬梁、锥刺股”原始式的强迫灌输，恐怕的确算不上“刻苦”学习了吧.

下面，将和同学们讨论各章的学习.

作三点说明：

第一，为配合课程学习，知识的划分与现行初中课本的章序应取一致.

第二，篇幅所限，课本上的定义、定理、公式的原文，一般不重复. 本书着重于对它们的分析、理解、应用规律和思考方法的讨论. 由于篇幅的限制，也只能限于最主要的内容，望读者举一反三.

第三，要在游泳中学会游泳. 据此道理，在读例题时，请先自己想，即使碰壁，也不要一上来就看书上的解答. 两相对比，才好纠正自己的偏颇. 由于学习思考是第一位的，所以，请同学们特别重视读每道例题解法前的分析（思考方法，得到正确解法的想法酝酿过程，即怎么想的）和每道例题后面的说明（思考规律、解题思考方法）.