毛纲源经济类数学辅导系列

系统 · 专业 · 经典 · 实用

经济类数学学习指导　硕士研究生备考指南

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳

(第3版)

与人大版赵树嫄主编·四版配套

毛纲源 编著

△专题讲解　涵盖重点难点

△通俗易懂　帮助记忆理解

△同步学习　深入辅导指点

△复习迎考　获益效果明显

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经济数学(线性代数)
解题方法技巧归纳(第3版)

与人大版赵树嫄主编·四版配套

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳(第3版)/毛纲源　编著.—武汉：华中科技大学出版社，2011.10

ISBN 978-7-5609-7133-9

Ⅰ.经…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.高等数学-高等学校-题解　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第092744号

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳(第3版)　　　毛纲源　编著

策划编辑：王汉江

责任编辑：王汉江

封面设计：潘　群

责任校对：周　娟

责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437

录　　排：武汉佳年华科技有限公司

印　　刷：湖北新华印务有限公司

开　　本：850mm×1168mm　1/32

印　　张：14.125

字　　数：477千字

版　　次：2011年10月第3版第13次印刷

定　　价：26.00元

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换

全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

内 容 提 要

本书将经济数学(线性代数)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧,其中不少是作者多年来积累的教学经验.读者阅读此书,必将增强分析问题、解决问题和应试的能力.

本书实例多、类型广、梯度大.例题主要取材于两部分:一部分是人大版《线性代数》(第4版)中的典型习题;另一部分是历届全国硕士研究生入学考试数学试题,其中经济类的数学试卷三的考题绝大部分都已收入.

本书可供本(专)科学生学习经济数学(线性代数)阅读与参考,对于自学者和有志攻读经济学和工商管理硕士(即MBA)学位研究生的青年,本书更是良师益友;对于参加成人教育自考的读者,本书也不失为一本有指导价值的参考书;对于从事经济数学(线性代数)教学的教师,也有一定的参考价值.

作 者 简 介

毛纲源教授,毕业于武汉大学,留校任教,后调人武汉理工大学担任数学物理系系主任,在高校从事数学教学与科研工作40余年,发表多篇关于考研数学的论文。主讲微积分、线性代数、概率论与数理统计课程。理论功底深厚,教学经验丰富,思维独特。曾多次受邀在山东、广东、湖北等地主讲考研数学,并得到学员的广泛认可和一致好评:"知识渊博,讲解深入浅出,易于接受","解题方法灵活,技巧独特,辅导针对性极强","对考研数学的出题形式、考试重难点了如指掌,上他的辅导班受益匪浅"……同样,毛老师的系列数学辅导书也受到读者的欢迎与好评,有兴趣的读者可以上网查询有关对他编写的图书的评价。

◎毛纲源经济类数学辅导系列(3本)

◎毛纲源理工类数学辅导系列(4本)

◎毛纲源考研数学辅导系列(10本)

出版说明

本书是在《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳》(第2版)的基础上修订而成,原书的第1版、第2版自出版以来一直受到广大读者厚爱,多次重印,畅销全国. 本书的修订广泛听取了读者的意见,对前两个版次的内容作了适当的调整、充实和删改.但保留了前面版次的特色:按问题分类,通过引例,归纳、总结该课程的重要问题的求解方法及其技巧;例题丰富而又典型,类型广、梯度大;叙述详细,通俗易懂,便于自学.

另外,准备考研的朋友可以参考由毛纲源老师编写、我社出版的一套优秀考研书籍:

◎最新考研数学(三)常考题型解题方法技巧归纳

◎考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(微积分)

◎考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(线性代数、概率论与数理统计)

编辑推荐

毛纲源教授是我社的特约作者,先后编著并在我社出版的图书品种达20余种,其出书数量在国内实属罕见,不论是数学辅导书(经济类、理工类)的编写,还是考研数学辅导书的编写,都体现了老一辈教师严谨治学的工作作风,作为毛老师系列图书的责任编辑也从中受益匪浅.同时,毛老师的系列图书十几年来一直作为我社的畅销书和常销书,在读者心目中赢得了良好的口碑,已有数十万学子从中受益.

为了更好地让读者了解本书,特将各大网站读者对毛老师图书的评价进行了整理、归纳(见读者反馈),其目的并不是宣传本书,而是让那些在学习数学的过程中遇到困难的读者能够找到一本真正的好书,让那些希望学好数学并准备考研的朋友从中受益.为了让学习数学的朋友有一个交流的空间,特建立了一个QQ群(群号:149812311)和一个博客(http://blog.sina.com.cn/u/1407989680),希望读者相互交流、相互受益.

特此推荐!

读 者 反 馈

毛纲源老师的系列书自出版以来，深受读者青睐，同时受到读者的一致好评. 现将各大网站（当当网、卓越网、京东商城、淘宝网等，关键字搜索“毛纲源”）读者的反馈信息收集整理如下，以飨读者.

相信毛老师的书 2011-02-17 17:59

解题方法归纳得好！书的质量也还好！

讲得不错 2011-01-04 20:19:44

很细致，很到位，值得购买。

价格实惠，内容不错 2011-04-05 18:12:35

在书店看过，内容不错，讲得比较细，价格很实惠。

相当不错！ 2011-04-03 13:30:59

内容很经典，很实用！强烈推荐！

值得推荐 2011-04-11 16:55:36

刚使用，书写的比较系统，认真使用收获会很大。

很好很强大啊 2010-11-15 21:38:38

在东南大学图书馆看到了，借的看了看，真的不错，总结了很多技巧，很实用！

题目讲解很细，分难度解析 2010-11-23 16:40:19

很喜欢这本书，题目讲解的很细，归纳的很好，分层次地解题，总结的通俗易懂，基础中有提高，让你很开心地就掌握了方法。内容真的不错～！

很好 2010-09-23 21:42:03

这本书好像不怎么畅销～其实很好用～我在我们学校图书馆里看到的～就看了下～发现这里面有很多方法技巧～只要记住了～基本的题目都会做。

是老师介绍我们买的 2010-03-11 16:54:29

我们数学老师说这本书很好，买了之后看了，觉得书中的案例太经典了，值得推荐。

很好，喜欢华中科大出的技巧方法的数学书 2010-03-18 19:13

推荐大家用这一系列的书，个人比较喜欢。大家可以试试看。

Good 2009-07-16 21:25:35

老师推荐的，里面的方法总结得很好！

书很好很好，值得一看 2009-12-15 20:28:51

我们数学老师给我们推荐买的，这本书的体系很好，是按照题型来编排的，而且题很好，有些人会觉得这本书的版本翻新的有点慢，但是数学的内容本来就改的较少。总之，推荐这本书。

书不错 2010-03-26 08:27

这本书还是很经典的，相对那些考试机构的书最大的优点就是详细，方法经典。

还不错 2009-12-11 21:44:47

挺不错的，方法讲的很到位，想考研的同学可以买一套来看看，有很大帮助的。

思路清晰 2008-11-20 01:05:10

以例子的形式介绍不同类型的解题方法，很适合我用来考前突击。

不错 2007-12-06 09:48:40

经典的一本书，打基础阶段最适合用这本书。

书很好，值得推荐 2009-10-20 11:50:30

注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细。

试题经典，解析清楚 2009-08-10 9:20:10

对基本概念、基本理论进行剖析，同时配合经典例题。

好书，值得拥有 2008-10-22 12:30:50

介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧。

前　言

《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳》自第1版、第2版出版以来一直受到广大读者的厚爱和好评,多次重印,畅销全国.本书是在第2版的基础上进行的修订,修订过程中广泛听取了广大读者朋友的建议,对第2版的内容作了适当的调整、充实和删改,但仍保留了前两个版次的特色.

编写本书的目的是为帮助经济类和其他文科类在校学生和自学者学好经济数学(线性代数),为他们备考研究生提供一份复习资料.事实证明,购买本书的读者已绝大部分从中受益.

本书将经济数学(线性代数)的主要内容按问题分类,通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教科书、习题集和题解,自具特色.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题一部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版(以下简称"人大版")的《线性代数》(第4版)中的典型习题(原习题的题号在例序后用表示章序、类序(A类还是B类)、题序和小题序的三个或四个字加上方括号标志.例如,例3[2A3(2)]表示例3是人大版《线性代数》(第4版)第2章A类第3题的第2小题).例题的另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题,其中数学试卷三的考题(适用经济类、财政类专业的考生)绝大部分都已收入(例序后用表示年份的数字和数学试卷类别加上方括号标志.例如,例1[2010年3]表示例1是2010年数学试卷三中的考题).

采用人大版《线性代数》(第4版)中典型习题,是因为该书是目前我国文科类专业使用量最大的一本教材,习题部分比较准确地反映了学习经济数学(线性代数)的基本要求.通过这些例题的学习将有利于促进学生全面掌握经济数学(线性代数)的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该课程的基本内容.

需查找人大版《线性代数》(第4版)中习题解答的读者,请参看书末附录.

通过统考试题的研讨,使有志攻读硕士学位的同学"平战结合",了解考

研试题的特点及其逐年发展趋势，从知识上、题型上、方法和技巧上作好应试准备，做到心中有数.这些考题一般并非都是难题，其突出特点是全面、准确地体现了教学大纲的要求.不少试题的原型就是《线性代数》中的习题.多做考题，并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧，无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力及加深经济数学(线性代数)的理解都是大有好处的.

考虑到经济类和其他文科的学生和自学者学习经济数学(线性代数)的困难，编写此书时，在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外，还在不少例后加写注意部分，以总结解题经验，避免常犯错误.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学(线性代数)时阅读和参考；对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事经济数学(线性代数)教学的教师也有一定的参考价值.

鉴于目前有关读物尚缺，适用于理工科学生阅读的线性代数参考读物，文科学生阅读不太适宜.作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集历年来数学试卷三的绝大部分考题和其他试卷的部分考题，编写成这本书，为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力.希望本书能激起在校的和自修的广大同学学习经济数学(线性代数)的兴趣，这是作者最大的心愿.

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教！

另外，准备考研的朋友，可以参考本人编写的由华中科技大学出版社出版的一套考研书籍：

◎ 最新考研数学(三)常考题型解题方法技巧归纳

◎ 考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(微积分)

◎ 考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(线性代数、概率论与数理统计)

毛纲源

2011 年 8 月

目　　录

第 1 章　计算行列式

1.1　计算排列的逆序数

一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$($i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 n 个不同数码)的逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 其求法有两种. 一种是从排列中的第 2 个(自然排列的左边算起)数码 i_2 开始计算，求出比它大且在其左边数码的个数，即为与该数码构成的逆序数的个数. 同法再算出在第 3 个数码 i_3 左边且比它大的数码的个数，即为与该数码构成的逆序数的个数……最后算出第 n 个数码 i_n 的左边比它大的数码的个数，即为与该数码构成的逆序数的个数，将所有这些个数相加，即得该排列的逆序数.

另一种算法是先求出在数码 1 的左边且比 1 大的数码的个数，再算出在数码 2 的左边且比 2 大的数码的个数……最后算出在数码 $n-1$ 的左边且比 $n-1$大的数码的个数，将所有这些个数相加即为该排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1　求下列排列的逆序数：

(1) [1A8(3)]*　36715284；　　(2) [1A8(4)]　$n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) **解一**

排列中的数码	3	6	7	1	5	2	8	4
与各数码构成的逆序数		0	0	3	2	4	0	4

故排列 36715284 的逆序数为 $0+0+3+2+4+0+4=13$.

解二　在该排列数码中 1 的左边且比 1 大的数码有 3 个，因而与数码 1 构成逆序的个数为 3. 同法可求得与数码 2，数码 3，数码 4，数码 5，数码 6，数码 7 构成逆序的个数分别为 4，0，4，2，0，0，0. 因而所求的逆序数为

$$N(36715284)=3+4+0+4+2+0+0+0=13.$$

* [1A8(3)]表示该例是人大版《线性代数》(第 4 版)第一章习题中 A 类第 8 题的第 3 小题. 下同.

(2)

排列中的数码	n	$n-1$	$(n-2)$	$\cdots$	3	2	1
与各数码构成的逆序数		1	2	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$

故 $$N(n(n-1)\cdots 21)=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=n(n-1)/2.$$

例 2 下列(　　)是 4 级偶排列.

(A) 4321　　(B) 4123　　(C) 1324　　(D) 2341

解 仅(A)入选.因为

对于(A),$N(4321)=3+2+1=6$,4321 是偶排列;

对于(B),$N(4123)=1+1+1=3$,4123 是奇排列;

对于(C),$N(1324)=1$,1324 是奇排列;

对于(D),$N(2341)=3$,2341 是奇排列.

例 3 选择 a 与 b,使(1) $4a2b3$ 成偶排列; (2) $1a25b4869$ 为奇排列.

解 (1) 排列 $4a2b3$ 中缺数码 1,5,故 a,b 只能取 1 或 5.

当 $a=1,b=5$ 时该排列为 41253,其逆序数为 4,因而 41253 为偶排列.但当 $a=5,b=1$ 时,该排列为 45213,它是排列 41253 将 5 与 1 对调的结果,奇偶性改变,它为奇排列.应选 $a=1,b=5$.

(2) 在排列 $1a25b4869$ 中缺 3,7,故 a,b 只能取 3 或 7.

若取 $a=3,b=7$,则排列 132574869 的逆序数为 5,因而该排列为奇排列.若取 $a=7,b=3$,则排列为 172534869,它是排列 132574869 将 3,7 对调的结果,排列的奇偶性改变,则 172534869 为偶排列.应选 $a=3,b=7$.

习 题 1.1

1. [1A8(1),(2)] 求下列排列的逆序数:(1) 41253;(2) 3712456.

2. 求 a 与 b 使(1) $4a2b5$ 成偶排列;(2) $3a124b6$ 为奇排列.

3. 排列 $3972i15j4$ 是偶排列,则 $i=$____,$j=$____.

4. 下列排列为偶排列的是(　　).

(A) 4312　　(B) 51432　　(C) 45312　　(D) 654321

1.2 利用定义计算行列式或求其部分项

(一) 用定义计算行列式的方法

用行列式定义计算或证明行列式一般适用于零元素较多的行列式或低

阶行列式和某些特殊的行列式.

含零元素较多的行列式常称为稀疏行列式,可用定义直接计算其值.因行列式的项中有一因数为零时,该项的值为零,故只需求出所有非零项即可.如何求出呢?常用下述两法.

【法一】 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项.

当行列式含大量零元素,尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时,用此法计算较简便.

例 1 用行列式定义计算下列 n 阶行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) [1A12(2)] $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 D_1 与 D_2 均为稀疏行列式,可按行列式定义直接计算其值.

(1) 由行列式定义,D_1 的每一非零项由不同行、不同列的 n 个非零元素乘积所组成.第 1 行的非零元素只有 $a_{1n}=1$,第 2 行的非零元素只有 $a_{2,n-1}=2$,…,第 $n-1$ 行的非零元素只有 $a_{n-1,2}=n-1$,第 n 行的非零元素只有 $a_{n1}=n$.而这 n 个非零元素又在不同的列,因此 D_1 除去等于零的项外,只有一项非零项,即

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!.$$

这一项的行下标排列为自然排列,列下标排列为 $n(n-1)\cdots 21$,其逆序数为 $N(n(n-1)\cdots 21)=n(n-1)/2$,故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}n!$.

(2) 同法可求 D_2,除去等于零的项外,非零项只有一项,即

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!.$$

这一项的行下标为自然排列,而列下标排列为 $23\cdots(n-1)n1$,其逆序数为 $N(23\cdots(n-1)n1)=n-1$,故 $D_2=(-1)^{n-1}n!$.

例 2[1A11] 设 n 阶行列式有 n^2-n 个以上元素为零,证明该行列式为零.

解 根据行列式定义,该行列式展开后都是 n 个元素相乘,而 n 阶行列

式共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每项都至少含一个零元素，所以每项必等于零，故此行列式等于零.

【法二】 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.2.1)$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果这样的非零项一个也没有，则不含非零项，行列式等于零，这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

大家知道，上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad (1.2.2)$$

下面证明次三角行列式的值等于次对角线上元素的乘积，并带上适当正、负号，即

例 3 设 $$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $$D_n=\Delta_n=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.2.3}$$

证 D_n 与 Δ_n 均为稀疏行列式，可按行列式定义直接证明.

(1) D_n 中第 1 行非零元素为 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$，故 $j_1=1,2,\cdots,n-1,n$. 同法可求得 $j_2=1,2,\cdots,n-1$; $\cdots$; $j_{n-1}=1,2$; $j_n=1$.

下面求 $j_1j_2\cdots j_n$ 可能取的所有 n 元排列.

因 $j_n=1$，故 $j_{n-1}=2,j_{n-2}=3,\cdots,j_2=n-1,j_1=n$，即 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能取一个 n 元排列 $n(n-1)\cdots21$. 于是 D_n 的非零项只有一项，即

$$D_n=(-1)^{N(n(n-1)\cdots21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

(2) 同法可证 $\Delta_n=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

注意 若 $n(n-1)/2$ 为偶数，即若 $n=4t+1$ 或 $n=4t$，其中 t 为正整数或零，则该排列 $(n(n-1)\cdots21)$ 为偶排列，该项带正号；若 $n(n-1)/2$ 为奇数，即若 $n=4t+2$ 或 $n=4t+3$，该排列为奇排列，该项带负号.

例 4 用定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}$$

解一 D 为稀疏行列式，可按行列式定义求其值. 求 D 的值时，只需求出 D 中所有非零项即可. 求解时应注意 D 为 1986 阶行列式.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$，因而 j_1 只能取 1985，即 $j_1=1985$. 同理可知 $j_2=1984,j_3=1983,\cdots,j_{1985}=1,j_{1986}=1986$，于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{1985}$，j_{1986} 在可能取的数码中，$j_1j_2\cdots j_{1985}j_{1986}$ 只能组成一个 1986 元排列：

$$1985\quad 1984\quad \cdots\quad 2\quad 1\quad 1986,$$

故 D 中非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)}a_{1,1985}\ a_{2,1984}\cdots\ a_{1985,1}\ a_{1986,1986}.$$

因 $N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times992$ 为偶数，故

$$D=(-1)^{1985\times992}1\times2\times3\times\cdots\times1985\times1986=1986!.$$

解二 因 D 中位于不同行、不同列的非零元素只有

$$a_{1,1985}=1,\ a_{2,1984}=2,\ \cdots,\ a_{1985,1}=1985,\ a_{1986,1986}=1986,$$

故 D 中非零项只有一项. 注意到 1985×992 为偶数，得到

$$D=(-1)^{N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)}a_{1,1985}\ a_{2,1984}\cdots\ a_{1985,1}\ a_{1986,1986}$$

$$=(-1)^{1985\times 992}1\times 2\times 3\times\cdots\times 1985\times 1986=1986!.$$

例 5[1A12(4)] 用行列式定义计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\neq 0).$$

解 由 D 中第 1 行和第 2 行的非零元素分别得到

$$j_1=1,2,3,4,5;\quad j_2=1,2,3,4,5.$$

其余三行只有两个非零元素,故 $j_3=1,2$; $j_4=1,2$; $j_5=1,2$.

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取得的数码中不能组成一个 5 元排列,这说明一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 的列下标 $j_3j_4j_5$ 至少有一个要取 3,4,5 中之一,因而一般项中 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中至少有一个因子取零,即一般项为零项,所以 D 中没有非零项,故 $D=0$.

注意 (1) 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{sj_s}$ $(2\leqslant s\leqslant n)$,其列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s,则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s,j_{s+1},\cdots,j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成,即 D 中没有非零项,从而 $D=0$. 例如,在五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中,a_{1j_1} 的列下标 $j_1=1,3$;a_{2j_2} 的列下标 $j_2=1,2,3,4,5$;a_{3j_3} 的列下标 $j_3=1,2,3,4,5$;a_{4j_4} 的列下标 $j_4=1,3$;a_{5j_5} 的列下标 $j_5=1,3$. 如 $j_1=1$,则 $j_4=3$,而 j_5 没有数码可取. 因而 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 一个排列也不能组成,即 D_5 中没有一个非零项,故 $D_5=0$.

(2) 一般地,若 n 阶行列式中位于某 k 行、l 列交叉处元素全部为零,且 $k+l>n$,则该行列式之值等于零.

例 6 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$