九章丛书

数值分析

第五版

同步辅导及习题全解

主　编　孙雨雷　冯君淑

- 知识点窍 • 逻辑推理 • 习题全解
- 全真考题 • 名师执笔 • 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数值分析（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　孙雨雷　冯君淑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是为了配合清华大学出版社出版的、李庆扬、王能超、易大义主编的《数值分析》（第五版）教材而编写的配套辅导书。

本书共九章，分别介绍数值分析与科学计算引论、插值法、函数逼近与快速傅里叶变换、数值积分与数值微分、解线性方程组的直接方法、解线性方程组的迭代法、非线性方程与方程组的数值解法、矩阵特征值计算、常微分方程初值问题数值解法。全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析。针对各章节全部习题给出详细解题过程，并附以知识点窍和逻辑推理，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为工科各专业、本科学生、《数值分析》课程教学辅导材料和复习参考用书，也可作为工科考研强化复习的指导书及《数值分析》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数值分析（第五版）同步辅导及习题全解 / 孙雨雷，冯君淑主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2011.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-8845-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①孙… ②冯… Ⅲ. ①数值分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第145682号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **数值分析（第五版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　孙雨雷　冯君淑
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　10.75 印张　223 千字
版　　次	2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	18.80 元

前 言

《数值分析》是数学系专业基础课程之一。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数值分析（第五版）同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书是清华大学出版社出版的、李庆扬、王能超、易大义主编的《数值分析》（第五版）配套的学习辅导书，主要由如下几个部分组成：

1. **学习导引**。说明本章包括的主要内容，学习的重点以及需要掌握的知识点。

2. **知识点归纳**。对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

3. **典型例题与解题技巧**。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题，对所给例题先进行分析，再给出详细解答，意在抛砖引玉。

4. **课后习题全解**。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者
2011 年 8 月

目　录

第一章

绪　论

学习导引

本章简要地介绍了数值分析的研究对象,近似计算过程中的一些基本概念,如误差、有效数字、误差限以及计算中需要注意的一些现象.本章重点是一些概念的理解以及误差估计的方法.

知识点归纳

一、误差度量

1. 数值分析研究的两类误差

舍入误差和截断误差.由于计算机字长的有限性,对相关数据进行存储表示时便产生舍入误差,计算机必须在有限的时间内得到运行结果,于是无穷的运算过程必须截断为有限过程,由此产生截断误差.

2. 误差的度量方式

设 x^* 是真值 x 的一个近似值.绝对误差为 $e^* = x^* - x$,相对误差为 $e_r^* = \frac{e^*}{x} \approx \frac{e^*}{x^*}$.绝对误差限 ε^* 和相对误差限 ε_r^* 分别是 $|e^*|$ 和 $|e_r^*|$ 的上限.

3. 有效数字的定义

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,就说 x^* 有 n 位有效数字.它可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \tag{1.1}$$

其中 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,m 为整数,且

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

4. 有效数字和相对误差的关系

定理 1.1　如果形如式(1.1)的 x^* 有 n 位有效数字,则

$$|\varepsilon_r^*| \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

定理 1.2 如果形如式(1.1)的 x^* 的相对误差限满足

$$|\varepsilon_r^*| \leqslant \frac{1}{2(a1+1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字.

5. 误差限的运算

两个近似数 x_1^* 与 x_2^*,其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$,它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon(x_1^*/x_2^*) \approx \frac{|x_2^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| (x_1^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0).$$

二、浮点数系统

对于 $s+t+2$ 位的浮点数系(s 表示二进制阶码数值的二进制位数,t 表示尾数的二进制位数,其他两位表示阶码和尾数的符号),机器数绝对值的范围是 $2^{-2^s} \sim 2^{2^s-1}$,实数表示的相对舍入误差限是 2^{-t}. 当数据的绝对值大于 2^{2^s-1} 时,计算机非正常停机,称之为上溢,当非零数据的绝对值小于 2^{-2^s},用机器零表示精度损失,称之为下溢.

三、误差传播

如果在运算过程中舍入误差能够得到控制,或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果,则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下

$$f(x^*) - f(x) \approx f'(x^*)(x^* - x) \tag{1.2}$$

$$f(x_1^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, \cdots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x^i}(x_1^* - x_i) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(f(x^*) \approx |f'(x^*)| \varepsilon(x^*) \tag{1.4}$$

四、数值稳定性

不同的教材对数值方法稳定性的定义有所不同,有的要求随计算过程的深入误差不增长,有的则要求误差增长速度不能太快. 只要不影响产生具有有效数字的近似值即认为是稳定的. 读者应注意教材中的定义. 随着学习的深入,会针对各种具体算法给出稳定性的确切定义.

典型例题与解题技巧

例 1 求 $\sqrt{3}$ 的近似值,使其绝对误差限精确到 $\frac{1}{2} \times 10^{-1}, \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

【逻辑推理】　本题考查了绝对误差限的知识.

【解题过程】　因为$\sqrt{3} = 1.73205\cdots$. 由于

$$\varepsilon^*(1.7) = |\sqrt{3} - 1.7| = 0.03205\cdots < 0.05$$

$$\varepsilon^*(1.73) = |\sqrt{3} - 1.73| = 0.00205\cdots < 0.005$$

$$\varepsilon^*(1.732) = |\sqrt{3} - 1.732| = 0.00005 < 0.0005$$

所以$x_1^* = 1.7, x_2^* = 1.73, x_3^* = 1.732$.

例 2　下列数据作为$x = e$的近似值,试确定它们各有几位有效数字,并确定相对误差限.

$$x_1^* = 2.7, x_2^* = 2.71, x_3^* = 2.72$$

【逻辑推理】　本题考查了有效数字与相对误差的基础知识.

【解题过程】　$x_1^* = 2.7 = 10^0 \times 2.7$,于是有$m = 0$,由

$$|e(x_1^*)| = |x_1^* - x| = |2.7 - e| = 0.018\cdots$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-1} = \frac{1}{2} \times 10^{0-2+1}$$

可知x_1^*具有两位有效数字. 利用不等式

$$|e_r(x_1^*)| = \frac{|e_r(x_1^*)|}{|x_1^*|} = \frac{0.018\cdots}{2.7}$$

$$\leqslant \frac{0.019}{2.7} \approx 0.0070$$

得相对误差限$\varepsilon_r(x_1^*) \approx 0.0070$.

同理可求得x_2^*和x_3^*的有效数字及相对误差限.

例 3　请给出一种算法计算x^{256},要求乘法次数尽可能少.

【逻辑推理】　要尽可能地减少运算量,其中一种思路是尽可能运用已经计算出的结果. 如$x^{256} = (x^{128})^2$,当x^{128}计算出来之后,再需一次乘法便可以得到x^{256};而$x^{128} = (x^{64})^2$,同样地,当x^{64}计算出来后,再需一次乘法就可以计算出x^{128};依此类推,这样就得到一种比通常乘法次数要少得多的算法.

【解题过程】

$$\begin{aligned} x^{256} &= x^{128} \times x^{128} = x^{64} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^{32} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^{16} \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^8 \times x^8 \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x \times x \times x^2 \times x^4 \times x^8 \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \end{aligned}$$

这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

例 4　试给出一种计算积分$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$近似值的稳定递推算法.

【逻辑推理】　本题考查了算法的稳定性的知识.

【解题过程】　经分部积分有$I_n = 1 - nI_{n-1}$,虽然从$I_0 = 1 - e^{-1}$出发,可以建立一种递推算法,但当对I_0近似时,因在递推公式中出现nI_{n-1},随着递推过程的进行,导致算法误差迅速增长,因而是一种不稳定算法. 但从该递推公式中解出I_{n-1},就可以得到误差迅速减小的递推算法.

课后习题全解

1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 lnx 的误差.

【解题过程】 $\ln x-\ln x^{*}=\ln\frac{x}{x^{*}}=\ln\frac{x-x^{*}+x^{*}}{x^{*}}=\ln(\delta+1)\approx\delta.$

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

【解题过程】 $e(x^n)\approx nx^{n-1}(x-x^{*})$

$$e_r(x^n)\approx n\frac{x^{n-1}(x-x^{*})}{x^n}=n\frac{x-x^{*}}{x^{*}}=ne_r(x)=0.02n.$$

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$x_1^{*}=1.1021$,$x_2^{*}=0.031$,$x_3^{*}=385.6$, $x_4^{*}=56.430$,$x_5^{*}=7\times1.0$.

【解题过程】 $x_1^{*}=1.1021$ 有 5 位有效数字;$x_2^{*}=0.031$ 有 2 位有效数字;$x_3^{*}=385.6$ 有 4 位有效数字;$x_4^{*}=56.430$ 有 5 位有效数字;$x_5^{*}=7\times1.0$ 有 1 位有效数字.

4. 利用公式(1.4)(在课本中是公式(2.3))求下列各近似值的误差限:

(i)$x_1^{*}+x_2^{*}+x_4^{*}$;(ii)$x_1^{*}\cdot x_2^{*}\cdot x_3^{*}$;(iii)$x_2^{*}/x_4^{*}$.

其中 $x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},x_4^{*}$ 均为第 3 题所给的数.

【解题过程】 (i)$e^{*}(x_1^{*}+x_2^{*}+x_4^{*})\leqslant e(x_1^{*})+e(x_2^{*})+e(x_4^{*})$

$$=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\leqslant1.052\times10^{-3}=\varepsilon^{*}.$$

(ii) $e^{*}(x_1^{*})\cdot x_2^{*}\cdot x_3^{*})$

$$\approx x_2^{*}\cdot x_3^{*}(x_1-x_1^{*})+x_1^{*}\cdot x_3^{*}\cdot(x_2-x_2^{*})+x_1^{*}\cdot x_2^{*}(x_3-x_3^{*})$$

$$\approx0.215=\varepsilon^{*}.$$

(iii)$e^{*}(x_2^{*}/x_4^{*})\leqslant\left|\frac{1}{x_4^{*}}(x_2-x_2^{*})-\frac{x_2^{*}}{(x_4^{*})^2}(x_4-x_4^{*})\right|$

$$=\left|\frac{x_2^{*}}{x_4^{*}}e_r^{*}(x_2)-\frac{x_2^{*}}{x_4^{*}}e_r^{*}(x_4)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{x_2^{*}}{x_4^{*}}\right|\left[\left|e_1^{*}(x_2)\right|+e_r^{*}(x_4)\right|\right]$$

$$=\frac{0.031}{56.430}\left[\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{0.031}+\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430}\right]$$

$$\leqslant10^{-5}=\varepsilon^{*}.$$

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%,问度量半径 R 允许的相对误差限是多少?

【逻辑推理】 $e_r^{*}(V)=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi R^{*3}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{R-R^3}{R}\cdot\dfrac{R^2+R^{*}R+R^{*2}}{R^2}$

$$\approx \frac{R-R^*}{R}\cdot\frac{3R^2}{R^2}=\frac{R-R^3}{R}\cdot 3=1\%$$

故
$$\frac{R-R^*}{R}=\frac{1}{300}$$

6. 设 $Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100},若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(5 位有效数字),试问计算 Y_{100} 将有多大误差?

【逻辑推理】 本题考查了绝对误差限的知识.

【解题过程】 解法一 设$Y=\sqrt{783}Y^*=27.983$

$$\delta=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$Y_0=28,Y_0^*=28,\delta_0=|Y_0-Y_0^*|=0$$

$$|Y_1-Y_1^*|=\left|\left(28-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(28-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{100}\delta$$

$$|Y_2-Y_2^*|=\left|\left(Y_1-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(Y_1^*-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|$$

$$=\left|(Y_1-Y_1^*)-\frac{1}{100}(Y-Y^*)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{100}\delta+\frac{1}{100}\delta=\frac{2}{100}\delta$$

由递推公式可得

$$|Y_n-Y_n^*|\leqslant\frac{n}{100}\delta$$

则
$$|Y_{100}-Y_{100}^*|\leqslant\frac{100}{100}\delta=\delta=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

即计算 Y_{100} 的误差限不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

解法二 设 $Y=\sqrt{783},Y^*=27.983$.

$$\delta=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$Y_n-Y_{n-1}=-\frac{1}{100}\sqrt{783},Y_0=2\delta$$

由等差数列公式

$$Y_n=Y_0-\frac{100}{100}\sqrt{783}=28-\sqrt{783}$$

所以
$$|Y_n-Y_n^*|=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}.$$

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根,使它至少具有4位有效数字($\sqrt{783}\approx 27.982$).

【解题过程】 解方程 $x^2-56x+1=0$ 得

$$x=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4}}{2}=28\pm\sqrt{\frac{3132}{4}}=28\pm\sqrt{783}$$

由第6题知 $\sqrt{783}\approx 27.982$ 具有5位有效数字,故可取

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$$

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{55.982}=0.01786.$$

8. 当 $x\approx y$ 时计算 $\ln x-\ln y$ 有效位数会损失.改用 $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$ 是否就能减少舍入误差?(提示:考虑对数函数何时出现病态).

【解题过程】 考虑对数函数的病态性问题,设 $f(x)=\ln x$,则其条件数为

$$C_p=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{x\frac{1}{x}}{\ln x}\right|=\left|\frac{1}{\ln x}\right|$$

则 $x\approx 1$ 时,C_p 充分大,问题为病态

对于 $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$,由于 $x\approx y$,即 $\frac{x}{y}\approx 1$

故用 $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$ 不能减少舍入误差.

9. 正方形的边长大约为100cm,应怎样测量才能使其面积误差不超过 1cm^2?

【解题过程】 设正方形的边长为 x,则其面积为 $y=x^2$.由题设知 x 的近似值 $x^*=100\text{cm}$.记 y^* 为 y 的近似值,则依(1.2)式知

$$\begin{aligned}e(y^*)&=y^*-y=(x^2)'|_{x=x^*}(x^*-x)\\&=2x^*(x^*-x)=200(x^*-x)\end{aligned}$$

又由题意知

$$\varepsilon(y^*)\approx 200\varepsilon(x^*)\leqslant 1$$

故

$$\varepsilon(x^*)<\frac{1}{200}=0.005(\text{cm})$$

10. 设 $S=\frac{1}{2}gt^2$,假定 g 是准确的,而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差,证明当 t 增大时 S 的绝对误差增大,而相对误差却减小.

【证明】 因为 $e(S)=S-S^*=gt(t-t^*)=gte(t)$

$$e_r(S)=\frac{S-S^*}{S}=\frac{gt(t-t^*)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2e(t)}{t}$$

由上述 S 的绝对误差 $e(S)$ 与其相对误差 $e_r(S)$ 的表达式易知,当 t 增大时,$e(S)$ 增大,而 $e_r(S)$ 减小.

11. 序列$\{yn\}$满足递推关系

$$y_n = 10y_{n-1} - 1 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

若$y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$(三位有效数字),计算到$y_{10}$时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

【逻辑推理】　本题考查了误差估计和算法稳定性的知识.

【解题过程】　因$y_0 = \sqrt{2}, y_0^* = 1.41$,而

$$|y - y_0^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \delta$$

于是有

$|y_1 - y_1^*| = |10y_0 - 1 - 10y_0^* + 1| = 10|y_0 - y_0^*| \leqslant 10\delta$

$|y_2 - y_2^*| = |10y_1 - 1 - 10y_1^* + 1| = 10|y_1 - y_1^*| \leqslant 10^2\delta$

类推有

$$|y_{10} - y_{10}^*| \leqslant 10^{10}\delta = \frac{1}{2} \times 10^8$$

即计算到y_{10},其误差限为$10^{10}\delta$,亦即若在y_0处有误差限为δ,则y_{10}的误差将扩大10^{10}倍,可见这个计算过程是不稳定的.

12. 计算$f = (\sqrt{2} - 1)^6$,取$\sqrt{2} \approx 1.4$,利用下列算式计算,哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}, (3 - 2\sqrt{2})^3, \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}, 99 - 70\sqrt{2}.$$

【解题过程】　$(\sqrt{2} - 1)^6 = 0.0050506\cdots$,取$\sqrt{2} \approx 1.4$,则

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \approx \dfrac{1}{(1.4+1)^6} = \dfrac{1}{2.4^6} \approx 0.0052328$

(2) $(3 - 2\sqrt{2})^3 \approx (3 - 2 \times 1.4)^3 \approx 0.008$

(3) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \approx \dfrac{1}{(3+2.8)^3} \approx 0.0051253$

(4) $99 - 70\sqrt{2} \approx 99 - 70 \times 1.4 = 1$

经比较可知,以$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算得到的结果最好.

13. $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$,求$f(30)$的值,若开平方用6位函数表,问求对数时误差有多大?若改用另一等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

计算,求对数时误差有多大?

【解题过程】　设$y = x - \sqrt{x^2 - 1}$,则$f(x) = \ln y$. 由(1.2)及(1.4)式知

$$\varepsilon(f^*) = \frac{1}{y^*}(y^* - y)\varepsilon(f^*) \approx \frac{1}{|y^*|}|y^* - y|$$

而由题意知$|y^* - y| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$,$|y^*| = 0.0167$,所以

$$\varepsilon(f^*) \approx \frac{|y^* - y|}{|y^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{0.0167} \approx 0.3 \times 10^{-2}$$

若用等价公式 $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 计算,此时令 $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$,则

$$|y^*| = 59.9833$$

故

$$\varepsilon(f^*) \approx \frac{|y^* - y|}{|y^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{59.9833} \approx 0.834 \times 10^{-6}.$$

14. 用秦九韶算法求多项式 $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + x + 7$ 在 $x = 3$ 处的值.

【解题过程】 利用公式 $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = b_{i-1}x^* + a_i, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$ 构造出下列计算表格:

	x^5 系数	x^4 系数	x^3 系数	x^2 系数	x 系数	常数项
$x^* = 3$	$a_0 = 3$	$a_1 = 0$	$a_2 = -2$	$a_3 = 0$	$a_4 = 1$	$a_5 = 7$
		$b_0x^* = 9$	$b_1x^* = 27$	$b_2x^* = 75$	$b_3x^* = 225$	$b_4x^* = 678$
	$b_0 = 3$	$b_1 = 9$	$b_2 = 25$	$b_3 = 75$	$b_4 = 226$	$b_5 = 685$

此处 $b_5 = p(3) = 685$.

15. 用迭代法 $x_{k+1} = \frac{1}{1 + x_k}(k = 0,1,\cdots)$ 求方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正根 $x^* = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$,取 $x_0 = 1$,计算到 x_5,问 x_5 有几位有效数字.

【解题过程】 按题给迭代公式,计算 x_5

$x_0 = 1$　　　　$x_3 = 0.5999999\cdots$

$x_1 = 0.5$　　　　$x_4 = 0.625$

$x_2 = 0.6666666\cdots$　　　　$x_5 = 0.6153846\cdots$

由公式 $|x^* - x^5| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-n}$ 可得　$0.00266 \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-n}$

此时 n 取使上述不等式成立的最大整数,则 n 即为 x_5 的有效数字,可知 $n = 2$.

16. 用不同的方法计算积分 $\int_0^{1/2} e^x \mathrm{d}x$

(1) 用原函数计算到 6 位小数.

(2) 用复合梯形公式(4.7),取步长 $h = \frac{1}{4}$.

(3) 利用 T_1 及 T_2 的松弛法(4.8) 求 S_1.

【解题过程】 (1) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^x \mathrm{d}x = e^x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} - 1 \approx 0.648721.$

(2) 利用复合梯形公式,当步长 $h = \frac{1}{4}$ 时,即取点:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$$

则
$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{8}f(x_0) + \frac{1}{4}f(x_1) + \frac{1}{8}f(x_2)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx 0.652097.$$

(3) 取 $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{4}$,则
$$T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{1}{4}(1 + e^{\frac{1}{2}})$$
$$T_2 = \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(c) + f(b)] = \frac{1}{8}(1 + 2e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{1}{2}})$$

则取 $\omega = \frac{1}{3}$,利用松弛法求得
$$\delta_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$$
$$= \frac{1}{6}(1 + 2e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{12}(1 + e^{\frac{1}{2}})$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{12}e^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx 0.648735$$

17.　将 15 题迭代前后的值加权平均构成迭代公式
$$x_{k+1} = \omega x_k + (1 - \omega)\frac{1}{1 + x_k}$$
验证:若取 $\omega = \frac{7}{25}$,则上述公式比 15 题迭代收敛快.

【解题过程】　分别用 15 题的迭代公式与本题加权平均后的迭代公式迭代计算,得结果如下表.

	$x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k}$	有效数字位数	$x_{k+1} = \omega x_k + (1+\omega)\frac{1}{1+x_k}$	有效数字位数
x_0	1		1	
x_1	0.5		0.64	1
x_2	0.666667	1	0.618024	4
x_3	0.6	1	0.618034	5
x_4	0.625	1	0.618034	5

显然加权平均迭代公式收敛的速度更快.

第二章

插值法

学习导引

插值法是古老而实用的数学方法，本章主要是利用插值法构造插值函数. 我们主要研究如何求出插值多项式，分段插值函数，样条插值函数；讨论插值多项式 $P(x)$ 的存在的唯一性、收敛性及误差估计.

知识点归纳

一、定义

已知函数 $y=f(x)$ 在互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a,b]$ 处的函数值为 $\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^n$，若存在简单函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

成立，则称 $P(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的一个插值函数.

其中 $\{x_i\}_{i=0}^n$—— 插值节点，$[a,b]$—— 插值区间，

$f(x)$—— 被插值函数，式(2.1)—— 插值条件

用 $P(\bar{x})$ 的值作为 $f(\bar{x})$ 的近似值，当 $\bar{x}$ 在节点形成的区间上时，称该方法为内插法；当 $\bar{x}$ 不在节点形成的区间上但在插值区间上，则称该方法为外插法.

当插值函数 $P(x)$ 为多项式时，称 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的一个插值多项式. 插值余项

插值余项 $R(x) \xlongequal{\text{def}} f(x)-P(x)$，插值余项又称为截断误差.

二、插值多项式的存在唯一性定理

定理 2.1 满足插值条件(2.1) 的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 是存在且唯一的.

推论 2.1 若 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式，则它的关于 $n+1$ 个互异节点 $\{x^i\}_{i=0}^n$ 的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 恒等，即有