數學功力測驗

I

數學功力測驗

水木耳 譯

凡異出版社

數學功力測驗

水木耳 譯

定價：120 元

發 行：凡 異 出 版 社
郵 撥：0 1 1 4 2 2 1～5
電 話：0 3 5－7 1 2 2 5 5
門 市：六 藝 圖 書 中 心
地 址：新竹市光復路二段460號
電 話：0 3 5－7 1 6 7 5 3
總經銷：學英文化事業有限公司

中華民國77年 1月 一 版

譯　序

本問題集譯自美國健康教育及社會福利部的國家教育學院所出版的一項數學實驗報告。它包含了200個初等數學問題，都不需要特別的預備知識，只要有基本的數學技巧就能解決。不過，這些問題都不是一眼就能看穿或像例行公事一般的。它們將讓你有機會做數學研究，而又能適合你的數學程度。

一位作研究的數學家通常都要投注千百小時的辛苦工作才能發現一個新的結果或定理。你不要期望成功得來快速而輕易。

每題的大致難度可從前面的標示看出，分成從[1]到[5]五級，[1]最容易，[5]最難。

大部分的題目都可以做實驗。實驗的結果會透露出模式，帮助你得到答案。要是你已技窮，你可翻看提示。每章末附有大多數問題的簡短提示或答案。看過提示之後想辦法再解釋看。最後，拿你的答案和題解比較一下。

本書適合各種程度的數學愛好者，並且可用來鑑定你在數學上的潛在功力。

譯者曾以本書之部分作為科學園區實驗中學資優班之教材，獲得良好迴響，特此向社會各界推介，讓更多的人看到數學的廣大空間。

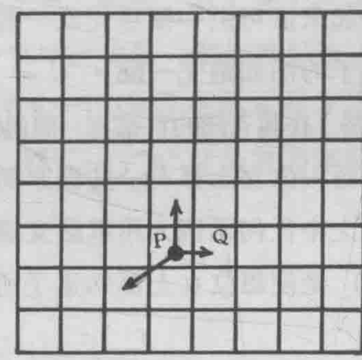
譯　者　水木耳

於新竹76年12月

目 錄

1.導引題(Ⅰ)

1 [*4*] (頭手並用) 在一塊 n × n 的西洋棋盤上，令P與Q爲相鄰的兩個格子，P在Q的左邊。在P放一顆棋子，可以向上、向右或向左下方移動到鄰旁的格子裏。證明不管 n 是多少，都無法使棋子走遍每一格之後 (正好一次) 最後到達Q。



2 [*4*] (單向通行) 在烏托邦無一條路都是單行道。每一個城市與另一個城市之間恰有一條直達路線。證明有一個城市可以從其他每一個城市直達或路過最多一個城市到達。

3 [*4*] (數據通訊) 由字母 { 0 , 1 } 組成的 n 個字母的字經由一條吵雜的通訊頻道發送出去。1 0 1 1 1 與 1 1 0 1 0 這兩個 5 個字母的字其第二、第三及第五位不同。因此稱它們之間的距離爲 3 。1 1 1 1 1 與 0 0 0 0 0 這兩個字的距離爲 5 。爲了避免誤傳，你只用距離至少爲 3 以上的字。證明 n 個字母的這些字最多有 $2^n/n+1$

個。

4 ［ *3* ］（幸運號碼）在錫奇國的中央監獄有 n 間牢房，編號 1 , 2 , 3 , … , n ，都關了犯人，牢門是按鍵式的，一按就開，再按就關。為了慶祝錫奇國建國 100 周年，總統決定特赦。他派司法部長到監獄宣布下列簡單利落的指令：

從第 1 間牢房起每間按一下開關。然後從第 2 間起每 2 間按一下，然後從第 3 間起每 3 間按一下，……。最後要是牢門是開的就釋放。那些犯人可重獲自由？

5 ［ *4* ］（接力加油）在一條圓形跑道上散佈著 n 輛完全相同的車子。它們的汽油全部加起來恰可供一輛車完成一圈。證明有一輛車它可以沿途收集其他車子的油而跑完一圈。

6 ［ *4* ］（三姑六婆）在錫奇國的首都有一個俱樂部，n 個婦女會員她們只用電話連絡。每一位女士都有一些獨家新聞是其他 n － 1 人不知道的。每次他們之中任何兩個人用電話交談時總是傾其所有，無所保留。假定 $f(n)$ 是使每位女士都知道了所有的芝蔴小事總共所需的通話次數。

(a)用實驗求 $f(1)$ ， $f(2)$ ， $f(3)$ ， $f(4)$ 。

(b)證明 $n \geq 4$ 時 $f(n) \leq 2n-4$ 。

7 ［ *3* ］（稀奇電話）錫奇國首都今年才剛裝置 7 碼的電話，但錫奇人很健忘。為了顧及經常打錯號碼，錫奇人希望即使 7 碼中有 1 碼打錯了也可以達到你的目的。說出達成此事的一個簡單方法。可能很花錢噢。

〔提示及答案〕

1 假定我們從P到Q向上x步，向右y步，向左下z步。證明 $x = z$。$y = z + 1$，$x + y + z = n^2 - 1$，那就導出 $n^2 = 3z + 2$。

2 第一種解法：證明進來路線最多的城市（可能不止一個）就滿足問題的條件。

第二種解法：用歸納法。

3 n個字母的字共有 2^n 個。挑選一個子集，包含p個字，它們彼此的距離 ≥ 3。從這p個字之中每一個你可以改一個數位而做出n個新字。結果所得的 $p(n+1)$ 個字全都不同。

4 幸運號碼是 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, m^2$ 才具有奇數個因數。

5 用歸納法。

6 用歸納法。

7 在你家裝64部電話。

〔解法〕

1 第一種解法(數論的)

假定我們從P走到Q用了 x 步向上，y 步向右以及 z 步向左下，每一格都正好走一次。則

(1) $x = z$

(2) $y = z + 1$

(3) $x + y + z = n^2 - 1$

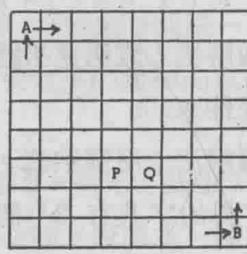


圖1.1

消去(3)中的 x，y 我們得

(4) $n^2 = 3z + 2$

方程式(4)沒有整數解，因爲平方數除以3的餘數不是0就是1：

$$n = 3k \Rightarrow n^2 = 3(3k^2) + 0 = 3z + 0$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3z + 1$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3z + 1$$

因此 $n^2 = 3z + 2$ 不可能發生。

(另解：由題意 $0 \leq z \leq n - 1$，故 $n^2 \leq 3(n-1) + 2 = 3n - 1$，$n^2 - 3n \leq -1$，$n(n-3) \leq -1$，$n = 1, 2$，代入 $1^2 = 3z + 2$，$2^2 = 3z + 2$ 無解)

第二種解法(拓撲的)

看圖1.1。方格A及B各只有一種方式進出。P＝A或Q＝B顯然無解。P＝B不可能。現在我們考慮兩種情況。

第一種情況：

考慮解法的一條路徑從P經A到B。現在每一格只能進出一次，而且不能沿另一條對角線(左上，右下)的方向走。路線AB必

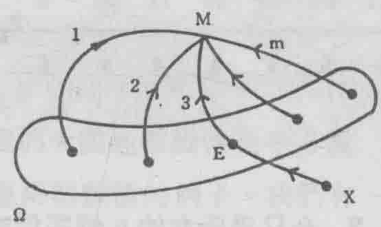
需走ＰＱ之上方及右方。但是走到Ｂ之後，到Ｑ的路被路徑ＡＢ切斷了。

第二種情況：

考慮解法的一條路徑從Ｐ經Ｂ到Ａ。路線ＢＡ必經由ＰＱ之上及其右。但是離開Ａ的方向使得到Ｑ的路徑被ＡＢ切斷了。

2 第一種解法

假定城市以Ａ，Ｂ，…，Ｘ，Ｙ，Ｚ表示，進城的總路線數以m表示，換句話說，共有m(Ａ)條路進Ａ城，m(Ｂ)條路進Ｂ城，…。假定m(Ａ),m(Ｂ)，…等之最大值m出現在Ｍ城。以Ω表示有直路通過Ｍ城的m個城市之集合（見圖）。令∧為Ｍ以及Ω以外的其他城市的集合。若∧為空集，定理是對的。若$X \in \wedge$，則有一$E \in \Omega$連絡$X \to E \to M$。因為如果這樣的Ｅ不存在的時候，則Ｘ可以由Ｍ以及Ω中所有的m個城市直達。也就是說有m＋１條路直通Ｘ，這就和Ｍ的假設矛盾了。因此進路最多的城市都滿足問題中的條件。



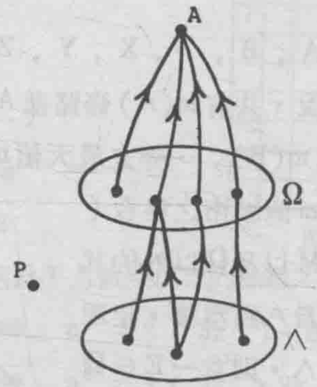
第二種解法（歸納法）

定理對兩個或三個城市顯然成立。假定它對n個城市成立。一個滿足問題中的條件的城市稱之為一個方便城。隨便選n個城，令Ａ為其一方便城。其他的n－１個城可劃分成兩個集合，有直路通Ａ的城市的集合Ω，沒有直路通Ａ的城市的集合∧。∧中的城市可經由Ω中某一城市而到達Ａ。現在我們在這n個城之外我們再加入

另一城P。（見圖）有兩種情況要考慮：

(1)有一條直路從P通A或通到Ω中的一個城。則A是n＋1個城的方便城。

(2)由A以及由Ω中的每一個城都有直路通P。也有直路從∧中每一城通到Ω中某一城。因此P爲一方便城。



3 令Ω爲所有的n個字母的字的集合，共有 2^n 個字。我們選一子集 $W=\{w_1, \cdots, w_P\}$ 包含P個字，字間的距離≧3。對每一個 $w_i \in W$，我們指定一個集合 K_i 包含 W_i 以及所有與 W_i 的距離爲1的n個字。因此 $\# K_i = n+1$（#是基數的符號，即集合中元素的個數）。對 $i \neq j$，W_i 與 W_j 至少距離3，因此 K_i 的元素與 K_j 的元素距離至少爲1。所以 $K_i \cap K_j = \phi$。所有的 K_i 合併起來包含 $P(n+1)$ 個字。這至多是 2^n。因此

$$P(n+1) \leq 2^n$$

$$P \leq \frac{2^n}{n+1}$$

等號只有在 n ＋ 1 爲 2 的乘冪時成立，譬如 n ＝ 7 時 P ≤16。下面的的16個字它們彼此的距離至少是 3 ：

0000000	0101011	1111111	1010100
0000111	0101100	1111000	1010011
0011001	0110010	1100110	1001101
0011110	0110101	1100001	1001010

4 第 n 號牢的門每遇 n 的一個因數就開關一次。最後如果總共開關了奇數次門就是開的；也就是說，若 n 有奇數個因數則門開。那些數有奇數個因數？由實驗我們得表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n的因數個數	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

因此 1 , 4 , 9 , 16 …有奇數個因數。我們大膽地推論恰是平方數才有奇數個因數。爲什麼呢？讓我們考慮兩個數值的例子。我們有系統地列出 48 及 36 的所有因數：

$$48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$$

現在眞相大白了。若 n 不是平方數，則對每一個因數 a 有一個伴隨的不同的因數 n/a 。因數成對出現，共有偶數個。另一方面，若n爲平方數，$n = b^2$ ，則對每一個因數 a （ $a \neq b$ ），有另一不同的因數 $\frac{n}{a}$。但對 b 而言，它的伴隨因數 $\frac{n}{b} = \frac{b^2}{b} = b$ 還是 b ，所以平方數有奇數個因數。

5 第一種解法（歸納法）

$n=1$時定理是明顯的。假定我們已經證明了定理對n成立。現在有$n+1$輛車。則有一輛車A可以開到下一輛車B（如果每一輛車都開不到下一輛車，那麼總共的汽油就不夠跑一圈了。）我們把B的汽油加到A，拿走B。現在我們有n輛車，它們合起來有足夠的汽油可跑一圈。由歸納法其中有一輛車可以完成一圈。這同一輛車也可以借助跑道上原來的$n+1$輛車而跑完一圈。從A到B的路上它有足夠的油（從A取得），而在其他路段上它擁有的汽油和n輛車時一樣多。

第二種解法

我們先證明一個輔助結果。假定n個實數$a_1, a_2, \cdots, a_n$其和爲0，散佈在一個圓圈上。則至少有一個數，從它開始沿時針方向相加所得的所有部分和都是非負的。不錯，考慮和

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1\\
s_2 &= a_1+a_2\\
s_3 &= a_1+a_2+a_3\\
&\vdots\\
s_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n=0\\
s_{n+1} &= a_1+a_2+\cdots+a_n+a_1=a_1\\
s_{n+2} &= a_1+a_2+\cdots+a_n+a_1+a_2=a_1+a_2\\
&\vdots\\
s_{2n} &= a_1+\cdots+a_n+a_1+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=0
\end{aligned}
$$

令　$s_i = \min\ \{ s_1, s_2, \cdots, s_n \}$.　則

$$s_{i+1} - s_i = a_{i+1} \geq 0$$

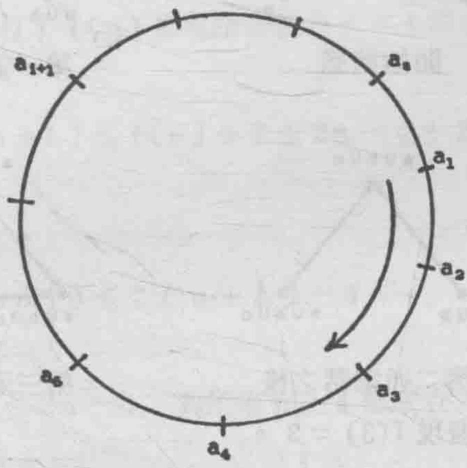
$$s_{i+3} - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} \geq 0$$

$$s_{i+3} - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$s_{i+n} - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \cdots + a_n + a_i + \cdots$$

$$+ a_{i-1} + a_i \geq 0$$



現在我們可以解我們的問題了。令

a_j =（第 j 輛車用自已的油所能走的距離）

－（順時針方向到下一輛車的距離）。

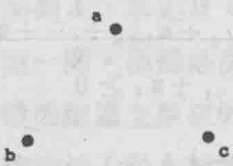
則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$，而我們可以應用我們的輔助結果，那就立即證明了原先的定理。

6 (a) $n = 1$　只有一位女士，她知道所有的新聞，所以不需要打電話：$f(1) = 0$　。

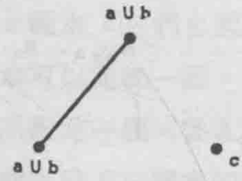
$n = 2$　有兩位女士。只要打一個電話就可以交換所有的新聞：

f(2) = 1 。

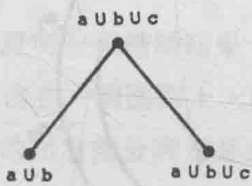
n = 3　令 a , b , c 爲三位女士所知道的新聞。可以如下方式完全地交換新聞：



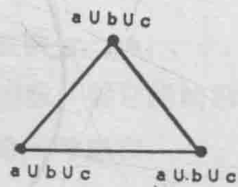
開始狀態



第一通電話之後



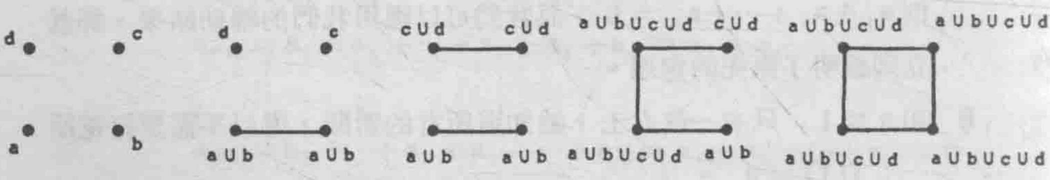
第二通電話之後



第三通電話之後

所以我們發現 f(3) = 3 。

n = 4　令 a , b , c , d 爲四位女士所知道的新聞。可以如下方式散佈新聞：



這就顯示了 $f(4)=4$。

(b)第一種解法（用數學歸納法）

首先我們檢驗 $n=4$ 時不等式 $f(n)\leq 2n-4$ 是否成立。因為 $4\leq 2\cdot 4-4=4$，故成立。

現在讓我們假設

$f(n)\leq 2n-4$　　部份 n 成立。

選出 L 女士打電話給其他的女士，把她所知道的都告知她們。在 n 個女士打了 $f(n)$ 次電話後就有 $n+1$ 個女士知道這些事。

因此

$$f(n+1)\leq f(n)+2\leq 2n-4+2=2(n+1)-4$$

即是

$$f(n+1)\leq 2(n+1)-4$$

因此

$f(n)\leq 2n-4$　對所有 $n\geq 4$ 都成立。

第二種解法

在全部 n 位女士之中我們選出四位甲、乙、丙、丁奉為長舌婦之尊。長舌甲打電話給其他每一位女士（共 $n-4$ 位）。搜集所有的新聞。然後，這四位長舌婦嘰嘰查查一番，費了 $f(4)=4$ 。通電話交換了所有的新聞。最後長舌甲再打電話給 $n-4$ 位女士告訴她們所有的新聞。因此

$$f(n)\leq (n-4)+4+(n-4)$$

即　$f(n)\leq 2n-4$

註：可以證明 $f(n)=2n-4$ 對所有 $n\geq 4$ 成立。

7 假定你的電話號碼是 1 2 3 4 5 6 7。每一碼都可能撥錯成其他9個數字。共有63個錯號和你的號碼只差一碼。所以你應該在家裏裝64部電話，一部是你原來的號碼，其他63個錯號也各安裝一部。那麼，如果有人撥錯了一碼，你的64部電話之中有一部會響鈴。你看這花費有多大呀！在錫奇國總共只能有

$$10000000\div 64=156250$$

個用戶。