现代数学基础

# 26 群表示论

■ 丘维声 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

26

# 群表示论

QUNBIAOSHILUN

■ 丘维声　编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

**内容简介**

本书是作者在北京国际数学研究中心给数学基础强化班授课讲稿的基础上，结合在北京大学数学科学学院多次讲授群表示论课的心得体会编写而成，主要内容包括·有限群在特征不能整除群的阶的域上的线性表示、无限群在复(实)数域上的有限维和无限维线性表示等。

本书紧紧抓住群表示论的主线——研究群的不可约表示，首先提出要研究的问题，探索如何解决问题，把深奥的群表示论知识讲得自然、清晰、易懂。在阐述无限群的线性表示理论时，本书介绍了数学上处理无限问题的典型方法，并且对于需要的拓扑学、实(复)分析以及泛函分析的知识作了详尽介绍。本书在绝大多数章节中都配有习题，并且在书末附有习题解答。

本书可作为高等院校数学系和物理系的研究生以及高年级本科生的群表示论课的教学用书，也可供数学系和物理系教师、科研工作者以及学过高等代数和抽象代数的读者使用参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

群表示论 / 丘维声编著 —北京：高等教育出版社，2011 12

ISBN 978-7-04-032711-3

I ①群… II ①丘… III ①群表示-研究 IV ①O152 6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第221487号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 李华英　封面设计 赵 阳　版式设计 杜微言
责任校对 胡美萍　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 涿州市星河印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 27 5
字　　数 590千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http //www hep edu cn
http //www hep com cn
网上订购 http //www landraco com
http //www landraco com cn
版　　次 2011年12月第1版
印　　次 2011年12月第1次印刷
定　　价 69 00元


物 料 号 32711-00

# 序言

2009 年秋季新学期, 北京国际数学研究中心聘请我给第一期研究生数学基础强化班讲授 “群表示论” 课程。我在自己著的《有限群和紧群的表示论》的基础上, 安排了新的讲授体系, 加强了无限群的无限维线性表示的内容。现在把这学期的讲稿, 结合自己在北京大学数学科学学院多次讲授群表示论课的经验体会, 整理成本书。

本书主要有以下几方面特色。

1. 按照数学的思维方式讲授群表示论, 每一章每一节都提出要研究的问题, 引导学生探索如何解决这些问题, 讲清解决问题的关键想法, 把深奥的群表示论知识讲得自然、清楚、易懂。

数学的思维方式是由 “观察 — 抽象 — 探索 — 猜测 — 论证” 五个环节组成的全过程。观察客观现象 (包括生活和社会中的现象以及已经学过的数学知识), 提出要研究的问题, 抓住主要特征, 抽象出概念或建立数学模型; 运用解剖麻雀、直觉、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索, 猜测可能有的规律; 然后采用公理化的方法进行逻辑推理来严密论证, 揭示出事物的内在规律, 从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。

如何描述客观世界中普遍存在的对称性? 例如, 正方形的对称性可以用保持这个正方形 (作为点集) 不变的变换组成的集合 $G$ 来刻画。$G$ 有一种代数运算: 变换的合成, 称为 $G$ 的乘法。由此抽象出群的概念。如何研究群的结构? 一种途径是利用它的各种子群, 抽象地研究群的结构。另一种途径是通过研究群之间的保持运算的映射 (称为同态映射) 来研究群的结构。群 $G$ 的结构可能比较复杂, 但是它在同态映射下的像 (本质上是 $G$ 的商群) 有可能比较简单。只要我们研究清楚了群 $G$ 在适当多的同态映射下的像, 就有可能了解群 $G$ 的结构, 这好比只要画出了空间曲线 $\Gamma$ 在两个坐标平面上的正投影 (它们是平面曲线), 就能画出这条空间曲线一样。我们比较熟悉的具体的群有: 域 $K$ 上的线性空间 $V$ 的所有可逆线性变换组成的群 $\mathrm{GL}(V)$。群 $G$ 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个同态映射 $\varphi$ 称为 $G$ 在域 $K$ 上的一个线性表示。群表示论就是研究群 $G$ 在域 $K$ 上的各个线性表示, 从中获取群 $G$ 的结构的丰富信息, 并且解

决与群有关的许多问题。

2. 抓住了群表示论的主线是研究群的不可约表示, 在内容表述上条理清晰、一环扣一环、引人入胜。

群表示论是现代数学中非常深刻的理论之一。无论是在 2009 年下半年给北京国际数学研究中心举办的研究生数学基础强化班讲授群表示论, 还是从 1990 年以来在北京大学数学科学学院多次讲授群表示论, 我都提炼出并且紧紧抓住群表示论的主线: 研究群的不可约表示, 并由这条主线展开, 循序渐进地讲授。

如何研究群的线性表示的结构呢? 类比研究整数环的结构时, 素数起着基本建筑块的作用, 在研究域 $K$ 上的一元多项式环的结构时, 不可约多项式 (它的因式只有零次多项式和它的相伴元) 起着基本建筑块的作用。研究群 $G$ 在域 $K$ 上的线性表示的结构时, $V$ 的 $G$ 不变子空间只有 $\{0\}$ 和 $V$ 的线性表示有可能起着基本建筑块的作用, 这种表示称为不可约表示, 否则称为可约表示。如果对于 $V$ 的每一个 $G$ 不变子空间都有它在 $V$ 中的 $G$ 不变补空间, 那么这种表示称为完全可约的。群 $G$ 的有限维完全可约表示一定可以分解成有限多个不可约子表示的直和。根据 Maschke 定理, 有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的任一线性表示都是完全可约的。从而有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的有限维表示都可以分解成有限多个不可约子表示的直和。于是有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的有限维线性表示的结构就完全清楚了, 在这里, 不可约表示的确起着基本建筑块的作用。由此看出, 群表示论的主线是: 研究群的不可约表示。

Abel 群的有限维不可约复表示都是 1 次的。若有限 Abel 群 $G$ 的指数为 $m$ (即 $G$ 的所有元素的阶的最小公倍数为 $m$), 则 $G$ 在含有本原 $m$ 次单位根的域 $K$ 上的有限维不可约表示都是 1 次的。有限 Abel 群 $G$ 的所有 1 次复表示组成的集合 $\hat{G}$ 对于函数的乘法成为一个群, 并且 $\hat{G}$ 与 $G$ 同构; 从而 $G$ 恰有 $|G|$ 个 1 次复表示, 它们可以构造出来。于是有限 Abel 群 $G$ 的所有有限维的不可约复表示被完全决定了。

有限非 Abel 群的不可约表示如何决定? 为了研究有限群 $G$ 在域 $K$ 上的所有不可约表示储藏在哪里, 应当寻找含有群 $G$ 的信息最多的表示空间, 这个表示空间自然是 $G$ 的正则表示 $\rho$ 的表示空间 $K[G]=\left\{\sum\limits_{g\in G}a_g g \middle| a_g\in K\right\}$, 它的一个基是 $G$ 的全部元素, 从而 $\dim K[G]=|G|$。还可以在 $K[G]$ 中规定乘法运算, 于是 $K[G]$ 对于加法和乘法成为一个有单位元的环。又由于 $K[G]$ 是域 $K$ 上的线性空间, 因此 $K[G]$ 是域 $K$ 上的一个代数, 称它为群 $G$ 在域 $K$ 上的群代数。群 $G$ 的线性表示 $\varphi$ 可以 "线性地" 扩充到群代数 $K[G]$ 上, 成为 $K[G]$ 的一个线性表示 $\varphi^*$; 反之, 群代数 $K[G]$ 的线性表示 $\varphi^*$ 限制到 $G$ 上就成为 $G$ 的一个线性表示 $\varphi$。于是研究群 $G$ 的线性表示的问题可以转化为研究群代数 $K[G]$ 的线性表示。而群代数 $K[G]$ 的线性表示 $(\varphi^*,V)$ 的表示空间 $V$ 是群代数 $K[G]$ 上的一个左模; 反之, 群代数 $K[G]$ 上的任一左模 $V$ 提供了 $K[G]$ 的一个线性表示 $(\varphi^*,V)$, 其中 $\varphi^*(a)v:=a\circ v,\forall v\in V$。于是研究群代数 $K[G]$ 的线性表示可以通过研究群代数 $K[G]$ 上的左模来进行。这样做可以充分利用群代数 $K[G]$ 的结构性质 (它既是环, 又是域 $K$ 上的线性空间), 以及

代数上的模的结构性质, 从而为研究群的线性表示提供了强有力的工具。有限群 $G$ 的正则表示 $\rho$ 的表示空间 $K[G]$ 是群代数 $K[G]$ 上的左正则模 (即群代数 $K[G]$ 的任一元素 $a$ 在线性空间 $K[G]$ 的任一向量 $\nu$ 上的作用 $a \circ \nu$ 就是在代数 $K[G]$ 里做乘法 $a\nu$); 反之, 群代数 $K[G]$ 上的左正则模 $K[G]$ 提供的群 $G$ 的表示就是 $G$ 的正则表示。因此研究左正则 $K[G]$-模就可以搞清楚有限群 $G$ 的正则表示。群 $G$ 在域 $K$ 上的线性表示 $(\varphi, V)$ 的子表示 $(\varphi_U, U)$ 的表示空间 $U$ 是左 $K[G]$-模 $V$ 的一个子模, 于是为了研究群 $G$ 的 $K$-表示 $(\varphi, V)$ 能否分解成它的子表示的直和, 只要去研究左 $K[G]$-模 $V$ 能否分解成它的子模的直和。群 $G$ 的不可约表示的表示空间是群代数 $K[G]$ 上的不可约左模。群 $G$ 的 $K$-表示 $(\varphi, V)$ 与 $(\psi, W)$ 等价当且仅当左 $K[G]$-模 $V$ 与 $W$ 同构。因此为了寻找有限群 $G$ 的所有不等价的不可约 $K$-表示, 只要去找所有不同构的不可约左 $K[G]$-模。这就开辟了一条研究有限非 Abel 群的不可约 $K$-表示的途径。

根据 Maschke 定理, 当域 $K$ 的特征不能整除有限群 $G$ 的阶时, $G$ 的每一个 $K$-表示是完全可约的, 从而每一个左 $K[G]$-模是完全可约的。于是我们来研究具有这种性质的代数 $A$ 的结构, 以及 $A$ 上的所有不同构的不可约左模储藏在哪里。域 $K$ 上有限维代数 $A$, 如果每一个左 $A$-模是完全可约的, 那么称 $A$ 是半单的。于是有限维半单代数 $A$ 上的左正则模 $A$ 可以分解成有限多个不可约子模的直和, 利用 "环 $A$ 分解成不可分解的非零左理想的直和等价于 $A$ 的单位元分解成两两正交的本原幂等元之和" 这个结论, 可得到: $A$ 的单位元 1 可以分解成 $A$ 的一组两两正交的本原幂等元之和, 并且每一个不可约左 $A$-模同构于 $A$ 到不可约子模的直和分解式中的某一个, 从而每一个不可约左 $A$-模都是有限维的。于是当域 $K$ 的特征不能整除有限群 $G$ 的阶时, $G$ 的每一个不可约 $K$-表示都等价于 $G$ 的正则表示 $\rho$ 到不可约子表示的直和分解式中的某一个, 并且有限群 $G$ 的每一个不可约表示都是有限维的。这样就从理论上决定了有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的所有不可约表示 —— 它们都储藏在 $G$ 的正则表示 $\rho$ 到不可约子表示的直和分解式中 (在等价的意义上), 并且它们都是有限维的。进一步要问: 有限群 $G$ 的不等价的不可约 $K$-表示有多少个? 这就要研究有限维半单代数 $A$ 的不同构的不可约左模有多少个。运用环的语言, 左正则 $A$-模 $A$ 的不可约左模是环 $A$ 的极小左理想。于是要研究当 $A$ 是域 $K$ 上有限维半单代数时, 环 $A$ 的不同构的极小左理想有多少个? 利用 "环 $A$ 分解成不可分解的非零双边理想的直和等价于 $A$ 的单位元分解成两两正交的本原中心幂等元之和" 这个结论, 以及 "环 $A$ 的两个本原中心幂等元或者相等, 或者正交" 这个结论, 可得出: 域 $K$ 上有限维半单代数 $A$ 的所有不同构的不可约左 $A$-模的个数等于 $A$ 的本原中心幂等元的个数。于是有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的不等价的不可约表示的个数等于 $K[G]$ 的本原中心幂等元的个数。后者不超过 $G$ 的共轭类的个数, 并且当 $K$ 是代数闭域时, 它等于 $G$ 的共轭类的个数。下一步要研究有限群 $G$ 的不可约表示的次数满足什么限制条件。这就要去研究有限维半单代数 $A$ 的不可约子模的维数要满足什么条件。解决这个问题的关键是要求出 $A$ 的极小双边理想 $A_i$ 到 $A$ 的极小左理想 (它们也是 $A_i$ 的极小左理想) 的直和分解式中极小左

理想的个数，为此要研究单环到它的极小左理想的直和分解，而这就需要去研究有限维单代数的结构，然后从有限维单代数的同构类里挑出一个代表来研究它到极小左理想的直和分解。容易证明：若 $D$ 是除环，则 $M_n(D)$ 是单环。利用 Sehur 的第一个引理（若 $V$ 是环 $R$ 上的不可约左模，则 $\mathrm{Hom}_R(V,V)$ 是除环）可以证明著名的 Wedderburn 定理：域 $K$ 上有限维单代数 $B$ 同构于除环 $D$ 上的 $n$ 阶矩阵组成的域 $K$ 上的代数 $M_n(D)$，其中 $D=\mathrm{Hom}_B(I,I)$，$I$ 是 $B$ 的一个极小左理想，$I$ 可以成为除环 $D$ 上的右线性空间，$n=\dim_D I$。于是我们只要去研究 $M_n(D)$ 到它的极小左理想的直和分解，得出：单环 $M_n(D)$ 有到它的彼此同构的极小左想的直和分解，其中极小左理想的个数等于矩阵的阶数 $n$。从而域 $K$ 上有限维单代数 $B$ 到它的彼此同构的极小左理想的直和分解式中，极小左理想的个数等于 $\dim_D I$。利用 Schur 的第二个引理（若 $V$ 是代数闭域 $K$ 上的代数 $A$ 上有限维不可约左模，则 $\mathrm{Hom}_A(V,V)$ 是同构于 $K$ 的一个域），最终可得出：设 $A$ 是代数闭域 $K$ 上的有限维半单代数，则 $A$ 上所有不同构的不可约左模的维数的平方和等于 $A$ 的维数。这是一个多么深刻的结论！由此得出：有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域 $K$ 上的所有不等价的不可约表示的次数的平方和等于群 $G$ 的阶 $|G|$。

为了能尽可能确定有限非 Abel 群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域 $K$ 上的所有不等价的不可约表示的次数，需要继续探索 $G$ 的不可约表示的次数的其他限制条件。还要探索有限非 Abel 群 $G$ 的一个 $K$-表示是否不可约，以及 $G$ 的不可约表示是否等价的简单易行的判别方法。群 $G$ 在域 $K$ 上的两个矩阵表示 $\Phi$ 与 $\Psi$ 等价当且仅当它们有相同的次数，并且存在域 $K$ 上的一个可逆矩阵 $S$ 使得 $\Psi(g)=S\Phi(g)S^{-1},\forall g\in G$，从而 $\Psi(g)$ 与 $\Phi(g)$ 相似，$\forall g\in G$。由于我们在研究群 $G$ 在域 $K$ 上的线性表示或矩阵表示时实际上都是在研究表示的等价类，因此我们从 $\Phi(g)(\forall g\in G)$ 里提取的信息应当是在相似关系下的不变量。矩阵的迹是一个相似不变量，而且它很容易计算。由此引出一个重要概念：设 $(\varphi,V)$ 是群 $G$ 在域 $K$ 上的一个有限维线性表示，在 $G$ 上定义一个函数 $\chi_\varphi(g):=\mathrm{tr}(\varphi(g))$，称 $\chi_\varphi$ 是 $\varphi$ 提供的特征标。利用特征标可以揭示群 $G$ 的有限维线性表示的许多性质。群 $G$ 的有限维复表示 $\varphi$ 的次数等于 $\chi_\varphi(1)$，其中 1 是 $G$ 的单位元。如果群 $G$ 的两个有限维 $K$-表示 $\varphi$ 与 $\psi$ 等价，那么 $\chi_\varphi=\chi_\psi$。若 $K$ 是特征为 0 的域，则有限群 $G$ 的两个 $K$-表示 $\varphi$ 与 $\psi$ 等价当且仅当 $\chi_\varphi=\chi_\psi$。利用群代数 $K[G]$ 的本原中心幂等元 $e_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的表达式可得出：有限群 $G$ 的不可约复特征标的正交关系。进而得出：有限群 $G$ 的复表示 $\varphi$ 不可约当且仅当 $(\chi_\varphi,\chi_\varphi)=1$。利用有限群 $G$ 的不可约复特征标的第一正交关系和代数整数的知识可以证明：有限群 $G$ 的任一不可约复表示的次数都能整除 $G$ 的阶。

如何从群 $G$ 的已知的一些不可约表示求出 $G$ 的新的不可约表示？ 利用模的张量积的概念，以及模的张量积与模同态的关系，可以从群 $G$ 的两个 $K$-表示 $(\varphi,V),(\psi,W)$ 构造出一个新的表示 $(\varphi\otimes\psi,V\otimes_K W)$，称为 $\varphi$ 与 $\psi$ 的张量积。可以证明：群 $G$ 的 1 次 $K$-表示 $\varphi$ 与 $G$ 的 $n$ 次不可约 $K$-表示 $\psi$ 的张量积 $\varphi\otimes\psi$ 是 $G$ 的 $n$ 次不可约 $K$-表示。于是可以从群 $G$ 的 1 次非主表示 $\varphi$ 与 $n$ 次不可约表示 $\psi$

通过张量积构造出一个与 $\psi$ 不等价的 $n$ 次不可约表示。设 $\varphi,\psi$ 是群 $G$ 的两个次数大于 1 的不可约 $K$-表示, 它们的张量有可能可约, 把 $\varphi\otimes\psi$ 分解成一些不可约表示的直和, 从中有可能得到与 $\varphi,\psi$ 都不等价的不可约表示。

利用模的张量积的概念, 还可以从有限群 $G_1$ 与 $G_2$ 的所有不等价的不可约复表示得到 $G_1$ 与 $G_2$ 的直积 $G_1\times G_2$ 的所有不等价的不可约复表示。

寻找群 $G$ 的不可约表示的又一方法是利用 $G$ 的子群的不可约表示来获得 $G$ 的不可约表示。设 $(\psi,W)$ 是群 $G$ 的子群 $H$ 的一个 $K$-表示, 首先从左 $K[H]$-模 $W$ 出发, 构造一个左 $K[G]$-模 $K[G]\otimes_{K[H]}W$, 记作 $W^G$, 称 $W^G$ 是 $W$ 的诱导模, 由 $W^G$ 提供的 $G$ 的 $K$-表示称为 $\psi$ 的诱导表示, 记作 $\psi^G$。若 $\psi$ 是有限维表示, 则 $\psi^G$ 也是有限维的, 并且 $\dim_K(W^G)=[G:H](\dim_K W)$。$\psi$ 提供的特征标记作 $\mu$, 则 $\psi^G$ 提供的特征标记作 $\mu^G$, 称为诱导特征标。设 $G$ 是有限群, $\mu$ 是 $G$ 的子群 $H$ 的一个复特征标, $\chi$ 是 $G$ 的一个复特征标, 则 $(\mu^G,\chi)_G=(\mu,\chi|H)_H$。这个公式称为 Frobenius 互反律。利用 Frobenius 互反律可得到 $\mu^G$ 不可约的充分必要条件。运用 $\mu^G$ 不可约的充分必要条件可得到如下结论: 设 $G$ 是有限群, $N\lhd G$, 如果对于 $N$ 的任意非单位元 $y$ 都有 $C_G(y)\subseteq N$, 那么对于 $N$ 的每一个不可约复特征标 $\mu\neq 1_N$, 都有 $\mu^G$ 不可约。

3. 本书一方面完整地阐述了有限群在特征不能整除群的阶的域上的线性表示理论, 另一方面清晰地讲解了无限群的线性表示理论, 并且揭示了数学上处理无限问题的典型方法。

研究无限群的线性表示必然会遇到群的无限维线性表示。类似群 $G$ 的有限维完全可约表示一定可以分解成有限多个不可约子表示的直和, 猜测群 $G$ 的无限维完全可约表示能分解成无限多个不可约子表示的直和。于是首先要有无限多个子空间的直和的概念。数学上处理无限问题的一种方法是加进某种 “有限性” 的条件。例如, 对于线性空间 $V$ 的无限多个子空间 $\{V_i|i\in I\}$ 的和, 令元素是有限和, 即考虑 $V$ 的下述子集:

$$\{v_{i_1}+v_{i_2}+\cdots+v_{i_m}|v_{i_j}\in V_{i_j},i_j\in I,j=1,2,\cdots,m;m\in\mathbb{N}^*\},$$

易看出这个子集是 $V$ 的一个子空间, 称它是 $V$ 的一族子空间 $\{V_i|i\in I\}$ 的和, 记作 $\sum\limits_{i\in I}V_i$。如果 $\sum\limits_{i\in I}V_i$ 中每个元素的表示法唯一, 那么称和 $\sum\limits_{i\in I}V_i$ 是直和, 记作 $\bigoplus\limits_{i\in I}V_i$。又如, 对于域 $K$ 上无限多个线性空间 $\{V_i|i\in I\}$ 的外直和, 令元素只有有限多个分量不为 0。当 $I$ 是可数集时, 考虑下述集合:

$$\{(v_1,v_2,v_3,\cdots)|v_i\in V_i,i=1,2,\cdots,\ \text{且只有有限多个}\ v_i\neq 0\},$$

在这个集合中规定加法运算 (对应分量相加) 和纯量乘法运算 (域 $K$ 的元素 $k$ 乘每个分量), 易验证这个集合成为域 $K$ 上的一个线性空间, 称它为 $V_1,V_2,V_3,\cdots$ 的外直和, 记作 $\dot{+}_{i=1}^{\infty}V_i$。当指标集 $I$ 是不可数集时, 从 $I$ 是可数集的情形受到启发, 关键是对每个 $i\in I$ 指定 $V_i$ 中的一个向量 $u_i$, 于是考虑下述集合:

$$\left\{f:I\to\bigcup_{i\in I}V_i\,\middle|\,f(i)\in V_i,i\in I,\ \text{且只有有限多个}\ f(i)\neq 0\right\},$$

在这个集合中规定: $(f+g)(i) := f(i)+g(i); (kf)(i) := kf(i)$。易验证这个集合成为域 $K$ 上的一个线性空间, 称它为域 $K$ 上一族线性空间 $\{V_i|i \in I\}$ 的外直和, 记作 $\dot{+}_{i\in I} V_i$。

为了论证群 $G$ 的无限维完全可约表示能分解成无限多个不可约子表示的直和, 首先需要论证群 $G$ 的无限维完全可约表示 $(\varphi, V)$ 一定有一个不可约子表示 $(\psi, W)$。由于 $W$ 是 $G$ 不变子空间, 且它没有非平凡的 $G$ 不变子空间, 于是从集合的包含关系角度看, $W$ 在所有 $G$ 不变子空间组成的集合中具有 "极小" 的性质。数学中经常遇到无限进行的过程, 要断言具有特定性质的某种对象的存在性。数学上处理这类问题的典型方法是: 在所考虑的集合 $S$ 中建立一个二元关系, 使它具有反身性、传递性和反对称性, 称这种二元关系为 $S$ 的一个偏序, 此时称 $S$ 是一个偏序集合。$S$ 有了偏序后, 某种对象的特定性质就表现为一种极值性质, 从而断言某种对象的存在就转变成断言一个偏序集合的极小元素 (或极大元素) 的存在。论证偏序集合 $S$ 存在一个极大元素的强有力的方法是运用 Zorn 引理: 若一个偏序集 $S$ 的每个链都有上界, 则 $S$ 有一个极大元素。与 Zorn 引理等价的一个命题是选择公理: 设 $S=\{A_i|i\in I\}$ 为一族非空集合 $A_i$ $(i \in I, I$ 为指标集$)$ 组成的非空集, 则存在 $S$ 到 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 的一个映射 $f$, 使得对一切 $i \in I$ 都有 $f(A_i) \in A_i$。$f$ 称为 $S$ 上的一个选择函数。选择公理说的是: 存在某种规则使得可以从每个 $A_i(i \in I)$ 同时地挑出该集合中的一个元素。例如, 对于群 $G$ 的子群 $H$ 的所有陪集组成的集合 (它可能是不可数的无限集), 运用选择公理, 可以同时地从每个陪集中挑出一个元素, 它们组成 $H$ 在 $G$ 中的陪集代表系。当指标集 $I$ 是有限集或可数无限集时, 可以根据自然数的递归定理归纳地构造出一个选择函数, 当指标集 $I$ 是不可数无限集时, 选择公理是不能证明的。与选择公理等价的另一个命题是良序定理: 每个集合都存在一个良序 (即这个集合的每个非空子集都有最小元素), 利用良序定理可以把自然数集的数学归纳法推广到良序集合上, 从而得到超限归纳证明法原理。在良序集合上还有超限归纳构造法原理。它使得我们可以在一个良序集合 $S$ 上建立 $S$ 到某个集合 $W$ 的一个映射 $\varphi$, 且 $\varphi$ 适合所给的关系 (即所谓 "递归定义关系")。选择公理、 Zorn 引理、良序定理、超限归纳证明法和超限归纳构造法都是数学上处理无限集合的问题时所使用的方法。利用 Zorn 引理可以证明: 群 $G$ 在域 $K$ 上的完全可约表示一定有一个不可约子表示。利用 Zorn 引理还可以证明: 群 $G$ 在域 $K$ 上的完全可约表示是一族不可约子表示的直和。

下一步自然要去探索无限群在域 $K$ 上的表示是否都是完全可约的? 在第一章 §3 的 Maschke 定理 (有限群 $G$ 在特征不能整除 $|G|$ 的域 $K$ 上的任一线性表示都是完全可约的) 的证明中, 关键是要构造 $V$ 上的一个线性变换 $\boldsymbol{B}$, 即令 $\boldsymbol{B} = (|G|\cdot 1)^{-1}\sum_{h\in G}\varphi(h)\boldsymbol{P}_{U'}\varphi(h)^{-1}$。对于无限群 $G$, 此式右端的和是无限和, 自然应当用群 $G$ 上的积分来代替。为了能对群 $G$ 上的连续函数建立积分, 只有群的运算是不够的, 还需要给 $G$ 配备其他的结构。从闭区间上的连续函数 $f(x)$ 的定积分的定义

看到, 需要取极限。极限的方法是数学上处理无限过程的强有力的工具。而一元函数的极限概念需要用到开区间的概念。由此受到启发, 为了刻画定义域为集合 $X$ 的函数的极限概念, 就需要在集合 $X$ 中有开集的概念。由此引进了拓扑空间 $(X,T)$ 的概念: 集合 $X$ 上的一个拓扑 $T$ 是由 $X$ 的一些子集构成的集合, 它的成员叫做开集, 它们满足下列要求: (i) $X$ 与 $\varnothing$ 是开集; (ii) 任意多个开集的并集是开集; (iii) 有限多个开集的交集是开集, 集合 $X$ 配备了一个拓扑 $T$ 以后就叫做拓扑空间。拓扑学的基本任务是发现在连续映射和同胚下保持不变的性质。为了能对于群 $G$ 上的连续函数建立积分, 自然应当配备 $G$ 有拓扑空间的结构, 而且应当要求群的结构与拓扑空间的结构相容, 于是要求 $G$ 的乘法运算和求逆运算都是连续映射, 这时称 $G$ 是一个拓扑群。由此可见, 研究无限群的线性表示自然而然是研究拓扑群的线性表示。既然拓扑群要求群的乘法运算是连续映射, 自然要求拓扑群 $G$ 到拓扑群 $\tilde{G}$ 的同态 $f$ 比群同态多一个条件: $f$ 是拓扑空间 $G$ 到 $\tilde{G}$ 的连续映射。于是拓扑群 $G$ 的有限维实表示 (复表示)$(\varphi,V)$ 作为拓扑群 $G$ 到拓扑群 $\mathrm{GL}(V)$ 的同态比群 $G$ 的线性表示多了一个条件: $\varphi$ 是 $G$ 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的连续映射。从而拓扑群 $G$ 的 $n$ 次实 (复) 矩阵表示 $\varPhi$ 比群 $G$ 的 $n$ 次实 (复) 矩阵表示多了一个条件: $\varPhi$ 的矩阵元素 (即 $\varPhi(g)$ 的元素 $a_{ij}(g), 1 \leqslant i,j \leqslant n, g \in G$) 是 $G$ 上的连续函数。设 $V$ 是无限维实 (复) 线性空间, 若 $V$ 上定义了一个拓扑成为一个拓扑空间, 并且 $V$ 的加法运算和数量乘法运算都是连续映射, 那么称 $V$ 是一个拓扑线性空间。设 $G$ 是一个拓扑群, 如果 $(\varphi,V)$ 是群 $G$ 的一个线性表示, 并且 $G\times V$ 到 $V$ 的一个映射: $(g,v)\mapsto \varphi(g)v$ 是连续映射, 那么称 $(\varphi,V)$ 是拓扑群 $G$ 的无限维线性表示。于是对于拓扑群 $G$ 的无限维线性表示 $(\varphi,V)$, 要求对于任意 $g\in G$, 都有 $\varphi(g)$ 是 $V$ 上的连续变换。为了便于研究拓扑群 $G$ 的无限维线性表示, 取 $V$ 为 Hilbert 空间 (即完备的复 (实) 内积空间), 若 $\varphi(g)$ 是 $V$ 上的酉变换 (正交变换), 则 $\varphi(g)$ 是有界线性变换 (因为酉变换和正交变换保持向量的长度不变), 从而 $\varphi(g)$ 是 $V$ 上的连续变换。于是把群 $G$ 的酉表示 (正交表示) $\varphi$ (即对任意 $g\in G$ 有 $\varphi(g)$ 是酉变换 (正交变换)) 称为拓扑群 $G$ 的酉表示 (正交表示)。

在研究拓扑群的线性表示时, 首先研究紧群的线性表示。紧群 $G$ 作为拓扑空间是紧致的, 即 $G$ 的每个开覆盖有一个有限的子覆盖。在这里又体现了数学上处理无限问题的一种方法: 加进 "有限性" 的条件。紧致拓扑空间 $X$ 上的连续实值函数 $f$ 一定在 $X$ 上取到最大值和最小值。紧群 $G$ 上的连续实值函数 $f$ 一定是一致连续的。设 $\varDelta$ 为定义在紧群 $G$ 上的一致有界且一致连续的函数组, 则在 $\varDelta$ 的每一函数序列中总可以取出一致收敛的子序列。利用这些结论可以在紧群 $G$ 上建立不变积分, 即紧群 $G$ 上的每一个实值连续函数 $f$ 都对应于唯一的一个实数, 记作 $\displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x$, 使得映射 $f\mapsto \displaystyle\int_G f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有线性性、正定性、不变性和规范性。在证明这个结论时, 极限的方法起着重要作用, 这里又体现了极限的方法是数学上处理无限过程的强有力的工具。由于定义在 $G$ 上的复值函数 $h$ 可以写成 $h=f+\mathrm{i}g$, 其中 $f$ 与 $g$ 是 $G$ 上的实值函数, 因此定义在紧群 $G$ 上的连续复值函数 $h$ 也有不变积分。由于紧

群 $G$ 上的每一个连续实 (复) 值函数都有不变积分, 因此紧群 $G$ 的每一个有限维实 (复) 线性表示 $(\varphi, V)$, 都存在 $V$ 上的一个 $G$ 不变内积, 即对于这个内积, $\varphi(g)$ 成为正交变换 (酉变换), $\forall g \in G$; 从而 $(\varphi, V)$ 成为 $G$ 的正交 (酉) 表示, 于是 $(\varphi, V)$ 是完全可约的。这样研究紧群 $G$ 的有限维复表示就只需研究紧群 $G$ 的所有有限维不可约复表示。研究紧群的有限维不可约复表示的有力工具是 Schur 引理。利用 Schur 引理可以得出紧群 $G$ 的有限维不可约复表示的酉矩阵元素之间的正交关系, 以及特征标的正交关系。紧群 $G$ 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示的酉矩阵元素组成的集合 $\varDelta$ 是 $G$ 上所有连续复值函数组成的复内积空间 $C(G, \mathbb{C})$ (其内积为 $(f_1, f_2) := \displaystyle\int_G f_1(x)\overline{f_2(x)}\,\mathrm{d}x$) 的正交集, 并且 $\varDelta$ 在 $C(G, \mathbb{C})$ 中是完备的 (即 $\varDelta$ 生成的线性子空间依照由内积所定义的拓扑在 $C(G, \mathbb{C})$ 中稠密)。进一步可以证明: $\varDelta$ 生成的线性子空间在由紧群 $G$ 上的所有模平方可积的复值可测函数组成的 Hilbert 空间 $L^2(G)$ 中稠密, 这就是著名的 Peter-Weyl 定理 (见第六章 §9 的定理 26)。在 Peter-Weyl 定理的证明中起关键作用的是极限的方法, 并且利用了 Hilbert 空间上紧线性变换的性质: 紧线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的属于非零特征值的特征子空间是有限维的。我们还证明了: 紧群的无限维酉表示一定是有限维不可约子表示的直和 (见第六章 §9 的定理 19), 从而紧群的不可约酉表示一定是有限维的。上述证明的关键是利用了 Hilbert 空间 $V$ 上紧自伴随变换 $\boldsymbol{A}$ 的性质: $V$ 可以分解成 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征子空间的直和: $V = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$, 其中 $V_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_n$ 的特征子空间, $n = 0, 1, 2, \cdots$ (根据紧自伴随变换的谱定理, 紧自伴随变换 $\boldsymbol{A}$ 仅有可数个不同的特征值, 它们都是实数, 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值)。Hilbert 空间 $V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 称为紧的, 如果 $V$ 中的闭单位球在 $\boldsymbol{A}$ 下的像的闭包在 $V$ 中是紧致的。在这里加进 "紧致" 的条件, 又体现了数学上处理无限问题的一种方法: 加进 "有限性" 的条件。正是这种方法加上极限的方法把紧群的无限维酉表示的结构揭示得非常透彻。

接着研究局部紧群的复线性表示。局部紧群 $G$ 作为拓扑空间是局部紧致的 (即它的每一个点都有一个邻域是紧致的)。例如, 离散群 (即配备离散拓扑的任意群), $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^n, +), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 都是局部紧群。首先研究局部紧交换群的复线性表示。在第一章 §4 已证明:Abel 群的有限维不可约复表示都是 1 次的, 从而它提供的特征标就是 1 次复表示本身。对于有限 Abel 群 $G$, 它的所有 1 次复表示 (也就是它提供的特征标) 组成的集合 $\tilde{G}$ 对于函数的乘法成为一个群, 称为 $G$ 的复特征标群, 并且 $\tilde{G} \cong G$。若有限 Abel 群 $G$ 的指数为 $m$, 则对于任意 $\chi \in \tilde{G}$ 都有 $\chi(g)$ 是 $m$ 次单位根, 从而 $|\chi(g)| = 1$, 其中 $g \in G$。由此受到启发, 对于无限 Abel 群 $G$, 我们考虑 $G$ 的这样的 1 次复表示提供的特征标 $\chi$, 使得对任意 $g$ 有 $\chi(g)$ 是模为 1 的复数, 这种特征标称为 $G$ 的酉特征标。$G$ 的所有酉特征标组成的集合 $G^*$ 对于函数的乘法成为一个群, 称为 $G$ 的酉特征标群。$G$ 的酉特征标 $\chi$ 就是群 $G$ 到群 $S^1$ (模为 1 的复数组成的集合对于复数乘法所成的群) 的一个同态。拓扑群 $G$ 的酉特征标 $\chi$ 就是拓扑群 $G$ 到拓扑群 $S^1$ (即 1 维球面) 的一个同态。对于无限拓扑交换群 $G$, 它

的酉特征标群 $G^*$ 可能与 $G$ 不同构。例如, 离散交换群 $(\mathbb{Z},+)$ 的酉特征标群与 $S^1$ 同构, 而 $(\mathbb{Z},+)$ 显然与 $S^1$ 不同构 ($\mathbb{Z}$ 是可数集, $S^1$ 是不可数集)。从这个例子猜测: 离散交换群 $G$ 的酉特征标群 $G^*$ 是紧交换群。可以证明这个猜测是对的。$S^1$ 的酉特征标群同构于 $(\mathbb{Z},+)$。由此猜测并且可以证明: 紧交换群的酉特征标群为离散交换群。进一步可证明: 局部紧交换群 $G$ 的酉特征标群 $G^*$ 是局部紧交换群。$G^*$ 的酉特征标群 $(G^*)^*$ 记作 $G^{**}$, 称为 $G$ 的双酉特征标群。从上面的例子看到: $(\mathbb{Z},+)$ 的双酉特征标群同构于 $(\mathbb{Z},+)$ 自身, $S^1$ 的双酉特征标群同构于 $S^1$ 自身。于是猜测: 局部紧交换群 $G$ 的双酉特征标群 $G^{**}$ 同构于 $G$, 从而可以把 $G$ 看成是 $G^*$ 的酉特征标群。证明这个猜测为真, 第一步需要证明局部紧交换解 $G$ 的商群 $G/H$ 的酉特征标群 $(G/H)^*$ 同构于 $H^{\perp}$, 其中 $H^{\perp}=\{\chi\in G^*|\chi(h)=1,\forall h\in H\}$, 还需要证明局部紧交换群 $G$ 的开子群 $H$ 的酉特征标群 $H^*$ 同构于 $G^*/H^{\perp}$, 在证明中需要运用选择公理和超限归纳构造法原理; 第二步, 证明 $S^1$, 无限循环群 $C,(\mathbb{R},+)$ 的双酉特征标群分别同构于它们自身, 进一步证明初等拓扑群 $(S^1)^n\times C^m\times\mathbb{R}^l\times A$ 的双酉特征标群同构于自身, 其中 $A$ 是有限交换群; 第三步, 证明紧交换群或离散交换群 $G$ 的双酉特征标群 $G^{**}$ 同构于 $G$ 自身; 第四步, 证明具有紧致生成者的交换群 $G$ (即 $G$ 中存在单位元的邻域 $V$, 具有紧致闭包 $\overline{V}$, 且 $V$ 生成群 $G$) 总可以分解成紧子群与初等子群的直积; 第五步, 证明局部紧交换群 $G$ 存在具有紧致生成者的开子群 $H$; 第六步, 证明局部紧交换群 $G$ 的双酉特征标群 $G^{**}$ 同构于 $G$ 自身。

在研究局部紧的 Hausdorff 拓扑群的复线性表示时, 首先要在局部紧的 Hausdorff 拓扑群上建立不变积分。在紧群 $G$ 上建立的不变积分使得 $G$ 上的每一个实(复) 值连续函数 $f$ 都有积分 $\int_G f(x)\,\mathrm{d}x$。在局部紧的 Hausdorff 拓扑群 $G$ 上建立不变积分时, 考虑这样的连续函数 $f$, 使得 $\{x\in G|f(x)\neq 0\}$ 的闭包 (记作 $\operatorname{supp}(f)$) 是 $G$ 的紧子集, $G$ 上的所有这种复值连续函数组成的集合 $C_c(G)$ 是复数域上的一个线性空间; Urysohn 引理证明了 $C_c(G)$ 不是零空间。如果 $C_c(G)$ 上的一个线性函数 $\nu$ 满足: 对于非负实值函数 $f$ 有 $\nu(f)\geqslant 0$, 那么称 $\nu$ 是 $G$ 上的一个正测度; 如果 $\nu$ 还满足左不变性, 那么称 $\nu$ 是 $G$ 上的一个左 Haar 测度或 Haar 积分, Haar 证明了: 在一个局部紧的 Hausdorff 拓扑群 $G$ 上存在一个左 Haar 测度 $\nu$, $\nu\neq 0$, 并且除了相差一个正实数因子外, $\nu$ 是唯一的。Riesz 表示定理指出: 设 $X$ 是局部紧的 Hausdorff 空间, $\nu$ 是 $X$ 上的一个正测度, 则存在 $X$ 的子集组成的一个 $\sigma$-代数 $\mathscr{A}$, 它包含 $X$ 的所有 Borel 集, 并且存在 $\mathscr{A}$ 上的唯一一个测度 $\mu$, 使得对于 $f\in C_c(X)$, 有 $\nu(f)=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$; 并且如果 $K$ 是 $X$ 的紧子集, 那么 $\mu(K)=\int_K \mathrm{d}\mu<+\infty$。Riesz 表示定理把局部紧的 Hausdorff 空间 $X$ 上的正测度与测度空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 上的 Lebesgue 积分联系起来, 从而可以用 Lebesgue 积分的理论来研究局部紧的 Hausdorff 拓扑群上的左 Haar 测度。

如何研究局部紧的 Hausdorff 拓扑群的酉表示 (或正交表示)? 在研究有限群和紧群的不可约复表示时, Schur 引理起了重要作用。Schur 引理要求表示空间是有限维的, 在它的证明中需要用到复数域上有限维线性空间上的线性变换有特征值这个

结论。为了把 Schur 引理推广到表示空间是无限维的情形, 就需要研究无限维 Hilbert 空间 $V$ 上有界线性变换的特征值问题, 其中的一类紧线性变换的特征值问题有了明晰的结论。本书中证明了 Hilbert 空间上紧线性变换的性质及其谱定理, 以及紧自伴随变换的谱定理。利用它们把 Schur 引理推广到了拓扑群 $G$ 在无限维 Hilbert 空间 $V$ 上的不可约酉表示上, 证明了紧群的酉表示是有限维不可约子表示的直和 (从而紧群的不可约酉表示都是有限维的), 还证明了紧群的 Peter-Weyl 定理。

4. 本书在阐述无限群的线性表示理论时, 对于需要用到的拓扑学、实分析和复分析, 以及泛函分析的知识作了详尽的介绍, 这使读者阅读无限群的线性表示理论时比较顺畅, 同时也可体会到数学是一个统一的整体。

5. 为了使读者对于群表示论掌握得比较好, 本书在绝大多数章节中都配有习题, 并且在书末附有习题解答。

6. 本书在一些章节后面附有阅读材料, 这有助于读者在学习正文知识的同时, 进一步扩大视野。

本书可作为大学数学系研究生或高年级本科生的群表示论课程的教材, 必学的内容为第一、二、三、四章以及第五章的 §1 至 §3, 第六章的 §1 至 §6。第五章和第六章的其余小节供有兴趣的读者阅读。

本书还可供学过高等代数和抽象代数的读者学习, 并可作为大学数学系教师和科研工作者的参考书。

作者感谢北京国际数学研究中心聘请其给研究生数学基础强化班讲授 “群表示论” 课程。

作者感谢高等教育出版社赵天夫高级策划为本书的出版付出的辛勤劳动。

作者热诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见。

丘维声<br>
2011 年 7 月<br>
于北京大学数学科学学院

# 目录


**引言** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **1**

**第一章　群表示论的基本概念** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **6**

§1 同态映射 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 6

§2 群的线性表示的定义和例 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 13

§3 群的线性表示的结构 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 25

3.1 子表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 26

3.2 表示的直和 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 26

3.3 不可约表示, 可约表示, 完全可约表示 · · · · · · · · · · · · · · · · 28

3.4 群的线性表示的结构 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 29

§4 Abel 群的不可约表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 33

§5 非 Abel 群的不可约表示的一些构造方法 · · · · · · · · · · · · · · · 35

5.1 表示的提升与分解 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 36

5.2 通过群的自同构的挠表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 38

5.3 逆步表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 39

**第二章　有限群的不可约表示** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **41**

§1 群 $G$ 的线性表示与群代数 $K[G]$ 上的左模 · · · · · · · · · · · · · 41

1.1 群 $G$ 的线性表示与群代数 $K[G]$ 的线性表示 · · · · · · · · · · · 43

1.2 环上的模, 代数上的模 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 44

1.3 群 $G$ 的线性表示与群代数 $K[G]$ 上的左模 · · · · · · · · · · · · · 45

§2 有限维半单代数的不可约左模 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 50
2.1 环 $A$ 到左理想的直和分解, 环 $A$ 到双边理想的直和分解 · · · · · 50
2.2 有限维半单代数的不可约左模 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 54
§3 有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数 · · · · · · · · · · · · · · · · 57
§4 有限维单代数的结构, 代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 63
§5 有限群的不等价的不可约表示的个数和次数 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 70

**第三章 群的特征标** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **74**
§1 群的特征标的定义和基本性质 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 74
§2 不可约特征标的正交关系及其应用 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 79
§3 不可约复表示的次数满足的条件 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 92
§4 不可约表示在群论中的应用 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 102

**第四章 群的表示的张量积, 群的直积的表示** · · · · · · · · · · · · · · · · · · **108**
§1 模的张量积 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 108
§2 群的表示的张量积 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 124
§3 群的直积的表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 127
§4 不可约复表示的次数满足的又一条件 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 131

**第五章 诱导表示和诱导特征标** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **133**
§1 诱导表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 133
§2 诱导特征标 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 137
§3 Frobenius 互反律 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 139
§4 诱导特征标不可约的判定 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 141
§5 群的分裂域, $M$-群 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 146
5.1 线性空间的基域的扩张, 群的分裂域 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 146
5.2 $M$-群 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 148
§6 诱导特征标的 Brauer 定理 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 152
§7 有理特征标的 Artin 定理 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 161
§8 Frobenius 群存在真正规子群的证明 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 164

**第六章 无限群的线性表示** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **168**
§1 群的无限维线性表示 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 168
§2 拓扑空间 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 175

§3 拓扑群, 紧群 · · · 186

3.1 拓扑群 · · · 186

3.2 拓扑群的同态、同构 · · · 188

3.3 紧群 · · · 190

§4 拓扑群的线性表示 · · · 194

§5 紧群上的不变积分 · · · 197

§6 紧群的线性表示 · · · 207

6.1 紧群的表示的完全可约性 · · · 207

6.2 正交关系 · · · 209

6.3 不可约表示组的完备性, Peter-Weyl 定理 · · · 213

6.4 SU(2) 和 SO(3) 的不可约复表示 · · · 214

§7 局部紧交换群的酉特征标群 · · · 225

7.1 局部紧群 · · · 225

7.2 交换群的酉特征标群的概念 · · · 227

7.3 给群 $G$ 配备拓扑成为拓扑群的方法 · · · 227

7.4 局部紧交换群的酉特征标群 · · · 230

7.5 局部紧交换群的双酉特征标群 · · · 234

7.6 局部紧交换群的商群与子群的酉特征标群 · · · 235

7.7 初等群的酉特征标群和双酉特征标群 · · · 240

7.8 紧交换群和离散交换群的双酉特征标群 · · · 249

7.9 局部紧交换群的双酉特征标群 · · · 252

§8 局部紧的 Hausdorff 拓扑群上的 Haar 测度 · · · 255

8.1 测度, 可测函数, 积分 · · · 255

8.2 局部紧的 Hausdorff 拓扑群上的 Haar 测度 · · · 282

§9 局部紧的 Hausdorff 拓扑群的酉表示 (或正交表示) · · · 301

9.1 Hilbert 空间的正交分解和连续线性函数 · · · 301

9.2 赋范线性空间和 Banach 空间的有界线性映射 · · · 304

9.3 局部紧的 Hausdorff 拓扑群的酉表示 (或正交表示) · · · 313

9.4 赋范线性空间 $X$ 的双重连续对偶空间 $X^{**}$ · · · 315

9.5 拓扑空间的网 · · · 319

9.6 Hilbert 空间的紧线性映射的性质 · · · 322

9.7 Hilbert 空间上有界线性变换的伴随变换 · · · 325

9.8 Hilbert 空间上紧线性变换的谱和点谱 · · · 328

9.9 Hilbert 空间上紧自伴随变换的谱定理 · · · 335

9.10 Schur 引理, 拓扑群的酉表示, 紧群的酉表示 · · · · · · · · · · · · · 344
9.11 凸函数和 $L^2$-空间 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 350
9.12 局部紧的 Hausdorff 拓扑群 $G$ 上的 $L^2(G)$ · · · · · · · · · · · · · · 357
9.13 Peter-weyl 定理的证明 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 361

**习题解答或提示** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **367**

**参考文献** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **410**

**符号说明** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **412**

**名词索引 (汉英对照)** · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · **417**