普通高等教育卓越工程能力培养规划教材

复变函数与积分变换

第2版

主　编　孙　妍

参　编　刘向丽　解文龙　黄静静

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育卓越工程能力培养规划教材

复变函数与积分变换

第2版

主　编　孙　妍
参　编　刘向丽　解文龙　黄静静

机械工业出版社

本书是根据国家教育部最新制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》，在历年主讲该课程时使用的自编讲义的基础上编写而成的. 本书内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换. 本书系统地介绍了复变函数与积分变换的基本理论、方法及其应用.

本书可供高等工科院校的师生作为教材使用，也可作为工程技术人员的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/孙妍主编. —2版. —北京：机械工业出版社，2016.1

普通高等教育卓越工程能力培养规划教材

ISBN 978-7-111-52635-3

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第001656号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 孟令磊

版式设计：霍永明 责任校对：纪 敬

封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2016年2月第2版第1次印刷

190mm×215mm · 13.5印张 · 299千字

0001—3000册

标准书号：ISBN 978-7-111-52635-3

定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88379833 机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649 机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版 金 书 网：www.golden-book.com

第 2 版前言

本书第 1 版自 2009 年 6 月出版以来，一直作为北京信息科技大学的本科生教材使用，也有不少高校将其作为教材或参考书．在本书的使用过程中，有不少读者向我们提出了宝贵的修改意见，作为编者，我们有责任继续完善这本教材，使之更加严谨周密，符合学习规律，对读者更有帮助．

第 2 版在内容上没有做大的变动，保留了第 1 版深入浅出，通俗易懂，论证严谨的特点，除了纠正一些不妥之处外，我们根据在教学实践当中学生的反馈意见以及编辑同志宝贵的建议，做了如下增补和修改：

（1）在每一章的最后增加了内容小结，对本章的主要内容进行提纲挈领的概括和总结，以期让读者在学习过程中迅速抓住重点，理清脉络．

（2）在重要的定理、定义、图示以及例题的旁边增加了“旁注”．这些旁注有的是对定理、定义的解释，有的是思考题，提醒读者对该定理、定义做进一步的思考．这是我们在第 2 版修订中的一次重要尝试，希望这种编写方式能够更好地帮助读者理解书本内容，也希望对使用这本教材的教师在教学思路上有进一步的启发．

（3）本书的习题提示将作为移动学习平台的一部分．这部分修订的目的是希望读者尤其是高校学生在做课后练习时能够尽可能地根据提示独立完成练习并自行检验，以期达到理想的学习效果．

（4）第 7、8 两章中修改了一些符号，增加、修改了若干定理和例题．

第 2 版中第 1 至 4 章的修订及小结的编写由孙妍完成，第 5、6 章的修订及小结的编写由黄静静完成，第 7、8 章的修订及小结的编写由解文龙完成．中央财经大学的刘向丽老师也参与了第 2 版的编写和修订工作．由于编者能力有限，如有疏漏，欢迎广大读者批评指正．

最后，我们要感谢编者所在单位北京信息科技大学理学院对本书出版的大力支持．

编　者

第 1 版前言

复变函数与积分变换是数学专业的一门重要基础课，也是高等院校工科专业的一门专业基础课，更是自然科学与工程技术中常用的数学工具. 复变函数与积分变换涵盖的知识面广，不仅是数学分析的理论推广，也是微分方程、积分方程、计算数学等数学分支的主要解析方法，而且作为一种强有力的工具，具有非常强的实际应用背景，已经被广泛地应用于自然科学的众多领域，如理论物理、电磁学、空气动力学、流体力学、弹性力学以及自动控制学等领域. 其中，共形映射、留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换等尤其在信号处理、电子电路、电子工程等领域被广泛应用. 因此，复变函数和积分变换的基本理论与方法，对于高等理工科院校学生、工程技术人员是必不可少的数学基础知识，有着重要的学习意义和应用价值.

由于大多数教材比较注重数学理论的推导，对复变函数和积分变换具体的应用比较缺乏，容易导致学生在学习中目的性不明确，造成学生学习时忽视应用，对培养应用型人才不利.

本书编写组各成员多年给工科院校讲授该课程，理论基础扎实，教学经验丰富，对其理论、应用和发展有很好的理解和把握. 我们根据多年的教学实践与体会，参照教育部制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》，编写了这本教材，系统介绍了复变函数与积分变换的基本理论、方法与应用.

本书编写力求突出以下几点 :

（1）内容安排上注重与实变函数的比较和分析. “实、复变函数打通”，通过和数学分析进行类比，从方法上引导学生掌握一套全新的学习方法. 复变函数的许多概念，如函数、极限、连续、导数、积分等在形式上与微积分中几乎相同，但却有本质的深化. 本书既指出其相似之处，更强调其不同之处，注重它们之间的联系与变化.

（2）内容体系编排与高等数学相适应与一致，并注意与高等数学的紧密联系.

（3）内容丰富、论述严谨，文字阐述深入浅出、通俗易懂、言简意赅. 配备大量的典型例题及习题，并于书末附有答案. 通过对大量例题的剖析，帮助理解抽象的概念，掌握方法，熟悉技巧，注重各种方法的具体运用. 对于一些工科不要求的证明过程则略去. 本书适合普通工科院校学生使用.

(4) 贯彻理论联系实际的原则，强化概念，注重应用，加强应用思想的引入. 在解析函数、留数、共形映射及积分变换等章节中对解决实际问题方面作了具体介绍. 如除介绍了留数计算在数学分析中应用之外，也介绍了留数计算在研究运动的稳定性时的应用；不仅介绍了如何求积分变换，也介绍了傅里叶变换在现代信号处理中的应用.

本书的编写顺应了教育部关于高等学校工科专业基础教学改革方向，对促进高校工科专业基础教学的改革、推进课程建设、深化教学内容、培养应用型人才、加强学生综合实践能力和创新能力的培养具有重要的现实意义和较高的实用价值.

本书可供高等工科院校的师生作为教材使用，也可作为从事实际工作的工程技术人员的参考读物.

讲完全书基本内容约需 50 学时，有“ * ”的部分可针对不同专业酌情取舍，书后附有积分变换简表可供读者后续学习时查用.

在本书出版之际，感谢编者单位中央财经大学和北京信息科技大学的大力支持，并对机械工业出版社的编辑同志们表示衷心感谢.

本书第 1、2 章由孙妍编写，第 3、4 章由刘向丽编写，第 5、6 章由黄静静编写，第 7、8 章由解文龙编写. 全书由刘向丽统稿.

由于编者水平有限，书中不妥或谬误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

目 录

第1章 复数与复变函数

在高中数学课程中我们已经学习过复数的基本概念和运算法则，然而这些基本知识对于本书的学习来说是远远不够的. 本章将在重新阐述复数的有关性质和运算的基础上，进一步介绍复变函数的概念及其极限和连续性.

1.1 复数的概念

1.1.1 复数

历史上，人们在求解二次方程 $x^2+1=0$ 时遇到了困难：这个方程在实数域中显然无根. 为此，人们想象有一种新的数能够满足这一方程，并将这种假想中的数称为“虚数”. 18 世纪时，数学家 Euler 首先引入虚数记号 i，使得 $\mathrm{i}^2=-1$，或记为 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 这样，方程 $x^2+1=0$ 就有两个根 i 和 $-\mathrm{i}$. 下面，我们将根据这一虚数单位来定义复数，并给出相关记号.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个任意实数，$x+y\mathrm{i}$ 称为**复数**，记为

$$z=x+y\mathrm{i},$$

形如 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为复数.

其中，x 和 y 分别称为 z 的**实部**和**虚部**. 记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**，当 $y=0$ 时，z 就是实数 x；0 既是纯虚数，又是实数. 对于两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$，$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 而言，当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时，称 z_1 和 z_2 相等.

$x-y\mathrm{i}$ 称为 $z=x+y\mathrm{i}$ 的**共轭复数**，记作 $\bar{z}$. 共轭的概念是相互的，即 $\bar{\bar{z}}=z$.

1.1.2 复数的运算

根据复数的定义，我们知道复数的四则运算可完全遵循实数的类似运算进行. 设 $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$，$z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$，则有：

1. 复数的加（减）法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{1.1}$$

即复数的相加（减）就是它们的实部和虚部分别相加（减）.

由式（1.1）可知，共轭复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 和 $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ 有以下结论成立

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},\ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}. \tag{1.2}$$

我们也容易验证复数的加法满足交换律和结合律，即

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

减法是加法的逆运算，也满足交换律和结合律.

例 1.1 计算$(3 + 2\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) - (-2 + 4\mathrm{i})$.

解： 原式 $= [(3+4) + (2-1)\mathrm{i}] - (-2 + 4\mathrm{i}) = (7 + \mathrm{i}) - (-2 + 4\mathrm{i})$

$= (7 + 2) + (1 - 4)\mathrm{i} = 9 - 3\mathrm{i}$,

或 原式 $= (3 + 4 + 2) + (2 - 1 - 4)\mathrm{i} = 9 - 3\mathrm{i}$.

2. 复数的乘法

规定

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

即复数的乘法可以比照两个二项式相乘的乘法法则进行，只需将 i^2 换为 -1 即可.

由式（1.3）可知，共轭复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 和 $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ 有以下结论成立

$$z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{1.4}$$

证明过程留做练习.

不难验证复数的乘法满足交换律、结合律和分配律，即

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

例 1.2 计算$(3+\mathrm{i})(4-2\mathrm{i})$.

解：$(3+\mathrm{i})(4-2\mathrm{i})=(12+2)+(-6+4)\mathrm{i}=14-2\mathrm{i}$.

3. 复数的除法

设 $z_2\neq0$，规定
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}. \tag{1.5}$$

由共轭复数的性质（1.4）可知，复数的除法有简便记法$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$. 也容易验证$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$，证明过程留做练习.

例 1.3 计算（1）$\frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$；（2）$\frac{4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解：（1）$\frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{(6-2)+(3+4)\mathrm{i}}{4+1}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$；

（2）$\frac{4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(4+\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\frac{-1+4\mathrm{i}}{-1}=1-4\mathrm{i}$.

例 1.4 求下列复数的实部和虚部.

（1）$z_1=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$；（2）$z_2=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$.

解：（1）因为 $z_1=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(4-1)+(2+2)\mathrm{i}}{4+1}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$，

所以 $\mathrm{Re}(z_1)=\frac{3}{5}$，$\mathrm{Im}(z_1)=\frac{4}{5}$.

（2）因为 $z_2=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2=\frac{(1-1)+(1+1)\mathrm{i}}{(1-1)-(1+1)\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=-1$，

所以 $\mathrm{Re}(z_2)=-1$，$\mathrm{Im}(z_2)=0$.

所有复数的集合按照以上运算法则满足域的所有公理，构成**复数域**，并记为 **C**. 我们需要注意的是：实数间有大小的区别，而复数间却不能比较大小. 这是复数域和实数域的一个重要不同.

1.2 复数的几何表示

在平面解析几何中，取定一直角坐标系 Oxy 后，可用一有序实数对（x，y）表示平面中任何一点 P，并称（x，y）为 P 点的坐标，

复数的几何表示，其中 x 轴是实轴，y 轴是虚轴.

x 为横坐标，y 为纵坐标. 而当我们考察一复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 时，可以看出它与坐标平面上的点 $P(x,y)$ 在表示上是一致的：都可由一有序实数对表示. 因此，在复数的全体和平面上点的全体之间形成了一一对应，这时，我们称坐标平面为**复数平面**，简称**复平面**或**Z 平面**. 因为横坐标轴上的点的复坐标是实数，所以 x 轴也称为**实轴**；而纵坐标上的点的复坐标是纯虚数，所以 y 轴也称为**虚轴**. 这是复数的一种**几何表示**（见图 1.1）.

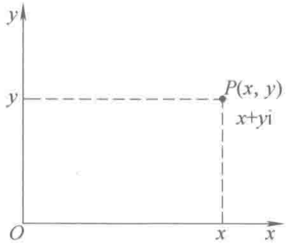


图 1.1

复数还可以用平面向量表示，如图 1.2 所示.

任一复数 $z=x+y\mathrm{i}(z\neq 0)$，可以看做以 x 为水平分量，以 y 为垂直分量的平面向量 $\overrightarrow{OP}$；同样，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的实部 x 和虚部 y 也可看做平面向量 $\overrightarrow{OP}$ 在两坐标轴上的投影.

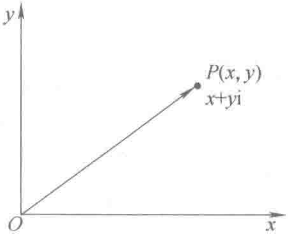


图 1.2

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的**模**或**绝对值**，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{1.6}$$

显然有

$$|z|\leqslant|x|+|y|,\ z\bar{z}=|z|^2.$$

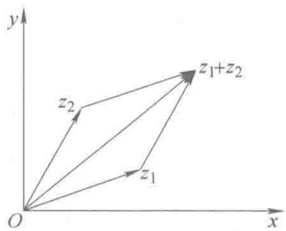
复数的加减法与向量的加减法是完全一致的，也可以用平行四边形法则求出. 从图 1.3a 中，我们不难得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

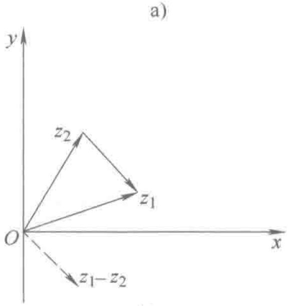
从图 1.3b 中，不难得到

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

θ 是复数 z 的辐角，记作 Arg$z$.



a)



b)

图 1.3

当 $z\neq 0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向角（即 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正方向的夹角）θ 称为复数 z 的**辐角**，记作 Arg$z$，如图 1.4 所示. 显然，$\tan(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$.

Arg$z$ 可取无穷多个值，彼此相差 $2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$. 如 θ_1 是辐角中的一个，则有 $\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$. 这时，任一复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可以表示为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \tag{1.7}$$

复数的这种表示法称为**极坐标表示**. 若有两个复数 z_1 和 z_2，且 z_1、$z_2\neq 0$，则 $z_1=z_2$ 的充分必要条件是 $|z_1|=|z_2|,\mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}z_2$.

在辐角的无穷多个值中，我们通常取绝对值最小的辐角作为**辐角的主值**，也称为**主辐角**. 记作

$$\theta_0=\arg z,$$

故 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，并且有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

由复数的极坐标表示我们也可以看到 z 和 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的. 当 $\arg z\neq\pi$ 时，$\arg\bar{z}=-\arg z$，$|z|=|\bar{z}|$.

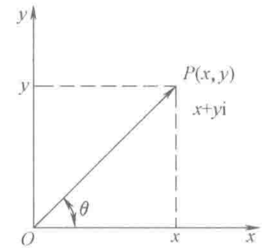


图 1.4

当复数位于不同象限或坐标轴上时，我们可以求出主辐角的不同表达式

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases} \tag{1.8}$$

复数 0 可以看做零向量，$|\mathbf{0}|=0$，其辐角不确定. 以后凡涉及复数的辐角都是就非零复数而言的.

例 1.5 求下列复数的模和辐角.

（1）$z=\dfrac{-3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；（2）$z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$.

解：（1）$z=\dfrac{-3-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-3-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 z 位于第二象限，所以

$$\operatorname{Arg} z=\pi+\arctan(-1)+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

（2）$z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}=\dfrac{11-2\mathrm{i}}{25}+\dfrac{5+10\mathrm{i}}{25}=\dfrac{16}{25}+\dfrac{8}{25}\mathrm{i}$,

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{25}.$$

由于 z 位于第一象限，所以

$$\operatorname{Arg} z=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi, \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

一个复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的实部 x、虚部 y 与模 r、辐角 θ 之间有以下关系式成立

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由以上关系式，$z=x+y\mathrm{i}$ 可表示为

$$\begin{aligned} z &= x+y\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \\ &= |z|[\cos(\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg}z)]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

结合图 1.4，对理解复数的三角表示会有帮助.

复数的这种表示法称为**三角表示**. 利用复数的三角表示可以讨论复数的积、商、幂和方根的运算法则：

（1）复数的乘积与商

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则有

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)], \end{aligned} \tag{1.10}$$

由此得

$$\begin{cases} |z_1z_2|=|z_1||z_2|, \\ \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2, \end{cases} \tag{1.11}$$

即两复数乘积的模等于模的乘积，乘积的辐角等于辐角的和（可相差 2π 的整数倍）. 其几何意义是，复数 z_1z_2 对应的向量是由复数 z_1 对应的向量先旋转角度 $\operatorname{Arg}z_2$，再伸缩 $|z_2|$ 倍得到的.

同理，在求两复数的商时，设 $z_2\neq 0$，考虑 $z_1=\frac{z_1}{z_2}z_2$，由式(1.11) 得

$$\begin{cases} |z_1|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|, \\ \operatorname{Arg}z_1=\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)+\operatorname{Arg}z_2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \end{cases} \tag{1.12}$$

因此可知，两复数商的模等于模的商，商的辐角等于辐角的差（可相差 2π 的整数倍）.

（2）复数的幂与方根.

n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记为 z^n. 若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，根据复数的乘法法则（1.10）可得

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.13}$$

特别地，当 $r=1$ 时，得到棣莫佛（De Moiver）公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.14}$$

而复数的开方作为求幂的逆运算，如果有 $z=w^n$，则称 w 为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

设 $$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\ w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

则 $$\rho^n=r,\ \cos n\varphi=\cos\theta,\ \sin n\varphi=\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad n\varphi=2k\pi+\theta,\ \rho=\sqrt[n]{r}\Rightarrow\quad \varphi=\frac{2k\pi+\theta}{n},\ \rho=\sqrt[n]{r},$$

即

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\ (k=0,1,2,\cdots,n-1). \tag{1.15}$$

这里 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个不同的根 w_0，w_1，$\cdots$，w_{n-1}，当 k 取其他整数时将会重复出现这 n 个不同的值. 从几何意义上来说，这 n 个值是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

例 1.6 计算（1）$z=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-3}$；（2）$z=\sqrt[4]{-2}$.

解：（1）$z=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-3}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-3}$

$$=\frac{1}{8}[\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)]=-\frac{1}{8}.$$

（2）$z=\sqrt[4]{-2}=[2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)]^{\frac{1}{4}}$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\quad (k=0,1,2,3),$$

即 $\sqrt[4]{-2}$有四个不同的值，分别为

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$