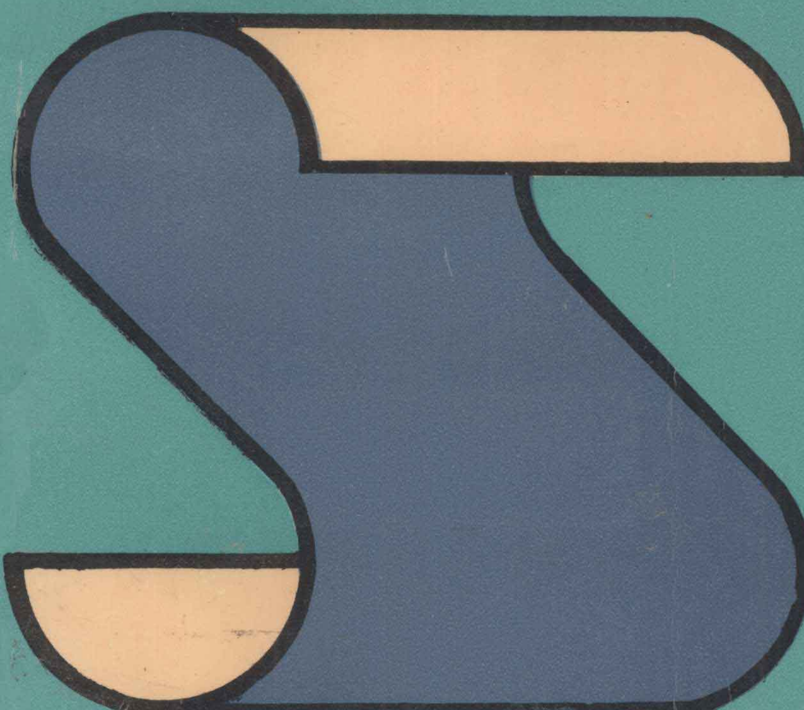
全国高等教育自学考试教材

机械类专业

高 等 数 学

（下册） 陆庆乐 马知恩 编



高等教育出版社

全国高等教育自学考试教材

机械类专业

高 等 数 学

（下 册）

陆庆乐 马知恩 编

高等教育出版社

（京）112号

本书系全国高等教育自学考试指导委员会委托机械类专业委员会组编的自学考试的教材。

本书针对自学考试缺少教师进行系统传授的特点，在内容阐述上特别详细，且注意启发引导，揭示概念的实质。对一些重要的定理或公式，其理论证思路清晰，并辅以几何直观，引人入胜。书中例题较多，注意了解题方法的训练，对于习惯上易犯错误的地方，及时指出。每节后配有思考题与运算题，每章有综合性练习题，并提供一份自我检查题，以测试自学的效果。

本书每章后有小结，起学习指导作用，指出了概念之间联系与区别，使逐个概念有一条“线”串在一起。

本书分上下两册出版，上册分成三篇六章，内容是函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用。上册的基本要求接近本科。本书除供自学考试使用外，函授大学、职工大学，以及高等学校专科班的学生也可使用。

责任编辑　丁鹤龄

全国高等教育自学考试教材
机械类专业
高等数学
（下册）
陆庆乐　马知恩　编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京科技发行所发行
山东省济南新华印刷厂印装
*
开本850×1168　1/32　印张8　字数200 000
1990年12月第1版　1995年3月第7次印刷
印数　87 238-107 245
ISBN7-04-002657-0/O·1010
定价　6.20元

目　　录

第四篇　多元函数微积分学简介

第五篇 常微分方程与无穷级数

第四篇 多元函数微积分学简介

第七章 空间解析几何

正象平面解析几何对一元函数微积分学的学习是不可缺少的一样，空间解析几何对多元函数微积分学的学习也是必不可少的，这就是我们把这一章放在本篇之首的原因．在这一章中，我们将首先建立空间直角坐标系概念，在此基础上，阐明空间曲面与曲线的一般概念．本章着重讨论空间平面与直线的各种方程以及空间直线与平面之间的相互关系．最后介绍一些空间的特殊曲面．

7—1 空间直角坐标系

平面解析几何是我们已经熟悉的，所谓解析几何就是用解析的、或者说代数的方法来研究几何问题．代数与几何本来是互不相关的，促成它们相互结合的是坐标法．代数运算的基本对象是数，几何图形的基本元素是点．正象我们在平面解析几何学中所见到的那样，通过平面直角坐标系，使平面上的点与一对有序实数之间建立了密切的一一对应关系．在此基础上，引入运动的观点，使平面曲线和方程对应，从而使我们运用代数方法去研究几何问题有了可能．

同样，要运用代数的方法去研究空间的图形——曲线与曲面，就必须首先建立空间内点与数组之间的对应关系．

1. **空间直角坐标系** 在空间作三条相互垂直且相交于O点的数轴Ox，Oy和Oz，它们有相同的长度单位，它们的交点O称为**坐标原点**(图7.1)．Ox称为**横轴**或x**轴**，通常取从后到前的方向作为正向；Oy称为**纵轴**或y**轴**，通常取从左到右的方向作为正

向；Oz称为**竖轴**或z轴，通常取从下到上的方向作为正向。Ox，Oy，Oz统称为**坐标轴**。三个坐标轴两两分别决定了三个互相垂直的平面：xOy，yOz，zOx，称为**坐标平面**。这三个平面把空间分成了八个部份，称为八个**卦限**。各卦限逐一编号以资区别：我们把在xOy坐标平面之上、yOz坐标平面之前、zOx坐标平面之右的卦限称为**第一卦限**；在xOy坐标平面之上的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二、第三、第四卦限；在xOy坐标平面的下方，在第一卦限下面的卦限称为第五卦限，其余在第二、三、四卦限下面的分别称为第六、七、八卦限。

2. 空间点与数组的一一对应 设P为空间的任一点（图7.2），过P点作三个平面分别与x轴，y轴，z轴垂直，它们与三个坐标轴的交点分别是Q，R，S，与其相对应的实数分别为x，y，z。于是，对于空间的每一点P，通过上述方法必有唯一的一组有次序的实数x，y，z与之对应。

反之，任给一组有序实数x，y，z。我们可以先分别在x轴，y轴，z轴上找到对应的点Q，R，S；再过Q，R，S分别作x轴，y轴，z轴的垂直平面，这三个垂直平面必相交于唯一的一点P。

这样，通过直角坐标系，我们在空间的点的集合与有序的实数组x，y，z的集合之间建立了一一对应的关系。实数x，y，z称为P点的**坐标**，记作(x, y, z)。x，y，z分别称为P点的**横坐**

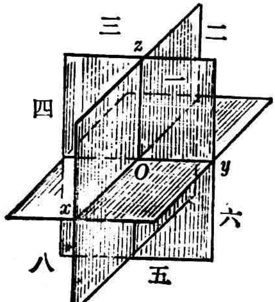


图 7.1

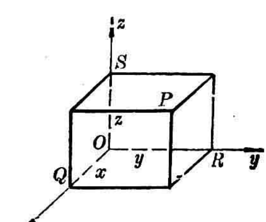


图 7.2

标，**纵坐标**和**竖坐标**，也分别称为P点的**x坐标**，**y坐标**和**z坐标**。

例1　分别写出点(1，2，3)与xOy坐标平面，Oz轴，坐标原点的对称点的坐标。

［**解**］　点(1，2，3)与xOy平面对称点的坐标是(1，2，-3)；与Oz轴对称点的坐标是(-1，-2，3)；与坐标原点对称点的坐标是(-1，-2，-3)。

空间直角坐标系按坐标轴的指向可区分为两种。图7.3所示的空间直角坐标系称为**右手坐标系**，因为如果用右手的姆指指向x轴正向，食指指向y轴正向，那末中指指向就是z轴正向。如果把右手系的x轴和y轴对调，那末所得到的坐标系可用左手来表示指向，称为**左手坐标系**。本书始终采用右手坐标系。

有了空间直角坐标系，我们就可以着手用代数的方法来研究几何问题。最简单而且最基本的问题是确定空间两点之间的距离。

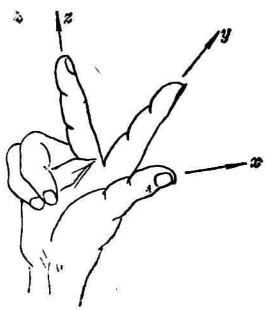


图　7.3

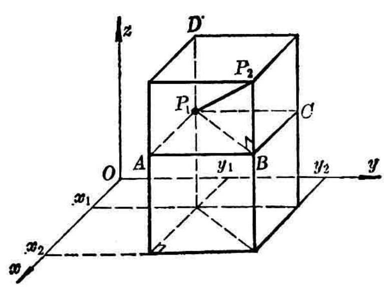


图　7.4

3. **两点间的距离公式**　设有空间两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，欲将这两点间的距离$|P_1P_2|$用它们的坐标表示出来。为此，过P_1点作三个互相垂直的平面分别平行于三个坐标平面。再过P_2点也作这样的三个平面（图7.4）。这六个平面围成一长方体，而$\overline{P_1P_2}$就是它的一组对角线，由图7.4可见，这一长方体的三条边分别等于$|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$.在三角形

$\triangle P_1BP_2$中，$\angle P_1BP_2$为直角，所以

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2.$$

又在$\triangle P_1AB$中，$\angle P_1AB$为直角，所以

$$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2.$$

于是

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

从而

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \qquad (7—1)$$

例2 证明以$A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$为顶点的三角形$\triangle ABC$是一等腰三角形。

［证］ 由(7—1)式得$|AB|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$,

$$|BC|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|CA|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6.$$

由于$|BC|=|CA|=\sqrt{6}$，所以$\triangle ABC$为等腰三角形。

习 题 7—1

1．当P点处于以下位置时，指出它的坐标所具有的特点：

（1） P点在zOx坐标平面上；（2） P点在Ox轴上；

（3） P点在与yOz平面平行且相互距离为2的平面上；

（4） P点在与Oz轴垂直且与原点相距为5的平面上。

2．写出$P(1,-2,-1)$的下列对称点的坐标：

（1） 与三个坐标平面分别对称；

（2） 与三个坐标轴分别对称；

（3） 与坐标原点对称。

3．设一立方体的一个顶点在原点，三条棱分别在三条正半坐标轴上，如果棱长为a，求八个顶点的坐标。

4．证明$P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$三点的联线构成一个正

三角形。

7—2 方向余弦与方向数

解析几何中除两点间的距离外，另一个最基本的问题，就是如何确定有向线段或有向直线的方向。

1. **方向角与方向余弦** 设有空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$。例如以 P_1 为始点，另一点 P_2 为终点的线段称为**有向线段**．记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$。通过坐标原点作一与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 平行且同向的有向线段 $\overrightarrow{OP}$（图7.5）。将 $\overrightarrow{OP}$ 与 Ox，Oy，Oz 三个坐标轴正向的夹角分别记作 α，β，γ。这三个角 α，β，γ 称为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**方向角**，其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，且角的度量均以坐标轴正向为始边，以 $\overrightarrow{OP}$ 的正向为终边。显然，对于由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 确定的方向，方向角 α，β，γ 是唯一确定的．因此，我们也把 α，β，γ 称为与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 平行同向的任一有向直线①的方向角。方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 或相应的有向直线的**方向余弦**。它唯一确定着这一有向线段的方向。

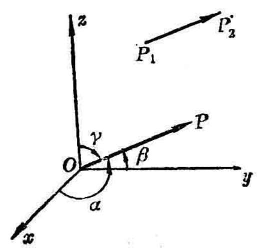


图 7.5

既然有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 由点 P_1 和 P_2 完全确定，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向当然应该可以通过 P_1，P_2 两点的坐标表示出来。为此目的，过 P_1 点作三个互相垂直的平面分别平行于坐标平面（图7.4）容易看出，

$$\angle AP_1P_2=\alpha,\quad \angle CP_1P_2=\beta,\quad \angle DP_1P_2=\gamma,$$

注意到在 $\triangle P_1AP_2$ 中，$\angle P_1AP_2$ 为直角。

所以

---

① 确定了方向的直线称为有向直线．

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{P_1A}{|P_1P_2|}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\\ \cos\beta&=\frac{P_1C}{|P_1P_2|}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{P_1D}{|P_1P_2|}=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\end{aligned}}$$

(7—2)

由(7—2)式立即可得方向余弦之间的一个基本关系式

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1} \qquad (7—3)$$

例1 求由点$P_1(1, 2, 3)$到点$P_2(2, 1, 3+\sqrt{2})$的有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦和方向角。

［解］ $|P_1P_2|=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(3+\sqrt{2}-3)^2}=2$。由(7—2)式知$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2-1}{|P_1P_2|}=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1-2}{|P_1P_2|}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注意到，α，β，γ均在$[0, \pi]$内取值，所以方向角为

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{\pi}{4}.$$

2. **方向数** 方向余弦可以用来确定空间有向直线的方向，但是，如果只需要确定一条空间直线的方位（一条直线的两个方向均确定着同一方位），那末并不一定需要方向余弦，而只要知道与方向余弦成比例的三个数就可以了。这三个与方向余弦成比例且不全为零的数A，B，C称为空间直线的**方向数**。

即
$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}. \qquad (7—4)$$

现在，我们来说明如何由直线的方向数来求此直线的方向余弦。由(7—4)式，设比例常数为k，$(k\neq 0)$则

$$A=k\cos\alpha,\ B=k\cos\beta,\ C=k\cos\gamma,$$

将它们两边平方后相加得

$$A^2+B^2+C^2=k^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma).$$

由公式(7—3)得

$$A^2+B^2+C^2=k^2.$$

所以

$$k=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

从而

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{gathered}} \tag{7—5}$$

(7—5)式中根式取正号和负号分别得到两组方向余弦，它们代表两个相反的方向．由此可见，方向数不能确定直线的方向，只能确定直线的方位．

例2 已知有向直线L的一组方向数为1，$\sqrt{2}$，-1，且L与z轴的夹角为锐角，求L的方向余弦．

［**解**］ 由公式(7—5)可知

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\pm\sqrt{1+2+1}}=\frac{-1}{\pm 2}.$$

由于γ为锐角，$\cos\gamma>0$，从而分母应取负号．于是L的方向余弦为：

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

例3 设以坐标原点为起点的有向线段$\overrightarrow{OP}$的长度为1，P点的坐标为$(x,\ y,\ z)$，求$\overrightarrow{OP}$的方向余弦和方向数．

［解］ 由公式(7—2)知$\overrightarrow{OP}$的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x-0}{|OP|}=x,\quad \cos\beta=\frac{y-0}{|OP|}=y,$$

$$\cos\gamma=\frac{z-0}{|OP|}=z.$$

对于任意常数$k\neq0$，kx，ky，kz就是$\overrightarrow{OP}$的方向数。

由例 3 可见，从原点出发的任一单位有向线段的方向余弦就是其端点的坐标。

此外，由公式(7—2)，

$$x_2-x_1=|P_1P_2|\cos\alpha,\quad y_2-y_1=|P_1P_2|\cos\beta,$$
$$z_2-z_1=|P_1P_2|\cos\gamma.$$

其中$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$是一不为零的常数，所以，空间任意两点坐标之差就是联结此两点直线的一组方向数。

3. **两直线的夹角** 设L_1与L_2是空间的两条任意直线（图7.6），它们可能相交，也可能不相交。通过坐标原点O作平行于L_1的线段$\overline{OP_1}$和平行于L_2的线段$\overline{OP_2}$。则线段$\overline{OP_1}$与$\overline{OP_2}$的夹角称为此**两直线L_1与L_2的夹角**。

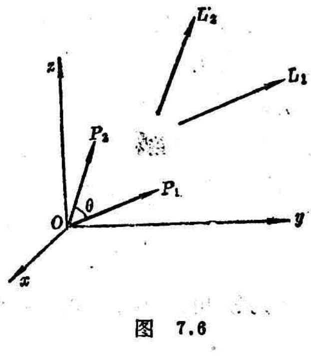


图 7.6

任意选定L_1，L_2的正向，设这两条有向直线的方向余弦为

L_1：$\cos\alpha_1$，$\cos\beta_1$，$\cos\gamma_1$；

L_2：$\cos\alpha_2$，$\cos\beta_2$，$\cos\gamma_2$。

分别作与有向直线L_1，L_2平行且同向的单位有向线段$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$。由例 3 可知P_1点的坐标为$(\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1)$，$P_2$点的坐标为$(\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2)$，将$\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_2}$的夹角记为$\theta$。

在$\triangle P_1OP_2$中，应用三角形的余弦定理知

$$|P_1P_2|^2=|OP_1|^2+|OP_2|^2-2|OP_1|\cdot|OP_2|\cos\theta。\qquad(7—6)$$

由距离公式(7—1)知

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_2-\cos\beta_1)^2\\&\quad+(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)^2\\&=\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2+\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1\\&\quad+\cos^2\gamma_1-2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2\\&\quad+\cos\gamma_1\cos\gamma_2).\end{aligned}$$

应用恒等式(7—3)得

$$|P_1P_2|^2=2-2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

由于$|OP_1|=|OP_2|=1$，代入(7—6)式，化简得

$$\boxed{\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}\qquad(7—7)$$

(7—7)就是两条有向直线（或有向线段）正向之间夹角的计算公式；其中$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

如果已知两直线的方向数：

$$L_1:\ l_1,\ m_1,\ n_1;\ L_2:\ l_2,\ m_2,\ n_2.$$

由公式(7—5)分别求出L_1和L_2的方向余弦后代入(7—7)式便得到L_1与L_2夹角的计算公式

$$\boxed{\cos\theta=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l+{}_2^2m_2^2+n_2^2}}}\qquad(7—8)$$

限制$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，从(7—8)取正、负号分别求得两个角，其中一个是另一个的补角.

4. 两直线平行、垂直的条件 如果直线L_1与直线L_2垂直，那末它们的夹角$\theta=\frac{\pi}{2}$，从而$\cos\theta=0$。由(7—8)式可见，此时必有

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.\qquad(7—9)$$

反之，若(7—9)式成立，由(7—8)式可知L_1必与L_2垂直. 因此，

两直线相互垂直的充分必要条件是(7—9)式成立.

如果L_1平行于L_2，那末按照方向角的定义，L_1与L_2应有相同的方向角，从而有相同的方向余弦. 所以它们的方向数必成比例，即

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \qquad (7—10)$$

反之亦然. 因此，两直线相互平行的充分必要条件是(7—10)式成立.

例4 已知两直线L_1，L_2的方向数分别为$\{2, 3, 5\}$，与$\{1, -1, 4\}$，求与此两直线L_1，L_2均垂直的直线L的方向数。

[**解**] 设所求直线L的方向数为$\{l, m, n\}$

由于L与L_1垂直，由(7—9)式知

$$2l+3m+5n=0. \qquad (7—11)$$

同理，由于L也与L_2垂直，有

$$l-m+4n=0. \qquad (7—12)$$

由方程(7—11)、(7—12)，我们可以确定l，m，n的一组比例数. 解之，得

$$l=-\frac{17}{5}n,\ m=\frac{3}{5}n.$$

取$n=5$，我们便得到直线L的一组方向数$\{-17, 3, 5\}$.

习 题 7—2

1. 下列哪些集合可以作为一条有向直线的方向角？

(1) 45°，60°，60°；　　(2) 30°，45°，60°；

(3) 30°，90°，60°；　　(4) 0°，30°，150°.

2. 已知起自原点的单位有向线段$\overrightarrow{OP}$与z轴的方向角为30°；另外两个方向角相等，求P点的坐标.

3. 证明对于空间任一点P，它的坐标就是直线OP的一组方向数。

4. 证明三点$P_1(5, 3, -2)$，$P_2(4, 1, -1)$，$P_3(2, -3, 1)$共线.

5. 已知空间两点：$P_1(4, 1, -1)$，$P_2(1, 4, 2)$，求与直线OP_1，