国家教师资格考试辅导用书

中学教师职业素养与能力提升教程

数学学科知识与教学能力

（初级中学）

中小学教师资格考试辅导用书编委会 编写

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

国家教师资格考试辅导用书

中学教师职业素养与能力提升教程

Zhongxue Jiaoshi Zhiye Suyang yu Nengli Tisheng Jiaocheng

数学学科知识与教学能力（初级中学）

Shuxue Xueke Zhishi yu Jiaoxue Nengli（Chuji Zhongxue）

中小学教师资格考试辅导用书编委会　编写

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书依据2011年在浙江、湖北试点的《中小学和幼儿园教师资格考试标准(试行)》以及《中小学和幼儿园教师资格考试大纲(试行)·数学学科知识与教学能力(初级中学)》编写。全书共四章，主要内容包括：数学学科知识与课程教学知识、初中数学教学设计、初中数学教学实施、初中数学教学评价。其中在数学学科知识与课程教学知识部分，简要介绍了大学数学基础知识、中学数学课程知识、中学数学教学知识。在初中数学教学设计部分，简要介绍了学习任务与学习者分析，初中数学教学目标的编制和重点、难点的确立，初中数学教学设计案例，数学教案的编写。在初中数学教学实施部分，简要介绍了情境创设与动机激发的方法与策略、指导学生学习数学的方法与策略、数学的教学组织形式与教学策略、数学课堂教学总结的方法、现代教育技术与初中数学课堂教学。在初中数学教学评价部分，简要介绍了初中数学学习评价、初中数学教学评价，以及提升初中数学教师教学能力的有效途径——教学反思。各章均配有样题。书后还附有初级中学数学学科知识与教学能力的考试大纲。

本书适合作为初中数学教师资格考试复习备考用书，也适合关心初中数学教师职业发展的相关教研人员和在校师范生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

中学教师职业素养与能力提升教程:数学学科知识与教学能力.初级中学/中小学教师资格考试辅导用书编委会编写.--北京:高等教育出版社,2013.5
ISBN 978-7-04-037003-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①中… Ⅲ.①中学数学课-教学法-初中-中学教师-资格考试-教材 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第048658号

策划编辑 尹 洪　责任编辑 靳剑辉　封面设计 杨立新　版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军　责任校对 杨凤玲　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京天来印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12	版　　次	2013年5月第1版
字　　数	350千字	印　　次	2013年5月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37003-00

编写说明

2011年我国幼儿园、中小学教师资格考试试行全国统一考试制度(简称“国家教师资格考试”),同年在浙江省和湖北省开展试点工作。由国家统一进行教师资格考试,严把教师入口关,择优选拔乐教、适教人员取得教师资格,这对规范我国基础教育教师资格标准、提高师资专业水平、促进我国教育事业的繁荣具有重要意义。

国家教师资格考试大纲涉及知识点多,范围比较宽泛,为了帮助申请者全面系统地复习,并根据自己的实际情况理清知识的逻辑层次,提高学科知识素养与教学能力,我们组织编写了这套教师资格考试辅导用书。

本书是“初中数学学科知识与教学能力”分册,由四章组成:第一章对应考试大纲的“学科知识、课程知识、教学知识”部分,包括大学数学基础知识、中学数学课程知识与中学数学教学知识。第二章、第三章、第四章对应考试大纲的“教学技能”部分,分别围绕教学设计、教学实施与教学评价三方面梳理有关内容。每章都设有考试目标、考试内容关系图、复习导引、练习与思考等栏目。

我们在编写本套丛书时秉持如下原则:

1. 紧扣考纲　突出重点

国家教师资格考试知识涵盖极为宽广,因此必须对内容进行科学的筛选。我们在选择知识框架时遵守以考纲为准的原则,在吃透大纲的基础上选择相应内容,每个知识点都有其存在的理由。对于考纲中规定的知识点则重点突出,详尽叙述,尽量做到知识点既系统全面又重点鲜明。

2. 实用导向　针对性强

国家教师资格考试由教育部考试中心负责命题,其命题原则是:突出专业导向、能力导向和实践导向,不考死记硬背的知识。因此,本套丛书的编写,在注意各类知识专业性、基础性的同时,重视运用相关知识分析与解决现实教育教学问题,具有很强的针对性与实用性。

3. 体例实用　内容简明

为了帮助申请者明确考试要点、理清知识的逻辑结构,每章由考试目标、考试内容关系图、复习导引、练习与思考等部分组成。考试目标指明学习的方向。考试内容关系图帮助申请者整体把握该章内容。复习导引指出复习的重点。正文是知识点的呈现,内容简洁明了,结构清晰。练习与思考则有助于申请者理解知识点与试题之间的关系,基本上按照试题的形式排列,有助于申请者提高答题技巧。

4. 名师主笔　注重实战

参加本套丛书编写的人员都具有博士学位和副教授以上职称,在各种入学考试和资格证考试辅导方面具有丰富的经验,其中多数人员都参加过各种级别的国家考试命题工作,熟悉各种考试的命题规则。相信这套丛书会帮助申请者达到事半功倍的效果。另外,我们还配有相关的形成性练习手册与模拟试题、网络辅导课程(网址为 http://www.ntce.cc)等,有意者可以选择使用,相信效果会更好。

如果使用效果较好,请告诉您的同学和朋友;如果有什么问题与缺陷,请告诉我们。

中小学教师资格考试辅导用书编委会
2013年3月

目　录

第1章　数学学科知识与课程教学知识

引言

在时代发展和教育改革的背景下，现代数学教师的知识结构通常应包括普通文化知识、数学专业知识、一般教学知识、数学教学知识、教学实践知识等. 本章主要从初中数学教学所必需的大学数学基础知识、中学数学课程知识和中学数学教学知识三方面梳理考试的重点内容.

考试目标

掌握数学分析、高等代数、解析几何、概率论与数理统计等大学专科数学课程中与中学数学密切相关的内容. 准确理解基本概念，熟练进行运算，并能够利用这些知识去解决中学数学的问题.

掌握高中数学课程中的必修内容、选修内容以及初中数学课程中的内容知识. 理解中学数学中的重要概念，掌握中学数学中的重要公式、定理、法则等知识，掌握中学常见的数学思想方法. 具有空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用能力.

了解初中数学课程的性质、基本理念和目标.

熟悉《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《课程标准》)所规定的教学内容的知识体系，掌握《课程标准》对教学内容的要求.

能运用《课程标准》指导自己的数学教学实践.

掌握讲授法、讨论法、自学辅导法、发现法等常见的数学教学方法.

掌握概念教学、命题教学等数学教学知识的基本内容.

了解包括备课、课堂教学、作业批改与考试、数学课外活动、数学教学评价等基本环节的教学过程.

掌握合作学习、探究学习、自主学习等中学数学学习方式.

掌握数学教学评价的基本知识和方法.

考试内容关系图

- 数学学科知识
  - 大学数学基础知识
    - 一元微积分
    - 线性代数初步
    - 空间解析几何
    - 概率与数理统计
  - 中学数学课程知识
    - 数学课程的性质与理念
    - 初中数学课程目标
    - 初中数学课程内容
    - 《课程标准》对教学的建议
  - 中学数学教学知识
    - 常见的中学数学教学方法
    - 数学知识及其教学
    - 中学数学学习方式
    - 数学教师的日常工作

复习导引

高等数学的基本知识是中学数学教师必备的专业基础知识，不仅是教师进行中学数学教学内容的深化，也是进一步研究和学习数学的重要基础.在复习大学数学基本知识内容时，应重点关注其基本概念、基本观点与基本思想，以及它们对中学数学教学的指导作用.《课程标准》是初中数学教材编写、教学评估和考试命题的依据，是国家管理和评价数学课程和教学的依据.它规定了初中数学课程的性质、目标以及内容要求，规定了学生在知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等方面所应达到的基本要求，并提出了课程实施的有关建议.考生复习的重点应在于深刻理解数学课程的性质、课程理念、课程目标以及内容要求，并用来指导自己的教学工作.中学数学的教学是一门科学，也是一门艺术.复习的重点应该在于：深刻理解有关教学方法、学习方式、数学知识的教学要求等理论观点与实践策略，并在此基础上创造性地应用于中学数学的教学过程之中.

第一节　大学数学基础知识

一、一元微积分

（一）极限与连续

1. 数列极限的概念

极限是微积分的一个重要工具.一般的极限过程都是一个无限的过程，用有限多的语言描述一个无限的过程是相当困难的一件事，17世纪有了微积分，它也有了生产生活中的应用，但当时的极限还没有严格的定义.直到18世纪极限才有了下面的严格定义.

定义1　设$\{x_n\}$是一个数列，A是一个实数，若任给正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，都有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$收敛于A，或称A是数列$\{x_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$.

定义2　（1）若$x_n\to 0(n\to\infty)$，则称x_n是无穷小量，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.（2）若$\dfrac{1}{x_n}\to 0(n\to\infty)$，则称$x_n$是无穷大量，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

易见，数列$\{x_n\}$收敛于A时，有且仅有x_n-A是无穷小量.

例如$\dfrac{1}{n}$、$\dfrac{1}{2^n}$、$\dfrac{1}{n!}$、$\dfrac{1}{n^n}$、$\sin\dfrac{1}{n}$、$1-\cos\dfrac{1}{n}$和$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$都是无穷小量.

2. 数列极限的性质

由极限的定义，可以证明极限有下列性质.

定理1（四则运算）　若极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbf{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\in\mathbf{R}$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=AB$.

（2）又若$B\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理2（迫敛性定理）　若$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

下面的例1可以利用极限的四则运算来求解.

例1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{n+1}{n}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1.$

下面的例2，因项数是n，而$n\to\infty$，故化简之前不能利用极限的四则运算.

例 2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$.

下面的例 3 可以用极限的定义来证明,也可以用迫敛性定理来证明.

例 3　证明当 $h>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+h)^n}=0$.

证　由伯努利不等式知,$(1+h)^n>1+nh$,因此 $0<\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{h}\frac{1}{n}$,再由迫敛性定理即知.

下面是著名的单调有界定理,它和区间套定理等价.

定理 3　单调增且有上界的数列必有极限.

利用二项式定理,可以证明 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增且有上界 3,再由单调有界定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在,其极限值记作 e,它是无理数,且 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 04\cdots$.

利用定义通常只能验证极限,而求数列的极限需要很多种方法,如利用极限的四则运算、迫敛性和单调有界定理来求解.

3．函数的极限

定义 3　若函数 f 在 $(x_0-\eta,x_0)\cup(x_0,x_0+\eta)$ 上有定义,这里 η 是某个正数,A 是实数,若任给正数 ε,总存在正数 δ,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

定义 4　若函数 f 在 $(x_0,x_0+\eta)$ 上有定义,这里 η 是某个正数,A 是实数,若任给正数 ε,总存在正数 δ,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f_+(x_0)=A$.

类似地,可以定义左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 记作 $f_-(x_0)$.

易见,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f_+(x_0)$ 和 $f_-(x_0)$ 存在且相等.

与数列极限类似,函数极限也有四则运算和迫敛性.

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 和迫敛性,可证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,令 $t=\frac{1}{x}$,得到另外的形式 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

定义 2 利用数列极限,给出了数列是无穷小量和无穷大量的含义. 利用函数极限也可以给出函数是无穷小量和无穷大量的含义(见本节例 4).

若 φ 是无穷小量,ψ 是无穷大量,则称 $\lim(1+\varphi)^{\psi}$ 是 1^∞ 型极限.

称下列三个 1^∞ 型的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$ 为重要极限.

一般的 1^∞ 型的极限,可以利用公式计算

$$\lim(1+\varphi)^{\psi}=\mathrm{e}^A$$

这里 $A=\lim\ \varphi\psi$.

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$.

解　该极限是 1^∞ 型. 首先 $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x=\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^x$,记 $\varphi(x)=\frac{-1}{x+2}$,$\psi(x)=x$,

则因 $A=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)\psi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{2}{x}}=-1$,故

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{x}=e^{A}=e^{-1}.$$

下面证明另一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，这里 x 的单位是弧度.

证　先设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. 作一个半径为 1 的单位圆（见图 1-1），比较三角形 OPR、扇形 OQR 和三角形 OQS 三者的面积. 显然有 $\dfrac{1}{2}\cos x\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\ \dfrac{\sin x}{\cos x}$，即 $\cos x<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\cos x}=1$，所以由迫敛性定理知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}=1$. 因 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sin x}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

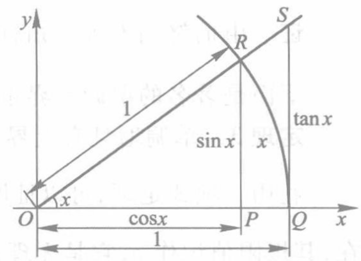

图 1-1

重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型，某些 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，可以利用它来求.

例 6　计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$.

解　令 $t=2x$，则因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=1$，故

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\ \frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{3}.$$

重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ 在导数公式的推导过程中起着特别重要的作用.

4. 连续函数的概念

函数极限有类似于数列极限的许多性质，而且这些性质比数列极限的性质更复杂、更有趣. 下面利用函数极限来给出连续函数的概念.

定义 5　（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 f 在点 x_0 处连续，称点 x_0 是 f 的连续点；

（2）若 x_0 不是 f 的连续点，则称 x_0 为 f 的间断点.

定义 6　设 f 在开区间 (a,b) 内有定义，如果 (a,b) 中的每一点都是 f 的连续点，则称 f 在 (a,b) 上连续，或称 f 是 (a,b) 上的连续函数.

下面定义 f 在 $[a,b]$ 上的连续性，对于其他的定义域，如 $[a,b)$，函数 f 的连续性类似.

定义 7　设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，若 (a,b) 中的每一点都是 f 的连续点，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 f 在 $[a,b]$ 上连续，或称 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，这时称 f 在 a 处右连续、在 b 处左连续.

定理 4　函数 f 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f$ 在 x_0 处右连续且 f 在 x_0 处左连续.

定理 4 不仅可以判别函数是否连续（如下面的例 7），而且可以判别函数是否不连续（如例 8）.

例 7　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解　因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义且 $f(0)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)$，故 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 8　若函数 $f(x)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 3x+5, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$，问 f 在点 2 处是否左连续？是否右连续？是否连续？

解　因 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}6x=12=f(2)$，故 f 在点 2 处是左连续的. 而

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x+5)=11\neq 12=f(2).$$

因此 f 在点 2 处不是右连续，于是 f 在点 2 处不连续.

5. 初等函数的连续性

前面，我们在基本初等函数的基础上讨论了函数的连续性，有限个基本初等函数进行有限次加、减、乘、除或复合运算后用一个式子表达的函数就称为初等函数. 例如 $y=|x|$ 是 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数，因此 $|x|$ 是初等函数.

利用函数极限的性质，可以证明下面的定理 5.

定理 5 初等函数在其有定义的区间内连续.

若 x_0 是 f 的连续点，则要计算 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 只需计算函数值 $f(x_0)$. 因此定理 5 很有用，不仅导数公式的推导要用它，而且计算极限也要用它，如下面的例 9.

例 9 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

6. 连续函数的性质

定理 6 闭区间上的连续函数一定有界（这里函数有界是指值域有界）（证明略）.

在科学技术、国民经济、人文和社会科学中，常会碰到用料最省、容量最大、投资最少、效益最高等问题. 为此需引进函数的最大值或最小值.

定理 7 闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值.

例 10 连续函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的（这里函数无界是指值域无界），没有最大值，也没有最小值.

例 10 表明开区间上的连续函数不一定有最大值和最小值.

定理 8 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

定理 8 不仅可以判定方程实根的存在，而且在理论上也是很有用的.

推论 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，若 μ 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\mu$.

证 令 $\varphi(x)=f(x)-\mu$，则 φ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $\varphi(a)=f(a)-\mu$，$\varphi(b)=f(b)-\mu$. 因 μ 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，而 $\varphi(a)$ 与 $\varphi(b)$ 异号，故由定理 8 知，$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi(\xi)=0$，即
$f(\xi)-\mu=0$，也即 $f(\xi)=\mu$.

例 11 试证方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正根.

证 设 $f(x)=x-\sin x-2$，则因 $f(0)=-2<0$，$f(3)=1-\sin 3>0$，f 连续，故由介值定理知，f 在 $(0,3)$ 内必有一 0 点，即方程 $x=\sin x+2$ 有一正根小于 3.

例 12 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)<a$，$f(b)>b$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则 F 在 $[a,b]$ 上连续，$F(a)=f(a)-a<0$，$F(b)=f(b)-b>0$. 由介值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$. 因此 $f(\xi)=\xi$.

（二）导数与微分

1. 导数的概念

定义 1 设 $x_0\in(\alpha,\beta)$，f 在 (α,β) 上有定义，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，即存在一个实数 A，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$，则称 f 在点 x_0 处可导，称 A 为 f 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

定义 2 设 f 在 (α,β) 上有定义，若 $\forall x\in(\alpha,\beta)$，$f$ 在点 x 处都可导，则称 f 在 (α,β) 可导，称 $f'(x)$ 为

$f(x)$的导函数.

下面的定理1说明函数不连续一定不可导.

定理1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则它在点 x_0 处必连续.

证 事实上,$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$.

引进左导数和右导数有时是很方便的,如分段函数在分点处的导数.

定义3 称$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$为$f(x)$在点 x_0 处的右导数,记作$f'_+(x_0)$. 同理

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$称为$f(x)$在点 x_0 处的左导数.

易见,$f(x)$在 x_0 处可导$\Leftrightarrow f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$都存在且相等.

例1 证明$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处连续,但不可导.

证 (1) 因$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0)$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f(0)$,故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,因此$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

(2) 因$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$,故$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$不存在,即$f'(0)$不存在,也即$f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

例1说明定理1的逆不成立,即函数连续未必可导.

例2 求$f(x)=x|x|+2x$在点 $x=0$ 处的导数.

解 因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(|x|+2)=2$,故$f'(0)=2$.

例3 证明$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^u$.

证 (1) 因$\dfrac{\ln(x+t)-\ln x}{t}=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{t}{x}\right)}{t}=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}}$,故由导数的定义、重要极限$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$、指数函数与对数函数的连续性知

$$(\ln x)'=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+x)-\ln x}{t}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}}=\frac{1}{x}\ln\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}}=\frac{1}{x},$$

即$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(2) 令 $x=\mathrm{e}^t-1$,则 $t=\ln(1+x)$,$\dfrac{\mathrm{e}^{u+t}-\mathrm{e}^u}{t}=\mathrm{e}^u\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}=\dfrac{x\mathrm{e}^u}{\ln(1+x)}=\dfrac{\mathrm{e}^u}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$,

因此$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{e}^u=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{u+t}-\mathrm{e}^u}{t}=\mathrm{e}^u\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^u\dfrac{1}{\ln \mathrm{e}}=\mathrm{e}^u$,即$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^u$.

例4 证明$(\sin x)'=\cos x$.

证 因$\sin(x+t)-\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{t}{2}\right)\sin\dfrac{t}{2}$,故由导数的定义、函数 $\cos x$ 的连续性和重要极限$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$知

$$(\sin x)'=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+t)-\sin x}{t}=\lim_{t\to 0}\cos\left(x+\frac{t}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{2}}=\cos x.$$

例 5　设 n 为正整数,证明 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

证　由导数的定义知

$$(x^n)'=\lim_{t\to 0}\frac{(x+t)^n-x^n}{t}=\lim_{t\to 0}[(x+t)^{n-1}+(x+t)^{n-2}x+(x+t)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}]=nx^{n-1}.$$

2. 导数的四则运算

(1) 和的导数公式

$(f_1+f_2+\cdots+f_n)'=f_1'+f_2'+\cdots+f_n'$(也称导数的有限可加性).

(2) 乘积的导数公式

若 $u(x),v(x)$ 可导,则 $[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$.

证　易见

$$\frac{u(x+t)v(x+t)-u(x)v(x)}{t}=u(x+t)\frac{v(x+t)-v(x)}{t}+v(x)\frac{u(x+t)-u(x)}{t},$$

令 $t\to 0$,则得 $[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$.

特别地,对常数 λ,有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\lambda f(x)]=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$(也称导数有齐性).

例 6　证明 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

证　由 $\log_a x=\frac{1}{\ln a}\ln x$ 和 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 即知,$(\log_a x)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

(3) 商的导数公式

若 u,v 可导,且 $v\neq 0$,则 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

例 7　已知 $y=\ln x+\frac{\sin x}{x}$,求 y'.

解　$y'=(\ln x)'+\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

例 8　$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$.

解

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. 复合函数的导数

复合函数的导数公式在微积分中是个难点.

定理 2　设 φ 在 x_0 处可导,$u_0=\varphi(x_0)$,f 在 u_0 处可导,则 $f(\varphi(x))$ 在 x_0 处可导,且 $(f(\varphi(x)))'\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)$.

证　因 f 在 u_0 处可导,故 $\lim_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u)}{u-u_0}=f'(u_0)$,因此存在 $\varepsilon(u)$ 使得

$$f(u)-f(u_0)=(u-u_0)[f'(u_0)+\varepsilon(u)]\text{且}\lim_{u\to u_0}\varepsilon(u)=0.$$

由 φ 在 x_0 处可导知,存在 $\eta(t)$ 使 $\varphi(t+x_0)-\varphi(x_0)=t[\varphi'(x_0)+\eta(t)]$ 且 $\lim_{t\to 0}\eta(t)=0$.

因此

$$\begin{aligned}f(\varphi(t+x_0))-f(\varphi(x_0))&=[\varphi(t+x_0)-\varphi(x_0)][f'(u_0)+\varepsilon(\varphi(t+x_0))]\\&=t[\varphi'(x_0)+\eta(t)][f'(u_0)+\varepsilon(\varphi(t+x_0))].\end{aligned}$$

因可导一定连续,故 $\lim_{t\to 0}\varphi(t+x_0)=\varphi(x_0)=u_0$,于是 $\lim_{t\to 0}\varepsilon(\varphi(t+x_0))=0$,这表明

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi(t+x_0))-f(\varphi(x_0))}{t}=\lim_{t\to 0}[\varphi'(x_0)+\eta(t)][f'(u_0)+\varepsilon(\varphi(t+x_0))]=\varphi'(x_0)f'(u_0),$$

即$(f(\varphi(x)))'\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)$.

推论 设 f 和 φ 都可导,则 $f[\varphi(x)]$ 可导且 $(f(\varphi(x)))'=f'(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\varphi'(x)$.

推论中的公式表明复合函数的导数是外函数的导数和内函数的导数的乘积. 有时写成下面的形式 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$,其中$\frac{dy}{dx}=(f(\varphi(x)))'$,$\frac{dy}{du}=f'(u)=f'(\varphi(x))$,$\frac{du}{dx}=\varphi'(x)$.

例 9 已知 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,求 y'.

解 $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{(x)'+(\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(2x)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

例 10 求函数 $y=\sin^2 x$ 的导数.

解 设中间变量 $u=\sin x$,则 $y=\sin^2 x$ 由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成,因$\frac{dy}{du}=2u$,$\frac{du}{dx}=\cos x$,故$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=2u\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

若复合函数有两个中间变量 u 和 v,例如 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=h(x)$,

则有

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$,即$(f(\varphi(h(x))))'=f'(\varphi(h(x)))\varphi'(h(x))h'(x)$.

例 11 求 $\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$的导数.

解 令 $v=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$和 $u=\tan v$,则 $y=\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$由 $y=\ln u$,$u=\tan v$ 和 $v=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$复合而成,因

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},\frac{du}{dv}=\frac{1}{\cos^2 v}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2},$$

故$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\dfrac{1}{2}$,再由

$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 知$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$.

例 12 求 $y=\sin^2(x^2+1)$的导数.

解 $y'=2\sin(x^2+1)\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x=4x\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)=2x\sin 2(x^2+1)$.

例 13 证明(1) $(x^a)'=ax^{a-1}$;(2) $(a^x)'=a^x\ln a$. (3) $[\ln u(x)]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

证 (1) 因 $x^a=e^{a\ln x}$,故$(x^a)'=(e^u)'(a\ln x)'=e^u\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}$;

(2) 因 $a^x=e^{x\ln a}$,故由$\frac{d}{du}e^u=e^u$知,$(a^x)'=(e^u)'(x\ln a)'=e^u\ln a=a^x\ln a$;

(3) 因 $y=\ln u(x)$是 $y=\ln u$ 和 $u=u(x)$的复合,故$[\ln u(x)]'=\frac{1}{u}u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

4. 隐函数的导数

给定二元函数 $F(x,y)$（通常是已知的）和一元函数 $y(x)$（通常是未知的），若 $F(x,y(x))=0$，则称函数 $y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，未知的隐函数 $y(x)$ 常常写成 $y=y(x)$ 的形式.

由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 通常不是初等函数，甚至写不出表达式，例如由方程 $xy+\ln y=1$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的表达式写不出来，称不是隐函数的函数为显函数.

例 14 求 $xy+\ln y=1$ 所确定的隐函数的导数 $y'(x)$.

解 等式两边对 x 求导，得 $y+xy'+\dfrac{1}{y}y'=0$，即 $y'\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=-y$，也即 $y'=\dfrac{-y^2}{1+xy}$.

求隐函数的导数，通常有三种方法. 在例 14 中，将方程 $xy+\ln y=1$ 看作恒等式 $xy(x)+\ln y(x)\equiv 1$，先利用导数的四则运算和复合函数的求导公式，通过解方程求出 $y'(x)$，这是求隐函数的一种常用方法.

例 15 已知方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定了函数 $y=y(x)$，试求 y'.

解 将方程两边对 x 求导，得 $2y'-1=(1-y')\ln(x-y)+(x-y)\dfrac{1-y'}{x-y}$，即 $(3+\ln(x-y))y'=2+\ln(x-y)$，解得 $y'=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}$.

顺便指出，由 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 知，$\ln(x-y)=\dfrac{2y-x}{x-y}$，可以把 y' 化成另外的形式. 例如，$y'=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}=1-\dfrac{1}{3+\ln(x-y)}=1-\dfrac{x-y}{2x-y}=\dfrac{x}{2x-y}$.

$u(x)^{v(x)}$ 既不是幂函数，也不是指数函数，称为幂指函数. 虽然幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 是显函数，但通过取对数，先化成隐函数，再求导数是一种好的方法，如下面的例 16.

例 16 求函数 $y=x^x$ 的导数.

解 两边取对数得 $\ln y=x\ln x$，两边再对 x 求导数得 $\dfrac{y'}{y}=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$，即

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

求含乘、除、乘方、开方因子较多的函数的导数，也可以用例 16 的方法，这一方法称为取对数法，如下面的例 17.

例 17 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 两边取对数得 $\ln y=\dfrac{1}{2}(\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4))$，两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

5. 反函数导数公式

用 $\langle a,b\rangle$ 表示开区间 (a,b)、左开右闭区间 $(a,b]$、左闭右开区间 $[a,b)$ 或闭区间 $[a,b]$，且开区间的端点 a,b 也可以是 $-\infty$ 或 $+\infty$.

定理 3 设函数 f 在区间 $\langle a,b\rangle$ 内严格单调、可导且 $f'(x)\neq 0$，则 f 的反函数 φ 也可导且 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{f'(\varphi(x))}$.

为了应用方便，把反函数求导公式写成 $\varphi'(x)=\left.\dfrac{1}{[\varphi^{-1}(y)]'}\right|_{y=\varphi(x)}$.

例 18 证明 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

证 因 $y=\arcsin x\,(|x|<1)$ 是 $x=\sin y\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，故 $y=\sin x$，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\sin x<\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\cos y>$

0,从而 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$. 由反函数的求导公式知,$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,即 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

每个反三角函数的定义域从它自己的表达式中不容易发现,但可以从它的导函数的定义域中看出来"一部分"(这里定义域的端点可能例外),例如下面的表1-1.

表1-1

名称	表达式	定义域	值域	导函数	周期性
反正弦函数	$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	奇函数
反余弦函数	$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	非奇非偶
反正切函数	$\arctan x$	$(-\infty,\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	奇函数
反余切函数	$\text{arc}\cot x$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\pi)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	非奇非偶

由表1-1和函数的单调性知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\text{arc}\cot x=0$.

6. 基本初等函数的导数公式

基本初等函数的导数公式非常有用,为了便于应用,将它们的导数公式列在下面.

(1) $C'=0$,这里 C 为常数

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$,$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $(x^a)'=ax^{a-1}$,a 为常数

(4) $(e^x)'=e^x$,$(a^x)'=a^x\ln a$

(5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(6) $(\sin x)'=\cos x$,$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(7) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$,$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(8) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(9) $(\cos x)'=-\sin x$,$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(10) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$,$(\text{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

(11) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

7. 一元函数的微分

微分不仅给近似计算提供了一个工具,而且给积分运算和微分方程带来了很大的方便.

定义4　给定一元函数 $f(x)$,固定 x,若存在与 Δx 无关的、但可以与 x 有关的实数 $A(x)$,使得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-A(x)\right]=0$,则称函数 f 在点 x 处可微,称 $A(x)\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分,记作

$df(x)$.

当$f(x)=x$时，则因$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-1\right]=0$，故由定义 4 知，$df(x)=\Delta x$，即 $dx=\Delta x$，这表明自变量 x 的改变量 Δx 就是自变量 x 的微分 dx.

定理 4　f 在点 x 处可微与 f 在点 x 处可导等价，且 $df(x)=f'(x)dx$.

证　若 f 在点 x 处可微，则存在 $A(x)$，使得$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-A(x)\right]=0$，

即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A(x)$，因此 f 在点 x 处可导，且 $A(x)=f'(x)$，于是由微分的定义知，$df(x)=A(x)\Delta x=f'(x)dx$.

反之，若 f 在点 x 处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right]=0$，故由微分的定义知，则 f 在点 x 处可微，且 $df(x)=f'(x)\Delta x$，即 $df(x)=f'(x)dx$.

为了方便，用 $df(x_0)$ 或 $df(x)\Big|_{x=x_0}$ 来表示 $f'(x_0)\Delta x$ 或 $f'(x_0)dx$. 但$(f(1))'$和$\dfrac{d}{dx}f(1)$都表示常值函数 $f(1)$ 的导数，因此$(f(1))'$和$\dfrac{d}{dx}f(1)$都是 0.

函数的微分有三种形式：

$df(x)=f'(x)dx$；$df(x_0)=f'(x_0)dx$；$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

例 19　已知 $y=\sin(2x+1)$，求 dy.

解　因 $y'=2\cos(2x+1)$，故 $dy=2\cos(2x+1)dx$.

例 20　已知 $y=\sqrt{x}$，求 $x=1$ 和 $x=2$ 时的微分.

解　因 $dy=(\sqrt{x})'dx=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$，故 $dy\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{2}dx$，$dy\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}dx$.

例 21　已知 $y=x^3$，求 $x=2,\Delta x=0.002$ 时的微分.

解　因 $dy=(x^3)'dx=3x^2dx$，故 $dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.002}}=3\times 2^2\times 0.002=0.024$.

例 22　已知 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^2=3$ 确定，求 dy.

解　两边对 x 求导，得 $2x+y+xy'+2yy'=0$，即 $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$，因此 $dy=-\dfrac{2x+y}{x+2y}dx$.

近似公式 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 的几何意义是在 x_0 的某邻域内，用一条特殊的直线，即曲线 $y=f(x)$ 在$(x_0,f(x_0))$的切线 $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似代替曲线 $y=f(x)$，简称“以直代曲”.

$df(x)=f'(x)dx$ 和 $df(x(t))=f'(x(t))dx(t)$ 都成立，例如 $d\sin x=\cos x dx$ 和 $d\sin 2x=\cos 2x d2x$ 都成立. 称一阶微分的这个性质为一阶微分具有形式不变性.

顺便指出，虽$(\sin x)'=\cos x$ 成立，但$(\sin 2x)'=\cos 2x$ 不成立，这表明导数并没有“形式不变性”.

8. 高阶导数

若 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 是 x 的函数. 例如 $f(x)=x^3+\sin x$，则 $f'(x)=3x^2+\cos x$ 是 x 的函数. 称 $f(x)$ 的一阶导数的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$ 或 $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ 或 f''；称 $f(x)$ 的二阶导数的导数为 $f(x)$ 的三阶导数，记作 $f'''(x)$ 或 $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ 或 f'''. 一般地，称 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ 或 $f^{(n)}$.

二阶和二阶以上的导数称为高阶导数. 高阶导数的记号很多,常常用 y'' 和 y''' 分别表示 $y=f(x)$ 的二阶导数和三阶导数,用 $y^{(n)}$ 表示 $y=f(x)$ 的 n 阶导数.

注意,有一阶导数不一定有二阶导数,同样有 n 阶导数也不一定有 $n+1$ 阶导数.

一个函数如果有 n 阶导数,只需求 n 次一阶导数即可,如下面的例子.

例 23 设 $f(x)=\sqrt{x^2+4}$,求 $f''(x)$ 和 $f''(0)$.

解 令 $u(x)=x^2+4$,则 $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$,

$$f''(x)=\frac{1\sqrt{x^2+4}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=\frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}},f''(0)=\frac{4}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}.$$

(三)微分中值定理及导数的应用

1. 费马定理和罗尔定理

定义 1 设 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义,若 $f(x)\leqslant f(x_0)$,$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,则称 $f(x_0)$ 为 f 的极大值,点 x_0 称为 f 的极大值点. 极小值和极小值点的定义类似.

函数的极大值、极小值统称为极值. 极大值点、极小值点统称为极值点.

定理 1(费马定理) 若 f 在点 x_0 处可导,且点 x_0 是 f 的极值点,则 $f'(x)=0$.

证 设 x_0 为 f 的极大值点,则右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$,同理左导数 $f'_-(x_0)\geqslant 0$,由 f 在点 x_0 处可导知,$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$,即 $f'(x_0)=0$.

当 x_0 为 f 的极小值点时,证明完全类似.

利用下面的罗尔定理可以证明拉格朗日定理、柯西定理.

定理 2(罗尔定理) 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续、在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$.

证 因 f 在 $[a,b]$ 上连续,故 f 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=f(x_0)$ 和最小值 $m=f(x_1)$.

现分两种情况来讨论.

情形 1 若 $m=M$,因 $f(x)$ 在 M 与 m 之间,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数 M,于是 $f'(x)$ 处处为零.

这种情形 $\xi\in(a,b)$ 很容易取,例如 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$.

情形 2 若 $m<M$,因 $f(a)=f(b)$,故 $f(x)$ 的最大值 M 或最小值 m 至少有一个在区间 (a,b) 内取到,不妨设 $M=f(x_0)$ 在区间 (a,b) 内取到,即 $x_0\in(a,b)$,则由定理 1 知 $f'(x_0)=0$,这时取 $\xi=x_0$ 即可(见图 1-2).

2. 拉格朗日定理和柯西定理

虽然罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形,但从几何上看,下述的拉格朗日中值定理与罗尔定理完全一样,只是将图形作旋转而已(见图 1-3).

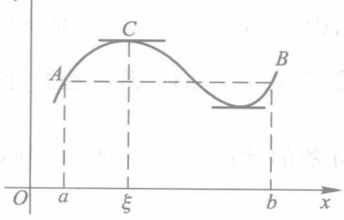

图 1-2

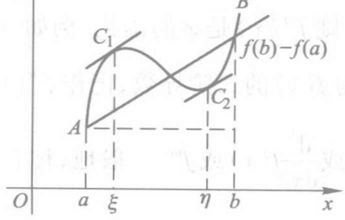

图 1-3