

数学物理方法

Mathematical Methods for Physics

〔德〕 顾 樵 (Qiao GU) 编著



科学出版社

内 容 简 介

本书根据作者 20 多年来在德国和中国开设数学物理方法讲座内容及相关的研究成果提炼而成。其主要内容包括傅里叶级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换、数学物理方程的建立、分离变量法、本征函数法、施图姆-刘维尔理论、行波法、积分变换法、格林函数法、贝塞尔函数、勒让德多项式、量子力学薛定谔方程等。本书注重自身理论体系的科学性、严谨性、完整性与实用性,将中国传统教材讲授内容与国外先进教材相结合、教学实践与其他相关课程的需要相结合、抽象的数理概念与直观的物理实例相结合、经典的数理方法与新兴交叉学科的生长点相结合、基础的数理知识与科学前沿中的热点问题相结合。本书既可为教学所用,又可适应科研需要,同时,附有大量不同类型的综合性例题,便于不同层次读者学习掌握分析问题与解决问题的思路和方法。

本书可作为物理学、应用数学及相关理工科专业本科生与研究生的教材,也可供高等院校教师和科研院所技术人员在理论研究与实际工程中使用,或供有高等数学及普通物理学基础的自学者自修,还可供在国外研读相关专业的研究生及访问学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法=Mathematical Methods for Physics/(德)顾樵编著. —北京:科学出版社, 2012

ISBN 978-7-03-033064-2

I. ①数… II. ①顾… III. ①数学物理方法-高等学校-教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 265894 号

责任编辑: 刘凤娟 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕 者

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京彩虹伟业印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2012 年 1 月第一次印刷 印张: 34 3/4 插页: 1

字数: 667 000

定价: 69.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

追溯历史,数学的发展有两条清晰的轨迹:一是纯理论性发展;二是与物理等实体科学和工程问题相结合。数学物理方法明显属于后者,作为一门高等数理工具,日益突显其广泛的实用性。它不仅可以直接用于物理学,而且涉及几乎所有理工类学科,甚至包含生命科学和经济学。

自 20 多年前到德国之后,我一直从事生物光子学的研究、开发与应用。由于自身理论物理的学术背景以及研究所的工作需要,也经常开设一些学术讲座,主讲数学物理方法和量子力学。作为一名以中国模式培养出来的教授,我感到所使用的外文教材系统性与缜密性不足。因此,我总是按照自己认定的逻辑授课,讲述的内容与学生手中的教材大相径庭。

近年,我常回中国讲学。除介绍国外科学前沿与高新技术外,也讲授数学物理方法和量子力学等基础课程,所用的通常是中文教材,面对母语颇感亲切。但对于一个熟谙西方治学方法的学者,又感到中文教材的灵活性与实用性欠缺。所以,讲课内容依然与学生手中的课本不相配合,而且不提供课件。有学生给我发邮件诉求:“说句真心话,听顾老师的课是一种享受,您讲课太棒了!不知您能否把课件上传,这样我们复习就可以节约一些时间。”问题还是没有称心如意的教材。许多学生以及听课教师问我为什么不出版自己的教材。我的想法是,有写教材的时间,不如去钻研重要的生物光子学课题。

但是,这样的想法随着听课人数的增加,渐渐发生了改变,授课内容与课本不相配合产生的负面影响越来越明显。于是,潜移默化地萌生了写书的念头。就在这时,我发现不少学生已经设法将我的课件复制下来并发到网上,这说明学生们对课件的喜爱,但殊不知其中很多原创内容迄今尚未发表。这个情况使写书的念头突然间转化成一种冲动。其实,平心而论,作为一名定居海外多年的学者,在讲学和研究之余,能为祖国留下几本教科书,以飨众多中国读者,也是一件很有意义的事情。

成书后的《数学物理方法》涉及内容较多,教学中可根据需要和课时加以取舍。书中所述知识绝非一个学期就可以完全掌握,需要长期反复思考与练习,所以本书对硕士生和博士生同样有用。另外,本人基于自己的经历深深感到,即使是从事教学、科研或工程多年的学者与技术人员,也常常需要查阅相关的基础性知识。所以,既为教学所用、又适应科研需要,是本书的宗旨。书中列出大量例题,读者可从中学习解决实际问题的思路与方法,但没有像普通教科书那样附上练习题。在

本科阶段, 授课老师寻找一些练习题布置给学生, 并非一件难事。本书数学推导及物理论述详尽、浅显、简明, 可以作为各类人员的自学教材及参考书。

在多年的学术讲座中, 有不少学生提出许多有意义的问题, 使本书内容日臻丰富, 在此向他们致谢。另外, 与 F. A. Popp 教授的有益讨论以及在德国国际生物物理研究所多年的学术合作使我受益良多。自 1977 年进入大学以来, 在 30 多年的科学生涯中我一直受到妻子张爱华的全力支持和悉心关照, 谨此表示由衷的感谢。

本书不妥之处, 恳请读者批评指正。

顾 樵

Prof. Dr. Qiao GU(Chief Scientist)

gu-qiao@gmx.de

International Institute of Quantum Biology

Haßloch, Germany

20 August 2011

目 录

前言

第 1 章	基础理论知识	1
1.1	常微分方程模型与求解	1
1.2	矢量微分算子与拉普拉斯算子	10
1.2.1	矢量微分算子 ∇	10
1.2.2	拉普拉斯算子 ∇^2	15
第 2 章	傅里叶级数	20
2.1	周期函数的傅里叶级数	20
2.2	半幅傅里叶级数	26
2.3	傅里叶积分	29
第 3 章	傅里叶变换	35
3.1	傅里叶变换简介	35
3.1.1	傅里叶变换的定义	35
3.1.2	傅里叶变换的性质	38
3.2	δ 函数	42
3.2.1	δ 函数的定义和含义	42
3.2.2	δ 函数的性质	43
3.2.3	δ 函数的辅助函数	47
3.2.4	狄利克雷定理的证明	52
3.3	典型函数的傅里叶变换	54
3.4	傅里叶变换应用举例	70
第 4 章	拉普拉斯变换	78
4.1	拉普拉斯变换简介	78
4.1.1	拉普拉斯变换的定义	78
4.1.2	拉普拉斯变换的性质	80
4.2	典型函数的拉普拉斯变换	84
4.3	拉普拉斯变换应用举例	89
第 5 章	基本数学物理方程的建立	98
5.1	波动方程	98
5.1.1	弦振动问题	98

5.1.2	强迫振动与阻尼振动	100
5.1.3	高频传输线问题	102
5.2	热传导方程	104
5.3	拉普拉斯方程	107
5.4	二阶偏微分方程	110
5.4.1	分类与标准形式	110
5.4.2	常系数方程	116
5.5	定解问题	120
5.5.1	一个例子	120
5.5.2	泛定方程与叠加原理	120
5.5.3	初始条件与边界条件	123
5.5.4	几个典型的定解问题	125
第 6 章	分离变量法	132
6.1	弦振动问题	132
6.1.1	弦振动问题的求解	132
6.1.2	解的物理意义及驻波条件	137
6.2	基本定解问题	140
6.3	二维泛定方程的定解问题	155
6.3.1	二维波动方程	155
6.3.2	二维热传导方程	160
6.4	第三类边界条件下的定解问题	162
6.4.1	本征函数的正交性	162
6.4.2	热辐射定解问题	163
第 7 章	分离变量法的应用	175
7.1	热吸收定解问题	175
7.1.1	吸收-耗散系统	175
7.1.2	吸收-绝热系统	184
7.2	综合热传导定解问题	190
7.2.1	对称边界条件	190
7.2.2	反对称边界条件	198
7.3	拉普拉斯方程的求解	208
7.3.1	直角坐标系的拉普拉斯方程	208
7.3.2	极坐标系的拉普拉斯方程	216
第 8 章	本征函数法	224
8.1	本征函数法的引入	224

8.2	非齐次方程的解法	227
8.2.1	一分为二法	227
8.2.2	合二为一法	230
8.3	有源热传导定解问题	236
8.3.1	绝热系统	236
8.3.2	绝热-耗散系统	240
8.3.3	绝热-辐射系统	242
8.3.4	吸收-耗散系统	244
8.4	泊松方程的定解问题	247
8.5	非齐次边界条件的处理	252
8.6	综合定解问题的求解	256
第 9 章	施图姆-刘维尔理论及应用	266
9.1	施图姆-刘维尔本征值问题	266
9.2	施图姆-刘维尔理论的应用: 吊摆问题	271
9.3	厄米算符本征函数的正交性	275
第 10 章	行波法	278
10.1	一维波动方程的通解	278
10.2	一维波动方程的达朗贝尔公式	281
10.2.1	达朗贝尔公式的推导	281
10.2.2	达朗贝尔公式的讨论	284
10.3	双曲型方程的定解问题	286
10.4	一阶线性偏微分方程的特征线法	289
10.5	非齐次波动方程: 齐次化原理	291
10.6	三维波动方程	296
10.6.1	三维波动方程的球对称解	297
10.6.2	三维波动方程的泊松公式	297
10.6.3	泊松公式的物理意义	300
10.7	旁轴波动方程: 格林算子法	303
10.7.1	旁轴波动方程的解	303
10.7.2	光学元件与光学系统的格林算子	306
10.7.3	格林算子法的应用	307
10.8	非线性波动方程: 光学孤立子	309
第 11 章	积分变换法	311
11.1	傅里叶变换法	311
11.1.1	热传导问题与高斯核	312

11.1.2	傅里叶变换法的应用	315
11.2	拉普拉斯变换法	324
11.3	联合变换法	334
11.3.1	对流热传导问题	334
11.3.2	线性衰变的影响	336
11.3.3	有源热传导问题	338
11.3.4	非齐次波动方程问题	342
11.3.5	无边界电报方程问题	345
11.4	半导体载流子的输运方程	346
第 12 章	格林函数法	349
12.1	无界域的格林函数	349
12.2	三维波动方程问题	353
12.3	一维有界热传导问题	358
12.4	格林公式	362
12.4.1	格林定理	362
12.4.2	散度定理	364
12.4.3	格林公式	366
12.5	拉普拉斯方程和泊松方程	367
12.5.1	拉普拉斯方程的基本解	367
12.5.2	泊松方程的基本积分公式	368
12.5.3	泊松方程的边值问题	370
12.6	格林函数法的应用: 电像法	376
12.7	第二、第三类边值问题的格林函数	387
12.7.1	第二类边值问题的格林函数	387
12.7.2	第三类边值问题的格林函数	389
12.8	非线性问题的格林函数解法	392
第 13 章	贝塞尔函数	395
13.1	几个微分方程的引入	395
13.2	伽马函数的基本知识	398
13.3	贝塞尔方程的求解	401
13.3.1	贝塞尔方程的广义幂级数解	401
13.3.2	第一类贝塞尔函数	402
13.3.3	贝塞尔方程的通解	404
13.4	贝塞尔函数的基本性质	408
13.4.1	生成函数	408

13.4.2	递推公式	409
13.4.3	积分表示	415
13.4.4	渐近公式	419
13.5	贝塞尔函数的正交完备性	420
13.5.1	正交函数集的构造	420
13.5.2	参数形式的贝塞尔函数	422
13.5.3	贝塞尔函数的正交性	424
13.5.4	贝塞尔函数的完备性	427
13.6	贝塞尔函数应用举例	431
13.7	球贝塞尔函数	437
第 14 章	勒让德多项式	440
14.1	勒让德方程的引入	440
14.2	勒让德多项式	441
14.3	勒让德多项式的基本性质	449
14.3.1	微分表示	449
14.3.2	积分表示	450
14.3.3	生成函数	451
14.3.4	递推公式	455
14.3.5	例题	459
14.4	勒让德多项式的正交完备性	466
14.4.1	正交性	466
14.4.2	模值	467
14.4.3	完备性	469
14.4.4	例题	470
14.5	勒让德多项式应用举例	480
第 15 章	量子力学薛定谔方程	485
15.1	薛定谔方程的一般解	485
15.2	角向解: 球谐函数	488
15.2.1	中心力场	488
15.2.2	连带勒让德函数	490
15.2.3	连带勒让德函数的性质	492
15.2.4	球谐函数	495
15.2.5	球谐函数的性质	497
15.3	径向解: 广义拉盖尔多项式	499
15.3.1	库仑场中的束缚态	499

15.3.2	广义拉盖尔多项式	504
15.3.3	径向概率密度	507
15.4	量子谐振子与厄米多项式	514
15.4.1	量子谐振子	514
15.4.2	厄米多项式	523
15.4.3	系统的含时解	528
15.4.4	概率密度	529
索引		534

第1章 基础理论知识

1.1 常微分方程模型与求解

常微分方程理论在实际问题上的应用是建立模型并求解。本节将通过不同领域的若干实例,论述常微分方程模型的建立和求解过程。这对于随后建立偏微分方程模型、求解数学物理方法的定解问题,具有直接的参考价值。我们首先讨论一个社会学问题。

例1 马尔萨斯人口模型

英国著名人口统计学家马尔萨斯 (Malthus, 1766~1834) 在担任牧师期间,利用教堂所拥有的资料,研究了英国 100 多年的人口变化,并由此建立了一个描述人口增长的模型,即后来闻名于世的“马尔萨斯人口模型”。

解 马尔萨斯人口模型可以归结为常微分方程

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dt} = \alpha \Rightarrow \frac{du}{dt} = \alpha u \quad (1.1.1)$$

其中, t 是时间, u 是依赖于时间的人口数目, $\alpha (\alpha > 0)$ 为相对增长率常数。式 (1.1.1) 中的 du/dt 是绝对增长率,被 u 除后则表示相对增长率。设初始时刻 ($t = 0$) 的人口数目为 n , 由方程 (1.1.1) 容易解出

$$u(t) = n \exp(\alpha t) \quad (1.1.2)$$

式 (1.1.2) 显示了一个指数增长规律。

这个模型对于人口增长的相对短期预测是正确的。不过研究者发现,如果按照该模型预测世界人口,到 2510 年世界人口将多达 2 万亿。这意味着,即使将全世界所有陆地和所有海洋面积都计算在内,人均面积也只有 0.86m^2 。显然这样一种状况是不可能出现的。这意味着马尔萨斯模型对于人口增长的长期预测是不正确的。

马尔萨斯模型的缺陷在于没有考虑人口增长的非线性机制。事实上,人口总数不太大时,其增长可以用式 (1.1.1) 所示的线性动力学 [即指数增长规律 (1.1.2)] 描述。但是随着人口总数的增加,地球上生存环境及生态资源对人口增长的限制变得越来越显著,这个重要的因素将使人口的增长趋于缓慢。马尔萨斯模型的问题在于没有考虑环境对人口增长的制约。

描述人口增长的更精确的模型是非线性的，它与下面的传染病问题有关。

例 2 传染病问题 (Logistic 模型)

一个区域有 M 只老鼠，其中 N 只患上了传染病。它们可以通过接触将病传染给健康的老鼠。问任意时刻患上传染病的老鼠有多少？

解 设任意 t 时刻病鼠和健康老鼠的数目分别为 u 和 v ，则

$$u + v = M \quad (1.1.3)$$

病鼠数目的变化率正比于乘积 uv ，即

$$\frac{du}{dt} = \beta uv \quad (1.1.4)$$

这里非线性项 uv 刻画老鼠的接触性传染，比例系数 $\beta > 0$ 。利用式 (1.1.3)，可以将方程 (1.1.4) 修改为

$$\frac{du}{dt} = \alpha u - \beta u^2 \quad (1.1.5)$$

其中， $\alpha = \beta M$ 。现在求解方程 (1.1.5)，首先将它写成

$$\frac{M du}{u(u - M)} = -\alpha dt \quad (1.1.6)$$

的形式，然后两边取定积分

$$M \int_N^{u(t)} \frac{du}{u(u - M)} = -\alpha \int_0^t dt \quad (1.1.7)$$

利用积分公式

$$\int \frac{du}{(u+a)(u+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+u}{b+u} \quad (a \neq b) \quad (1.1.8)$$

式 (1.1.7) 给出

$$u(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N} - 1 \right) \exp(-\alpha t)} \quad (1.1.9)$$

式 (1.1.9) 作为非线性方程 (1.1.5) 的解给出任意时刻病鼠的数目。我们看出，它是众所周知的生物学中的“生长曲线”，如图 1.1 所示。

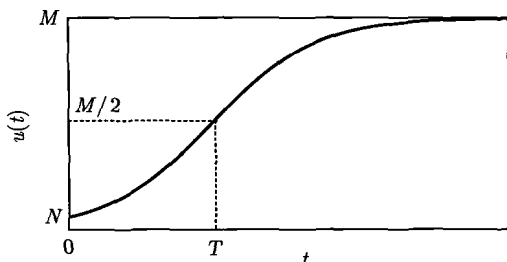


图 1.1 式 (1.1.9) 所示的生长曲线 (亦称 “S 曲线”)。初始值为 $u(0) = N$, 饱和值为 $u(\infty) = M$, 曲线拐点出现在时刻 $T = \frac{1}{\alpha} \ln[(M/N) - 1]$, 函数在拐点的取值达到饱和值的一半, 即 $u(T) = M/2$ 。生长曲线能够描述许多生物学过程, 如人体重量、身高随年龄的增加, 各种微生物的繁殖, 生物群体中个体数目的增加, 人体光子辐射信号随年龄的变化等

式 (1.1.5) 所示的非线性动力学包含了个体数目增长的非线性机制, 能够相当好地描述人口增长, 在人口学中称为 Logistic 模型。其中, 非线性项 $-\beta u^2$ 所包含的机制是: 人口的相对增长率不再是一个简单的常数, 而是一个随 u 增大而线性衰减的函数, 即

$$\alpha \longrightarrow \alpha \left(1 - \frac{u}{M}\right) \quad (1.1.10)$$

这样方程 (1.1.1) 修正为

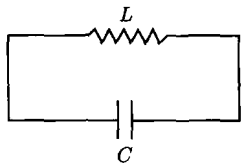
$$\frac{du}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{u}{M}\right) u = \alpha u - \beta u^2 \quad (1.1.11)$$

由式 (1.1.11) 可以看出, 在人口增长的线性阶段, 个体数量 u 远小于饱和值 M , 这时比值 $u/M \ll 1$, 相对增长率 $\alpha(1 - u/M) \approx \alpha$, Logistic 模型约化为马尔萨斯模型。随着 u 的增大, u/M 变得不能忽略, 于是相对增长率下降, 人口增长率趋于缓慢。Logistic 模型被验证与许多国家及世界人口增长的统计数据相吻合。

由上述两个例子, 可以大体看出建立常微分方程模型解决实际问题的基本步骤是: ①分析考查量的变化规律, 建立相应的微分方程; ②写出考查量所满足的相关条件 (如上述两个实例中的初始条件); ③根据微分方程和相关条件, 求出考查量的解; ④分析考查量的变化特征; ⑤讨论解的适用条件 (比如, 马尔萨斯模型只能用于个体增长的线性阶段)。随后我们将对于数学物理方法的实际问题, 建立偏微分方程模型, 而解决问题的步骤也基本如此。下面我们继续讨论常微分方程的模型与求解。

例 3 L - C 电路

讨论图 1.2 的 L - C 电路中电容器所带电荷与回路中电流的变化规律, 已知初始时刻 ($t = 0$) 的电荷与电流分别为 $Q(0) = Q_0$, $I(0) = 0$ 。

图 1.2 一个 L - C 电路

解 设电路中任意时刻的电流为 I ，它经过电感 L 和电容 C 所产生的电压降分别为 $L \frac{dI}{dt}$ 和 $\frac{Q}{C}$ ，其中 Q 为任意时刻电容器的电荷。由基尔霍夫定律得到

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.1.12)$$

因为 $I = \frac{dQ}{dt}$ ，方程 (1.1.12) 可以写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0 \quad (1.1.13)$$

这个方程的通解是

$$Q(t) = A \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + B \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (1.1.14)$$

其中， A 和 B 均是待定的常数。电荷的初始条件为

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I(0) = 0 \quad (1.1.15)$$

利用后者得到 $B = 0$ ，再利用前者得到 $A = Q_0$ 。这样式 (1.1.14) 给出特解

$$Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (1.1.16)$$

而任意时刻的电流为

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (1.1.17)$$

很明显，电荷与电流均以 $1/\sqrt{LC}$ 为圆频率做周期振荡，故图 1.2 所示的电路又称为 L - C 振荡回路。

最后我们考查电流的方程，事实上，方程 (1.1.12) 对 t 求导数立即得到

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1.1.18)$$

可见它与电荷方程 (1.1.13) 有完全相同的形式。这类常微分方程还可以描述许多其他的实际问题，如下面的单摆问题。

例 4 单摆问题

长度为 l 的柔软轻线, 一端固定, 一端系质量为 m 的质点 (称为摆球), 于铅直平面内在平衡位置两侧摆动, 如图 1.3 所示。问摆角 θ 的变化服从什么规律?

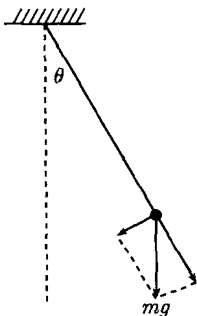


图 1.3 单摆: 取摆球反时针运动的方向为摆角 θ 的正向

解 设任意时刻摆球偏离铅垂线的角度为 θ , 摆球受到的合力为重力 mg 在切向的分量 $mg \sin \theta$, 其切向速度为 $v = l \frac{d\theta}{dt}$ 。由牛顿第二定律得到

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \quad (1.1.19)$$

式 (1.1.19) 中有负号是由于摆球加速度 $m \frac{dv}{dt}$ 的方向与 θ 方向相反, 故

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.1.20)$$

这就是单摆的运动方程, 作为一个非线性方程它能够描述单摆在任意摆角时的运动。如果摆动的角度很小, 以致 $\sin \theta \approx \theta$, 则方程 (1.1.20) 化为线性方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (1.1.21)$$

我们看到微振动单摆的角频率为 $\sqrt{g/l}$, 它与 L - C 电路具有相同的数学模型

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (1.1.22)$$

其中, $k > 0$ 。不同问题可以具有相同的数学模型这一事实, 反映了不同现象之间的内在相通性。正是这样的相通性, 提供了用模拟方法研究复杂问题的理论依据。例如, 利用简单的电路模拟力学系统、物理系统, 生物系统中的动力学过程。

方程 (1.1.22) 是一个极为有用的常微分方程, 让我们对它进行一般性的讨论。它的通解是

$$y(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (1.1.23)$$

还可以等价地写为

$$y(x) = E \sin(kx + \delta) \text{ 或 } y(x) = E \cos(kx + \delta) \quad (1.1.24)$$

其中, E 和 δ 分别是振幅与位相, 式 (1.1.23) 和式 (1.1.24) 在物理上通常称为“驻波”解。而借助欧拉公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (1.1.25)$$

方程 (1.1.22) 的通解还可以写成“行波”的形式

$$y(x) = C \exp(ikx) + D \exp(-ikx) \quad (1.1.26)$$

方程 (1.1.22) 的通解取驻波还是行波, 视具体问题的相关条件而定。总的原则是利用相关条件尽可能使式 (1.1.23) 或式 (1.1.26) 中的一项为零。例如, 对于条件 (1.1.15), 方程 (1.1.13) 应该取驻波解 (1.1.14), 得到单项解 (1.1.16)。另外, 如果能够确定实际的系统只有一个方向的行波, 则取行波解 (1.1.26)。例如, 只有正向行波时, 便只有单项解 $y(x) = C \exp(ikx)$, 这种情况在量子力学中尤为常见。

例 5 R - G 传输线

当电流通过传输线时, 由于电路中存在电阻和电漏, 传输线上的电压与电流都是随空间 x 变化的。讨论传输线上电压与电流的变化规律。

解 研究传输线上电压与电流的变化规律的方法是从传输线划出一个微元 Δx , 它的等效电路如图 1.4 所示, 其中 R 和 G 分别是单位长度的电阻与电漏。由于微元足够小, 每个原件的尺度均视为 Δx 。根据基尔霍夫定律, 在长度为 Δx 的传输线中, 电压降为

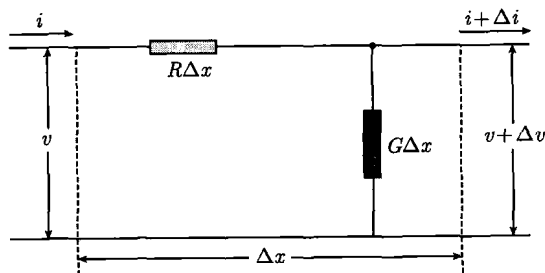


图 1.4 传输线的微元 Δx 的等效电路

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x \cdot i \quad (1.1.27a)$$

在节点, 流入的电流等于流出的电流, 即

$$i = (i + \Delta i) + G\Delta x \cdot (v + \Delta v) \quad (1.1.27b)$$

略去方程 (1.1.27b) 右边的二阶小量 $\Delta x \Delta v$, 并将式 (1.1.27) 中的变化量用微商近似代替, 得到

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gv = 0 \quad (1.1.28a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + Ri = 0 \quad (1.1.28b)$$

这是电压与电流的耦合方程, 下面我们推出各自独立的方程。对式 (1.1.28a) 两边关于 x 求导数, 得到

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1.29)$$

由式 (1.1.28b) 解出 $\partial v / \partial x$, 再代入式 (1.1.29), 得到

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - RGi = 0 \quad (1.1.30a)$$

这是电流的方程。同理可得电压的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - RGv = 0 \quad (1.1.30b)$$

可见电压与电流有相同的变化规律。方程 (1.1.30a) 和方程 (1.1.30b) 具有相同的形式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = 0 \quad (1.1.31)$$

其中, $k > 0$ 。方程 (1.1.31) 也是一个常见的方程, 它的通解常表示为指数形式

$$y(x) = Ce^{kx} + De^{-kx} \quad (1.1.32)$$

其中, C 和 D 是待定的常数。利用公式

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1.1.33)$$

式 (1.1.32) 也可以表示为双曲函数形式 (图 1.5)

$$y(x) = A \cosh kx + B \sinh kx \quad (1.1.34)$$

解 (1.1.34) 在数学物理方法中是很有用的。方程 (1.1.31) 的通解选式 (1.1.32) 还是式 (1.1.34), 也视具体问题的相关条件而定, 选取原则也是尽量使其中一项为零。