数学模型

《数学模型》编写组 编

華南理工大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学模型/《数学模型》编写组编. 一广州：华南理工大学出版社，2001.8（2005.2 重印）
ISBN 7-5623-1718-6

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 数…　Ⅲ. 数学模型　Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 021687 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail: scut202@scut.edu.cn
http://www. scutpress.com.cn
责任编辑：王魁葵　欧建岸
印 刷 者：广东省阳江市教育印务公司
开　　本：850×1168　1/32　印张：9.25　字数：232 千
版　　次：2005 年 2 月第 1 版第 3 次印刷
印　　数：5 001～7 000 册
定　　价：15.00 元

前　言

由于数学建模竞赛活动的推动，近年来，国内出版的以“数学模型”为名的教学参考书已不下 10 种。这类书各有特色，是我校指导参加全国大学生数学建模竞赛的学生的主要参考资料。经过多年来对这些教材的使用，我们深刻地体会到它们比较适合于指导竞赛，比较适合于“尖子”学生，其内容的深度和广度不是一般学生所易于接受的。

“数学模型”已广泛地被列为大学生选修课。作为这门课的教材，我们希望它内容不要太多，能用 36 学时左右讲完，不过多增加学生学业负担；希望它内容不要太深，能为一般学生所接受；希望它多一些有趣、有用的数模实例，能引起学生的学习兴趣；还希望它成为大学数学基础课的某种意义上的复习教材；希望它介绍给学生一些有用的数学方法。总之，希望学生通过学习增加学习数学的兴趣。本书是五邑大学《数学模型讲义》经多次试用和修改而成的，内容成熟，基本上能满足以上要求。

参加本书编写的有李正吾（第一章），陈新明（第二、三、四、五章），王琦（第六、七、八、九章），刘金山（第十章）。

五邑大学数理系的领导对本书的编写给予了极大地支持，五邑大学数学建模指导组的优秀成绩也极大地鼓励了我们，在此对他们表示感谢。

编　者

2001.3

目　录

第一章　数学模型漫谈

数学模型是一个老话题，因为数学模型可以通俗地说成是数学在其他学科领域中的应用，只是近十几、二十年说得更多些，甚至成为大学生的限选课。这当然是有原因的。第一个原因是几乎所有的科学与技术领域的发展都离不开数学，而且是离不开比较高深的数学；数学本身的发展也为其他学科提供了较充足的数学理论。第二个原因是计算机的迅速发展，这一发展有力地促进了数学的应用。

提到模型，自然想到小时候做过的、玩过的飞机模型。但千万不要以为模型一定是“形似”—— 外形与事物相似，其实模型更注重“神似”，而数学模型更不可能做到“形似”。例如，物理课中单摆的一个较好数学模型是：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta$$

式中　θ—— 细绳与中轴的夹角；

g—— 重力加速度；

l—— 摆长。

实验证明这个数学模型能非常好地模拟单摆的运动，但它在外形上与单摆无“相似”可言。模型是我们对所研究的客观事物有关属性的模拟。例如飞机模型只是对飞机外形的模拟。数学模型就是将对客观事物的某种属性的研究转变成一个数学问题的求解。这种转变的能力从学习数学那天起就开始得到培养。中、小学数学中的应用题就是建立数学模型的训练。下面给出一个将实

际问题转变为数学问题的有趣例子。

这里我们将歌词“你来到我身边，带着微笑，带来了我的烦恼…… 她比你先到……”转变成一条数学定理。先分析一下为什么会烦恼，若“我”是一个男孩子，“你”就是女孩，带着微笑即爱上了“我”，“我”所以烦恼是“她”在此前也对“我”带着微笑。面对两个可爱的女孩，如何选择?当然烦恼。我们用一个时间的随机函数 $\xi(t)$ 表示人(这是恰当的，至少人的感情状态(微笑和烦恼)是随机的)。我们不是讨论所有的随机函数，而是讨论有“人性”的随机函数。这类随机函数的集合记为 X。X 又可分为两类，A(男)和 B(女)：

$$X = A \cup B \text{ 且 } A \cap B = \varnothing$$

定义状态函数 φ：对 X 中的任一随机函数 $\xi(t)$，

$$\varphi(\xi(t)) = 0,\ (\xi(t) \text{ 在微笑状态，面若满月})$$

或 $$\varphi(\xi(t)) = 1,\ (\text{烦恼状态，形容憔悴})$$

定理 设 $y(t) \in A$，若在时刻 t_1，存在 $i(t) \in B$，当 $t \geqslant t_1$ 时，$i(t)$ 在 $y(t)$ 的邻域内，且 $\varphi(i(t)) = 0$；又若在时刻 $t_2(< t_1)$，当 $t \geqslant t_2$ 时，有 $j(t)(j(t) \in B)$ 在 $y(t)$ 的邻域内，且 $\varphi(j(t)) = 0$。则当 $t \geqslant t_1$ 时，$\varphi(y(t)) = 1$。

数学模型受到重视得益于数学的威力，看一个例子：若一根绳子刚好把地球赤道紧紧地绕上一圈，现在我们将绳子接长 10 m，这时绳子围成的一个圆将与地球间有一个缝隙，问一个人能否从这个缝隙钻过去?一只蚂蚁能钻过去吗?

解决这个问题可否按比例缩小做个模型试验一下，比如地球做成一个直径为 10 m 的球，一个 2 m 高的人将做成高不足 0.001 6mm 的小人!难度之大可想而知。用数学去模拟就简单多了。地球半径是 r (km)，赤道长为 $2\pi r$ (km)，接长了的绳子长 $2\pi r + 0.01$ (km)，可围成一个半径为 $R = \dfrac{2\pi r + 0.01}{2\pi}$ (km) 的

圆，因此绳子与地球之间的缝隙宽为

$$\frac{2\pi r + 0.01}{2\pi} - r = \frac{0.01}{2\pi} = 0.0016(\text{km}) = 1.6(\text{m})$$

问题解决了。

不要以为数学模型一定是非常精确的。模型只是一种模拟，它与所研究的客观事物并不相同，数学模型与客观事物之间也有不可克服的误差。模拟同一个事物的同一种属性可以有不同的数学模型，它们之间严格地说不分对与错，只分好与不好。原则地说，在满足精确度要求的前提下简明的数学模型比较好。精度是模型的灵魂，精度达不到要求的模型是没有价值的。可以通过实验检验数学模型的精确性(前面提到的单摆的数学模型就是通过实验得知它有较好的精确性)，也可以通过数学论证说明精确性(后面将给出一个用数学论证说明精确性的数学模型)。

一道数学应用题总有一些已知条件(假设)，根据这些条件我们才可以列出一个数学式，并比较方便地求解。建立数学模型也要根据所研究的事物作一些合理的假设，以利于得到数学算式和求解。假设不合理会有两个问题：① 很难得到数学算式或者很难求解以致得不偿失，甚至目前的数学理论解决不了；② 模型的精度很差，根本不能用。合理的假设来自对客观事物规律的认识，来自对目的的正确理解，来自数学知识的积累。

现在具体地建立一个数学模型。在一块不平的地面上能否把一张方桌放稳?我们的经验是桌子腿有“缺陷”是放不稳的，在有台阶的地方或地面“崎岖”的地方也是放不稳的，因此我们的假设是：

(1) 假设方桌四只脚是几何点，它们恰好是正方形的四个顶点；

(2) 假设地面高度变化是连续的，且较平缓。

桌子放稳就是四个脚与地面距离均为零。我们要说明在适当的位置四只脚与地面的距离均为零。为了说明桌子的位置，只须建立坐标系。

设桌子的四只脚的现在位置构成正方形 $ABCD$，如图1-1，x 轴与直线AC 重合，中心 O 为坐标原点，正方形绕中心旋转表示方桌位置的改变，若旋转角为 θ，θ 表示了方桌的位置。这样四只脚与地面的距离就是 θ 的函数，设 A、C 两脚与地面距离之和为$f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为$g(\theta)$，显然$f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$ 且$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$。由于地面高度连续变化，$f(\theta)$、$g(\theta)$ 都是 θ 的连续函数，我们要证明：存在 θ_0，使得 $f(\theta_0)=0$，$g(\theta_0)=0$。这个要证明的就是问题："方桌能否放稳"的数学模型。下面来求解。

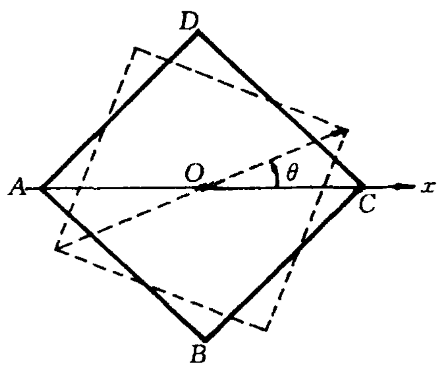

图 1-1

证明　只要证明存在 θ_0，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$ 即可。故令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$。考虑$h(0)$的符号，若$h(0)=0$,$\theta_0$的存在已得证。若$h(0)\neq 0$，不妨设$h(0)>0$，由$f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$以及$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$ 可知这时必有$f(0)>0$，$g(0)=0$，亦即 A、C 两脚必有一脚不着地，而 B、D 两脚均着地。这样当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，A、C 两脚在现在B、D 的位置，而 B、D 在现在A、C 的位置，即 $f(\frac{\pi}{2})=0$，$g(\frac{\pi}{2})>0$，故 $h(\frac{\pi}{2})<0$。函数$h(\theta)$

是连续函数，在区间$[0,\ \frac{\pi}{2}]$上，$h(0)>0$，$h(\frac{\pi}{2})<0$，由连续函数介值定理得到必存在$\theta_0, 0<\theta_0<\frac{\pi}{2}, h(\theta_0)=0$。

下面我们要分析这个数学模型的可靠性。实际上方桌的四只脚着地的四个点并不构成正方形，但“接近”正方形，而地面高度的连续性是肯定的，由连续函数的保号性我们能断定$h(\theta)$在区间$[0,\ \theta_1]$上有：$h(0)>0$，$h(\theta_1)<0$（θ_1在$\frac{\pi}{2}$的某个邻域内），所以存在$\theta_0, 0<\theta_0<\theta_1$，$h(\theta_0)=0$。因此，建立的数学模型是可靠的，也就证明了一般情况下方桌可放稳。

这个数学模型从建立到求解，清晰地演示了数学建模的全过程：假设，把实际问题抽象为数学问题，求解，检验。

怎样建立数学模型以及求解它?惟一的办法也许只有冥思苦想，像鲁迅先生那样，把人家花在喝咖啡的时间用在学习和工作上。这里还介绍一种办法——归纳法。建立数学模型最重要的是对所研究的事物的规律的认识，归纳的过程就是反复实验总结规律的过程，也就是加深对事物规律的认识过程。这里的反复实验可以是利用别人的实验结果，也可以是自己的多次实验。1997年的全国大学生数学建模竞赛之B题是一个截断切割问题：对贵重石材采用截断切割的加工方式，从一个长方体中加工出一个已知尺寸、位置预定的长方体，一般经过6次截断切割。要求设计一种安排各面加工次序的方法，使加工费用最少。五邑大学有一个参赛队，起初他们只有一种感觉：应该先切割厚度较大的面，但似乎也应该考虑加工的面积大小，用数学的方法证明不了他们的想法。后来他们用计算机计算了各种加工次序的加工费，归纳各次试验结果，总结出“先切割厚度较大的面”是确定加工次序的原则，较好地完成了任务，获得广东赛区一等奖。

开普勒第三定律的发现是利用归纳法的典型例子。开普勒为

了寻求行星运动周期与轨道尺寸的关系，把当时已发现的六大行星的运行周期和椭圆轨道的长半轴列成表格(见表 1-1)，经反复研究，终于总结出第三定律：行星运行周期的平方与其椭圆轨道半轴的三次方成正比。

表 1-1 六大行星运行周期和椭圆轨道的长半轴

行星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水星	0.241	0.387	0.058	0.058
金星	0.615	0.723	0.378	0.378
地球	1.000	1.000	1.000	1.000
火星	1.881	1.524	3.538	3.540
木星	11.862	5.203	140.707	140.852
土星	29.457	9.539	867.771	867.978

在建立数学模型和求解数学模型过程中一定要充分利用计算机。掌握一种数学软件是十分必要的。利用计算机处理数学问题会与一些“习惯”的做法不同，例如求最大值会习惯地想到高等数学中的方法：求导数，令导数为零，等等。但是实际问题中函数关系比较复杂，有时甚至是没有导数的，这时可以用计算机把最大值搜索出来，以后的学习中读者将会见到在建立数学模型中计算机应用的富于启发的实例。

习　题

如果你在学生会工作，想了解同学们在考试中舞弊的严重程度，当然不好找到一些同学问：你们中谁有舞弊行为?下面介绍一种估计严重程度的数学方法。

假定要在 100 位同学中作调查，就做 100 张小纸条，其中 40

张纸条上写：你有舞弊行为吗?余下60张纸条上写：你没有舞弊行为吗?让被调查的同学像抓阄那样每人任取一张小纸条，并回答“是”或“不是”：一个有舞弊行为的同学，他如果拿到的是问题：你有舞弊行为吗?他应该回答：是。如果拿到另一个问题则回答：不是。也就是大家都如实回答问题。只要你能让被调查的人确信，除了他本人谁也不知道他拿到的是什么问题，大家一定会如实回答问题。你的工作就是记录有多少人回答“是”，有多少人回答“不是”。假定有45人回答“是”，55人回答“不是”，你就可以按下面的等式关系算出有舞弊行为的学生所占的百分数 p：

$$\frac{45}{100} = \frac{40}{100} \cdot p + \frac{60}{100}(1 - p) \qquad (*)$$

容易得到：$p = 0.75$，亦即学生中有75%的人有舞弊行为。

显然这个结论不一定可靠。但是只要多作几次调查，取 p 的平均值就会比较可靠了。请你用概率论中的全概率公式解释公式(*)。如果两个问题各写在50张纸条上，结果又怎样呢?

第二章　初等模型

衡量一个模型的优劣全在于它的应用效果，而不在于所用数学方法的深浅。当研究对象的机理比较简单，用初等的方法也能得到很好的解决。

§2.1　商人们怎样安全过河

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人。由他们自己划行。若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定。试给出一个商人安全渡河的方案。

这类智力游戏经过一番逻辑思索就可以找出解决问题的方法，但如果建立一种数学模型则可用来解决更为广泛的同类问题。

该问题可视为一个多步决策过程，每一步在保证安全(两岸的商人数不少于随从人数)的前提下作出决策，在有限步内使所有人全部过河。

1. 模型建立

设 x、y 和 z 分别表示此岸的商人、随从和船的数量，则 x、y 取值为 0，1，2，3；z 取值为 0，1。用三维数组 (x,y,z) 表示状态，安全渡河条件下的状态集合称为允许状态集合，记为 S，则

$$S=\{(x,y,z) \mid x=0,3 \text{ 或 } x=y=1,2\} \tag{2-1}$$

允许决策集合记为 D，由小船的容量可知

$$D=\{(x,y,1) \mid x+y=1 \text{ 或 } 2\} \tag{2-2}$$

则第 k 次状态 $S_k=(x_k,y_k,z_k)\in S$ 与第 k 次决策 $d_k=(x_k,y_k,1)\in D$ 的变化规律为

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k d_k \tag{2-3}$$

式(2-3) 为状态转移律，这样制订安全渡河方案归结为如下各步决策问题：

求决策 $d_k\in D, k=1,2,\cdots, n$，使状态 $S_k\in S$，按照转移律式(2-3)，由初始状态 $S_0=(3,3,1)$ 经 n 步到状态 $S_n=(0,0,0)$。

2. 模型求解

根据式(2-1) ~ (2-3) 可编程用计算机求解，对这个简单问题可直接求解。

第一步决策 d_1 可取(0, 1, 1)、(0, 2, 1)、(1, 1, 1)，如取(0, 1, 1)，则 d_2 只能是 d_1，又回到 S_0，故可取 d_1 为(0, 2, 1) 或(1, 1, 1)，则 d_2 为(0, 1, 1) 或(1, 0, 1)。下面是解答之一。

$$S_0=(3,3,1)\xrightarrow{d_1=(0,2,1)}(3,1,0)\xrightarrow{d_2=(0,1,1)}(3,2,1)$$

$$\xrightarrow{d_3=(0,2,1)}(3,0,0)\xrightarrow{d_4=(0,1,1)}(3,1,1)\xrightarrow{d_5=(2,0,1)}(1,1,0)$$

$$\xrightarrow{d_6=(1,1,1)}(2,2,1)\xrightarrow{d_7=(2,0,1)}(0,2,0)\xrightarrow{d_8=(0,1,1)}(0,3,1)$$

$$\xrightarrow{d_9=(0,2,1)}(0,1,0)\xrightarrow{d_{10}=(0,1,1)}(0,2,1)\xrightarrow{d_{11}=(0,2,1)}(0,0,0)=S_{11}$$

思考题 有4名商人各带一随从的情况，小船同前，应如何安全渡河?

§2.2 公平的席位分配

例 2-1 某校甲、乙、丙三个系分别有学生100、60、40人，共200人。若学生代表大会设20个席位，公平的席位分配办法是按学生人数比例分配，三个系分别设10、6、4个席位。

当这三个系学生分别为103、63、34人时，按比例分配席位出现了小数，过去的惯例分配方法是先将取得整数的19席分配完毕，剩下1席分给“损失”最大的丙系，于是三系仍分别占10、6、4席，见表2-1。

表 2-1 按惯例的席位分配

系别	人数	比例(%)	20席的分配		21席的分配	
			按比例	实际分配	按比例	实际分配
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

假定席位增至21席，按上述方法重新分配席位，计算结果见表2-1，三个系分别占有11、7、3席，增加一席而丙系却少了一席，说明这种分配方法是不公平的，必须建立新的分配方法。绝对公平应是每个席位代表的学生数相同，一般是做不到的，新方法的建立应该使每个席位代表的学生数尽可能地接近。

1. 模型建立

假设某校有 m 个系，各系学生数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$，全校总学生数为 $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$。设学生代表共设 N 个席位，则平均每

个席位代表的学生数为 $a = \frac{n}{N}$，又设各系分配的席位分别为 N_1，N_2，…，N_m，则各系每席实际代表的人数为

$$a_i = \frac{n_i}{N_i} \qquad (i = 1,2,\cdots, m)$$

可以用不同的标准来衡量分配方法的公平度，如使目标函数 $Z = \max a_i$ 最小，或使目标函数 $Z = \sum_{i=1}^{m} | a - a_i |$ 最小等。下面只研究第一个标准。

按比例分配，第 i 系应分席位为

$$r_{1i} = \frac{n_i}{a} = \frac{Nn_i}{n}$$

第 1 次分配时若第 i 系分得 $[r_{1i}]$ 席，每席代表学生数为

$$a_{1i} = \frac{n_i}{[r_{1i}]} = a\frac{r_{1i}}{[r_{1i}]}$$

因为 a 与系别无关，$\frac{r_{1i}}{[r_{1i}]}$ 较大的系吃亏(这说明惯例比较尾数的大小是错的)，称 $r_{1i}/[r_{1i}]$ 为判别数，判别数越大的系越吃亏，应将第 1 次按 $[r_{11}],[r_{12}]$，…，$[r_{1m}]$ 分配后剩下的席位

$$r_1 = N - \sum_{i=1}^{m}[r_{1i}]$$

按判别数从小到大的顺序分给后 r_1 个系，若将 r_1 个席位分配给后 $r_1 - 1$ 个系，使 $r_{1i}/[r_{1i}]$ 最大的系多分配两个的方案要比前面的方案的目标函数 Z 要大，因而也不是最优的。不妨设各系的编号就是 $r_{1i}/[r_{1i}]$，并以从小到大排列，则

$$N_i = [r_{1i}] + 1,$$

$$i = m - r_1 + 1, m - r_1 + 2, \cdots, m$$

而前面的 $m - r_1$ 个系平均每个席位代表的学生数

$$a_1 = \sum_{i=1}^{m-r_1} n_i \Big/ \sum_{i=1}^{m-r_1} [r_i]$$

将 a_1 代替第一步中的 a，重新计算判别数 $r_{2i}/[r_{2i}], i=1,2,\cdots, m-r_1$，再按第 1 步方法分配。注意此时有 $r_{2i} \leqslant r_{1i}$，故

$$[r_{2i}] \leqslant [r_{1i}], i = 1,2,\cdots,m-r_1$$

经有限步就可使 $\max \frac{r_{ki}}{[r_{ki}]}$ 达最小。

编程计算框图如图 2-1。

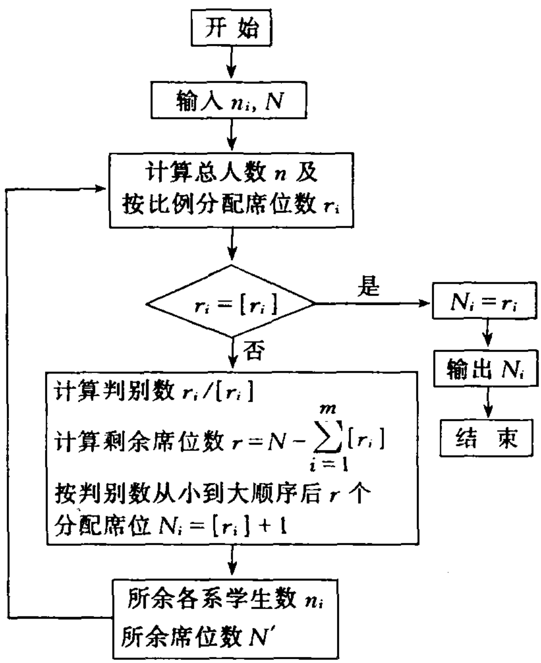

图 2-1

2．模型检验

对前面提出的实例中 21 个席位的分配如表 2-2。