普通高校“十二五”规划教材

GONGCHENGLIXUE

工程力学

（下册）

戴葆青　张东焕　◎等编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

工 程 力 学

（下册）

戴葆青　张东焕　等编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书充分考虑了当前工科院校各专业的《工程力学》课程开设学时情况，在课程体系上进行了较大幅度的改革创新，在保留经典内容的基础上，力求基本概念与论述简明扼要，易于读者理解与掌握。其目的是为培养适合21世纪要求的高素质复合型人才服务。

本教材分上、下两册，上册可供70学时以内的专业选用，70学时以上的各专业可选上、下两册，内容包括：静力学部分、材料力学部分、运动学部分、动力学部分和工程力学专题部分等5大部分。

本书可供高等工科院校的航空航天、机械、交通与车辆工程、土木建筑、水利水电、机电、采矿、机电一体化等专业选用，其中打“*”的内容为选学内容，可根据各专业的学时要求及具体的教学需要选用；也可供其他专业和有关工程技术人员选用。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学. 下册 / 戴葆青等编著. --北京 : 北京航空航天大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5124-0487-8

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①戴… Ⅲ. ①工程力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第123001号

工程力学(下册)

戴葆青　张东焕　等编著

责任编辑　金友泉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net　邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×960　1/16　印张:15　字数:336千字

2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷　印数:4 000册

ISBN 978-7-5124-0487-8　定价:25.00元

前　言

随着我国改革开放的进一步深化和与国际接轨的大势所趋，高等教育的根本任务是培养面向21世纪具有创新精神和实践能力的高素质人才。本教材是根据国家教育部高等学校力学教学指导委员会最新颁布的《理工科非力学专业力学基础课程教学基本要求》，结合目前普通工科学校《工程力学》教学及教材现状并在参考多本优秀教材《见参考文献》的基础上编写的。

编写时，充分吸取各校近年来《工程力学》课程教学改革的经验，在内容编排上，确立了传统内容与近代力学的概念、新内容、新方法相结合，紧密联系工程实际和科技发展的课程内容。在编写的过程中注意了基本概念和分析方法的严格性，在内容上力求精炼。为便于教师执教、学生自学，适当增加了小标题，且章前有内容提要，章后附有思考题、习题，以供选用。

本书所用的单位符号符合中华人民共和国标准 GB 3012.1—93、GB 3012.2—93、GB 3102.3—93。

本教材由戴葆青(上册绪论；第1、13、15章；下册第3章)、张东焕(上册第4、5、17章；下册第4章)、贺光宗(上册第6、16章；下册第10章)、郭新柱(上册第11、12章；下册第5章)、马长青(上册第14、18章、附录)、黄玉果(下册第6、7章)、董焕俊(上册第2章)、代祥俊(上册第3章)、韩长瑞(上册第7章)、王衍国(上册第8章)、李翠赟(上册第9章)、闫承俊(上册第10章)、许兴明(下册第13章)、张伟(下册第12章)、周军(下册第1章)、王宏(下册第2章)、范东凯(下册第8章)、田建国(下册第9章)、史萍(下册第11章)合编，本书由刘桂斋教授审阅，并提出了很多宝贵意见，特此致谢。因编者水平有限，书中难免存在缺点和不妥之处，恳切希望广大教师、读者批评指正，使本书逐渐完善。

编　者

2011年5月

《工程力学》编著人员

主　编　戴葆青　张东焕

副主编　贺光宗　郭新柱　马长青　黄玉果

参　编　王衍国　田建国　李翠赟　闫承俊　董焕俊
代祥俊　韩长瑞　范东凯　史　萍　周　军
王　宏　张　伟　许兴明

主　审　刘桂斋

目　　录

第一篇　运动学

第二篇 动力学

第三篇 工程力学专题

第一篇　运动学

运动学是研究物体运动几何性质的科学。研究该部分内容时，暂不考虑影响物体运动的物理因素，而单独研究物体运动的几何性质(轨迹、运动方程、速度和加速度等)。

物体的运动是在一定的空间中发生的。相对论力学告诉我们，空间和时间又与物体的运动密切相关。本课程研究的运动学，只局限于经典力学的绝对空间、绝对时间的范围，即认为物体的运动速度远小于光速，空间和时间的变化不随物体的运动而改变，它们是各自独立的。运动是绝对的，但对运动的描述则是相对的。当描述一个物体的运动时，只有参照另一个物体才有意义，我们把这些参照物体称为参考体。为了确定物体随时间变化的空间位置，还需要在参考体上选取某一固结在其上的坐标系即参考系。在一般工程问题中，通常都以与地面固连的坐标系为参考系。

本篇将以点和刚体为力学模型，详细阐述点的运动的各种形式、点的合成运动以及刚体的基本运动和平面运动，描述物体机械运动的不同形式。

第 1 章　点的基本运动

本章主要研究点的运动，首先提出点的运动方程，再推导这些运动特征在矢径法、直角坐标法和自然法中的表示，建立起点的坐标、速度、加速度这三者之间的解析关系。

1.1　点的运动方程

点的运动，就其轨迹(动点在运动过程中所走的路线)而言，可分为点的直线运动和点的曲线运动。显然，点的直线运动可视为点的曲线运动的特殊情况。

研究点的运动首先要确定动点在参考系中某瞬时的位置，即确定动点的几何位置随时间变化的一一对应关系。用数学式表示这种关系称为点的运动方程。

动点对于不同的参考系，可写出不同形式的运动方程。有了运动方程，就能求出点的运动速度与加速度。工程上，常用矢径法、直角坐标法和自然法来确定点在空间的几何位置。

1. 矢径法

设动点 M 在 Oxy 坐标系中沿图 1-1 所示的曲线运动。可以选 O 为参考点，由 O 向 M 引矢径 $\boldsymbol{r}$，M 点运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 就像自 O 发出的探照灯光柱照射在飞机上一样，跟随 M 点一起运动。动点的位置可由矢径来表示：

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$$

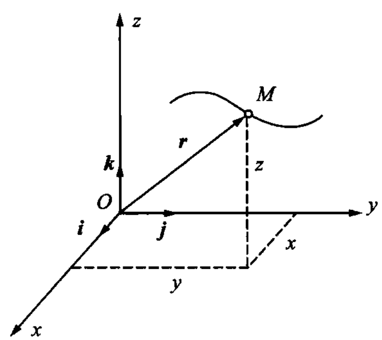

图 1-1

当动点运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小及其方向均随时间而改变，因而可表示为时间 t 的单值连续函数，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

这个方程完全确定了任一瞬时动点在空间的几何位置，称为以矢径表示动点的运动方程。矢径 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 变化时，矢端所描绘出的曲线为矢径 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线，它就是动点 M 的运动轨迹。

2. 直角坐标法

如图 1-1 所示，M 点在每一瞬时的空间位置也可用直角坐标 x,y,z 来决定。当点运动时，坐标 x,y,z 都是时间 t 的单值连续函数，记作

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

方程(1-2)是直角坐标形式点的运动方程。

式(1-2)实际上也是点的轨迹的参数方程，只要给定时间 t 的不同数值，即可依次得出点的坐标 x,y,z 的相应数值，根据这些数值就可以描出动点的轨迹。

如果需要求点的**轨迹方程**，只要将运动方程中的时间 t 消去即可。

当动点 M 始终在某一平面内运动时，此时点的轨迹为一平面曲线。若在这个平面内建立坐标系 Oxy，则运动方程(1-2)可简化为

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

从上式中消去时间 t，即得轨迹方程

$$F(x,y) = 0 \tag{1-4}$$

3. 自然法

若点的运动轨迹已知，如同火车被限制在铁轨上那样运动，则可用轨迹上的一段弧长 s 作为变量来决定点的位置，如图 1-2 所示。

这里所说的弧长 s 也是一种坐标，称为**弧坐标**。可在轨迹上任选一参考点 O'作为坐标原点；同时规定弧坐标 s 向某方向为正，另一方向为负，一般把点的运动方向作为其正向。当动点运动时，其弧坐标 s 随时间 t 而变化，可表示为时间 t 的单值连续函数，即

$$s = f(t) \tag{1-5}$$

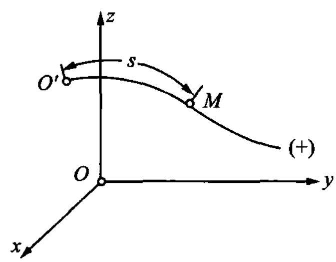

图 1-2

这个方程表示了动点沿已知轨迹的运动规律，称为动点沿已知轨迹的运动方程。当函数 $f(t)$已知时，任一瞬时动点在轨迹曲线上的位置就完全确定了。

综上所述：点的运动表示方法不同，可写出不同形式的运动方程。上述三种方法中，矢径法对理解概念、进行理论推导是十分有效的；而解决工程问题进行数值求解时，则多用直角坐标法与自然法。

除以上三种描述点的运动的基本方法外，为了使某些问题的求解更为简便，还可以采用其他方法，例如球坐标法、柱坐标法和极坐标法等。此处不再详述。

1.2 矢量法表示点的速度和加速度

1. 点的速度

当点做曲线运动时(见图 1-3),每一瞬时点的速度可用矢量表示,矢量的大小表示点沿轨迹运动的快慢,矢量的指向表示运动的方向。设瞬时 t,动点 M 的位置由矢径 $\boldsymbol{r}$ 所确定。经过时间间隔 Δt 后,动点位于 M',其位置由矢径 $\boldsymbol{r}'$所确定。矢径 $\boldsymbol{r}$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 称为动点 M 在时间间隔 Δt 内的位移。它是矢量,如图 1-3所示。位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 对于相应的时间间隔 Δt 的比值,称为动点 M 在时间间隔 Δt 内的平均速度。如以 $\boldsymbol{v}^*$ 表示平均速度,即

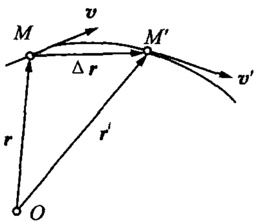

图 1-3

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

因为时间是标量,所以 $\boldsymbol{v}^*$ 的方向应与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同。令 Δt 趋近于零,这时 M' 点趋近于 M,而平均速度 $\boldsymbol{v}^*$ 趋近于一极限值,此极限值称为动点 M 在瞬时 t 的速度,以 $\boldsymbol{v}$ 表示速度,即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

由此可得结论:动点的速度等于它的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数。其方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向,即沿轨迹在该点的切线方向。

速度的单位是 m/s(米/秒),有时也用 km/h(千米/小时),cm/s(厘米/秒)等。

2. 点的加速度

在一般情况下,动点速度的大小和方向是随时间而变化的。设瞬时 t 动点位于 M 点,其速度为 $\boldsymbol{v}$,经过 Δt 时间后,动点位于 M'点,其速度为 $\boldsymbol{v}'$,将 $\boldsymbol{v}'$平行移到 M 点,连接矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的末端,可得动点的速度在 Δt 时间内的改变量 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$,如图 1-4 所示。$\Delta\boldsymbol{v}$ 与相应时间间隔 Δt 的比值,称为动点在 Δt 时间间隔内的平均加速度,以 $\boldsymbol{a}^*$ 表示。即

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

当 Δt 趋近于零时,即得动点在瞬时 t 的加速度,并以 $\boldsymbol{a}$ 表示,即

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-7}$$

所以,动点的加速度等于其速度对时间的一阶导数,或其矢径对时间的二阶导数。

为了确定加速度的方向,可在空间任取一点 O,将动点在各瞬时的连续速度都平移到 O 点,连接各速度矢的端点,可得一条曲线,称为**速度矢端曲线**,如图 1-5 所示。由于 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向为速度矢端曲线上割线 MM'的方向,而 Δt 又是标量,所以平均加速度的方向与弦 MM'平行;

当 Δt 趋近于零时，割线 MM' 便成了速度矢端曲线的切线。因此，动点加速度矢量的方向与速度矢端曲线在相应点的切线平行。

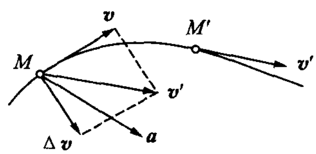

图 1-4

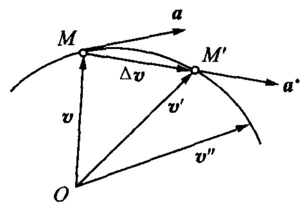

图 1-5

加速度的单位是 m/s^2（米/秒^2），有时也可以用 cm/s^2（厘米/秒^2）等。

1.3 直角坐标法求点的速度和加速度

1. 点的速度在直角坐标轴上的投影

动点 M 作空间曲线运动（见图 1-6），过固定点 O 作直角坐标系 $Oxyz$。设动点 M 在瞬时 t 的坐标为 x、y、z，其矢径为 $\boldsymbol{r}$，由图 1-6 可知，动点 M 的坐标就是矢径 $\boldsymbol{r}$ 在相应坐标轴上的投影。若以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示各相应坐标轴上的单位矢量，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 可写成为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

将式(1-8)代入式(1-6)，并注意单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为常量，可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

于是，速度 $\boldsymbol{v}$ 在直角坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

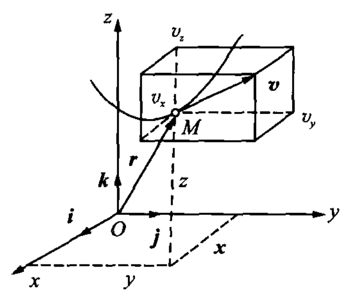

图 1-6

即动点的速度在直角坐标轴上的投影等于动点各相应的坐标对时间的一阶导数。由式(1-9)可确定速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向，其大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1-10}$$

其方向可由速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦来确定，即

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v} \tag{1-11}$$

2. 点的加速度在直角坐标轴上的投影

设速度$\boldsymbol{v}$在直角坐标轴上的投影为v_x, v_y, v_z则可写成下列形式

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

另一方面有
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

故加速度$\boldsymbol{a}$在直角坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}\\a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{y}\\a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{z}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

即动点的加速度在直角坐标轴上的投影等于动点各相应速度的投影对时间的一阶导数,或等于其相应坐标对时间的二阶导数。

由式(1-12)可确定加速度$\boldsymbol{a}$的大小和方向,它的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-13}$$

加速度$\boldsymbol{a}$的方向由它的方向余弦确定

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a},\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a},$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a} \tag{1-14}$$

例 1-1 椭圆规的曲柄OC可绕定轴O转动,其端点C与规尺AB的中点以铰链相连接,而规尺A,B两端分别在相互垂直的滑槽中运动,如图1-7所示。已知:$OC=AC=BC=l$,$MC=a$,$\varphi=\omega t$求规尺上点M的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

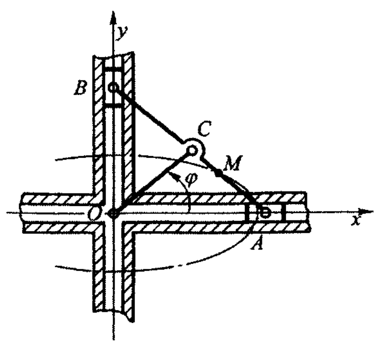

图 1-7

解:欲求点M的运动轨迹,可以先用直角坐标法给出它的运动方程,然后从运动方程中消去时间t后得到轨迹方程。为此,取坐标系Oxy如图1-7所示,点M的运动方程为

$$x=(OC+CM)\cos\varphi=(l+a)\cos\omega t$$
$$y=AM\sin\varphi=(l-a)\sin\omega t$$

消去时间t后得轨迹方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1$$

由此可见，点 M 的轨迹是一个椭圆，长轴与 x 轴重合，短轴与 y 轴重合。当点 M 在 BC 段上时，椭圆的长轴将与 y 轴重合。读者可自行推算。

为求点的速度，应将点的坐标对时间取一次导数，得

$$v_x=\dot{x}=-(l+a)\omega\sin\omega t \qquad v_y=\dot{y}=(l-a)\omega\cos\omega t$$

故点 M 的速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(l+a)^2\omega^2\sin^2\omega t+(l-a)^2\omega^2\cos^2\omega t}=$$
$$\omega\sqrt{l^2+a^2-2al\cos 2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(v,i)=\frac{v_x}{v}=\frac{-(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(v,j)=\frac{v_y}{v}=\frac{-(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos 2\omega t}}$$

为求点的加速度，应将点的坐标对时间取二次导数，得

$$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x}=-(l+a)\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y=\dot{v}_y=\ddot{y}=-(l-a)\omega^2\sin\omega t$$

故点 M 的加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(l+a)^2\omega^4\cos^2\omega t+(l-a)^2\omega^4\sin^2\omega t}=$$
$$\omega^2\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(a,i)=\frac{a_x}{a}=\frac{-(l+a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(a,j)=\frac{a_y}{a}=\frac{-(l-a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos 2\omega t}}$$

例 1-2　设点的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=8t-4t^2\\y&=6t-3t^2\end{aligned}\right\}$$

式中 x、y 单位为 m，t 的单位为 s。试求该点的轨迹、速度和加速度。

解：从运动方程中消去时间 t，得到轨迹方程

$$3x-4y=0$$

即

$$y=\frac{3}{4}x$$