



双博士系列

JINGJI SHUXUE JICHU JIAOCAI FUDAO
XIANXING DAISHU

经济数学基础教材辅导

线性代数

主编 北京大学数学科学学院 田勇
编写 双博士数学课题组

 科学技术文献出版社

0151.2-42

51/-2

经济数学基础教材

线性代数

主 编	北京大学数学科学学院 田 勇														
编 写	双博士数学课题组														
编写人员	胡东华	刘 茜	李菊川	刘 英	陈 丰	刘晓龙									
	熊国平	高永军	狄 懿	堃 伟	李 亮	刘立新									
	郭 娟	刘治国	杨 军	乔海玲	刘 津	刘大庆									
	汪 萍	胡星期	刘治佳	张 望	韩 彬	林娟娟									
	丁 晓	刘楣林	胡在斌	朱 傲	蔡贵娟	王绣英									
	李利娟	闵 伟	高 睿	李秀红	刘素枚	李 芹									
	韩 珍	周丽红	温 晴	包凌燕	钟崇光	韩 福									
	高 鑫	温桂荣	韩 琴	郭海权	史 进	温 军									
	王鸿发	郭洪杰	徐桂林	徐英杰	刘峥嵘	白春红									
	褚 峥	孙文涛	伍 鹏	刘 阳	杜 鹃	白春燕									
总 策 划	胡东华														



SEU 2202777

保存本

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

· 北京 ·



图书在版编目(CIP)数据

线性代数/田勇主编.-修订本.-北京:科学技术文献出版社,2008.11

(经济数学基础教材辅导)

ISBN 978-7-5023-3131-3

I. 线… II. 田… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 141114 号

出 版 者	科学技术文献出版社
地 址	北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编辑部电话	(010)51501739
图书发行部电话	(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮 购 部 电 话	(010)51501729
网 址	http://www.stdph.com
策 划 编 辑	科 文
责 任 编 辑	袁其兴 杜 娟
责 任 校 对	唐 炜
责 任 出 版	王杰馨
发 行 者	科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者	利森达印务有限公司
版 (印) 次	2008 年 11 月修订版 第 1 次印刷
开 本	850×1168 32 开
字 数	250 千
印 张	8.75
印 数	1~5000 册
定 价	15.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



前 言

双博士品牌高校数学辅导系列丛书,历年位居全国同类销量排行榜首,有居高不下的人气指数!线性代数作为财经类专业的核心课程之一,重要性毋庸置疑。本书作为线性代数教材辅导书,讲解细致独到,丰富了教材应试技巧及方法点拨,集课堂辅导与应试攻略于一体,是一本经济实惠版学生用书。适合本科生同步辅导及同等学历自考生参考使用,也可以作为考研辅导教材。

本书在去年版本的基础上做了精心修订,完善了章节内容,丰富了解题思想,使其结构更具系统性、科学性。

本书特色为:

知识要点总结:串讲概念、性质和定理,归纳记忆方法。

解题方法总结:精选各种经典题型,覆盖本章所有知识点,遵循数学最新教学大纲及数学考研大纲,力求有所创新,讲解细致犹如名师在侧。

考研真题解析:列出最新考研大纲,解析历年考研真题,并逐题分析解读,帮助大家理清且掌握考点。大多数人都做过大量的真题和典型例题,当然做到后来,就不必再中规中矩,只认题型想解法即可。

同步自测习题:本书的各章同步自测习题就是在同学们对各章内容有了全面了解之后,给同学们一个检测、巩固的机会,以对各种题型有个深刻的了解,从而下笔如有神。同时,也使同学们对各个知识点有更为深刻的理解,达到以此类推,互为贯通的效果。

温馨提示:

✱ “双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌,全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✱ 来自北京大学研究生会的感谢信摘要:双博士,您好!……,首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助!双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久被北大师生感怀和铭记!

北京大学研究生会

✱ 现在市场上有人冒用我们的书名,企图以假乱真,因此,读者在购买时,请认准双博士品牌。

编者

2008 年于北京大学

目 录

第一章 行列式	1
§ 1.1 n 阶行列式	1
§ 1.1.1 n 阶行列式的定义	1
§ 1.1.2 两个例子	2
§ 1.2 行列式的性质	5
§ 1.2.1 行列式的性质	5
§ 1.2.2 应用行列式的性质计算行列式	8
§ 1.3 行列式按行(列)展开	11
§ 1.3.1 余子式和代数余子式	11
§ 1.3.2 行列式按一行(列)展开	12
§ 1.3.3 行列式按多行(列)展开的拉普拉斯(Laplace)定理	13
§ 1.4 行列式的计算	14
§ 1.4.1 行列式计算的基本思想	14
§ 1.4.2 行列式的计算方法	14
§ 1.4.3 其他题型举例	31
§ 1.5 考研真题评点	33
§ 1.5.1 考试大纲要求	33
§ 1.5.2 真题集锦	33

§ 1.6 同步自测题	34
§ 1.7 同步自测题参考答案	38
第二章 矩阵	44
§ 2.1 矩阵的定义	44
§ 2.1.1 矩阵的定义	44
§ 2.1.2 几种特殊的矩阵	44
§ 2.2 矩阵的运算	47
§ 2.2.1 矩阵的线性运算	47
§ 2.2.2 矩阵的乘法	48
§ 2.2.3 矩阵的转置	52
§ 2.2.4 方阵的行列式	53
§ 2.3 分块矩阵及其运算	54
§ 2.3.1 矩阵的分块	54
§ 2.3.2 分块矩阵的运算	55
§ 2.3.3 分块矩阵的行列式	58
§ 2.4 矩阵的逆	58
§ 2.4.1 矩阵的逆	58
§ 2.4.2 矩阵可逆的充要条件	60
§ 2.4.3 伴随矩阵	60
§ 2.4.4 矩阵的初等变换及初等矩阵	63
§ 2.4.5 分块矩阵的逆矩阵	71
§ 2.5 解题方法评析	72
§ 2.5.1 矩阵运算	73
§ 2.5.2 逆矩阵的问题	83
§ 2.5.3 关于伴随矩阵的问题	90
§ 2.5.4 其他问题举例	94
§ 2.6 考研真题评点	95

§ 2.6.1	考试大纲要求	95
§ 2.6.2	考题集锦	96
§ 2.7	同步自测题	99
§ 2.8	同步自测题参考答案	102
第三章	线性方程组	109
§ 3.1	消元法解线性方程组	109
§ 3.1.1	线性方程组的矩阵表示	109
§ 3.1.2	消元法	111
§ 3.1.3	线性方程组的解的情况	114
§ 3.2	n 维向量	120
§ 3.2.1	向量及其运算	120
§ 3.2.2	线性表出	121
§ 3.2.3	线性相关与线性无关	123
§ 3.2.4	向量组的秩	125
§ 3.2.5	矩阵的秩	127
§ 3.2.6	n 维向量的正交	130
§ 3.3	线性方程组解的一般理论	132
§ 3.3.1	线性议程组有解的判定定理	132
§ 3.3.2	线性方程组解的结构	133
§ 3.4	解题方法评析	136
§ 3.4.1	问题简介	136
§ 3.4.2	有关向量的问题	136
§ 3.4.3	线性方程组	143
§ 3.4.4	有关向量组与矩阵的秩的问题	152
§ 3.5	考研真题评点	157
§ 3.5.1	考试大纲要求	157
§ 3.5.2	真题集锦	157

§ 3.6	同步自测题	174
§ 3.7	同步自测题	180
第四章	矩阵的特征值和特征向量	184
§ 4.1	矩阵的特征值和特征向量	184
§ 4.1.1	矩阵的特征值和特征向量	184
§ 4.1.2	特征值和特征向量的计算	185
§ 4.1.3	特征值和特征向量的性质	188
§ 4.2	相似矩阵和矩阵可对角化条件	188
§ 4.2.1	相似矩阵	188
§ 4.2.2	相似矩阵的性质	189
§ 4.2.3	n 阶矩阵 A 可对角化的条件	191
§ 4.3	实对称矩阵的对角化	195
§ 4.3.1	实对称矩阵的特征值和特征向量	195
§ 4.3.2	n 阶实对称阵的对角化	197
§ 4.4	解题方法评析	201
§ 4.4.1	矩阵的特征值和特征向量的计算	201
§ 4.4.2	矩阵的对角化	211
§ 4.5	考研真题评点	221
§ 4.5.1	考试大纲要求	221
§ 4.5.2	考题集锦	221
§ 4.6	同步自测题	229
§ 4.7	同步自测题参考答案	232
第五章	二次型	237
§ 5.1	二次型及其矩阵表示	237
§ 5.1.1	二次型及其矩阵表示	237
§ 5.1.2	线性替换	238
§ 5.1.3	矩阵合同	238

§ 5.2 二次型的标准型和规范型	240
§ 5.2.1 二次型的标准型和规范型	240
§ 5.2.2 用配方法或正交替换法将二次型化为标准型	240
§ 5.3 正定二次型和正定矩阵	243
§ 5.3.1 正定二次型和正定矩阵	243
§ 5.3.2 正定矩阵的判定	244
§ 5.3.3 正定矩阵的性质	245
§ 5.4 解题方法评析	246
§ 5.4.1 用配方法或正交变换把二次型化为标准型	246
§ 5.4.2 判定二次型或矩阵的正定性	255
§ 5.4.3 其它题型选讲	259
§ 5.5 考研真题评点	261
§ 5.5.1 考试大纲要求	261
§ 5.5.2 考题集锦	261
§ 5.6 同步自测题	265
§ 5.7 同步自测题参考答案	266

第一章 行列式

§ 1.1 n 阶行列式

§ 1.1.1 n 阶行列式的定义

(一) 排列

定义 1.1 (排列) 由 n 个不同的自然数组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列. 大多数情形下, 我们考虑的是前 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 的 n 阶排列 $j_1, j_2, \dots, j_n$.

注 1 n 阶排列总共有 $n!$ 个.

注 2 在一个 n 阶排列 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 中, 如果一个较大的数 j_k 排在一个较小的数 j_l 前面, 即 $k < l$ 而 $j_k > j_l$, 则称这对数 (j_k, j_l) 构成一个逆序.

注 3 一个 n 阶排列中逆序的总数称为这个 n 阶排列的逆序数, 记作 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

(二) n 阶行列式

定义 1.2 (矩阵) 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排列的 m 行 n 列的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

称为一个 $m \times n$ 阶矩阵, 通常记作 $A_{m \times n} = (a_{ij})$.

特别地, 如果 $m = n$, 则称 $A_{n \times n}$ 为 n 阶方阵. 为了记号上的方便, 我们通常省略掉矩阵的下标, 记为 A .

我们称 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) 为矩阵 A 的元素, 表 (1,1) 中的行 (列) 称为矩阵 A 的行 (列).

定义 1.3 (行列式) n 阶行列式定义为 n 阶方阵 A 中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数之和; 其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 当 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是奇排列时, 乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前取负号. 当 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是偶排列时, 乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前取正号. 记为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.2)$$

这里, $\sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)}$ 表示对所有 n 阶排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 求和.

注 由于 n 阶排列共有 $n!$ 个, 所以 n 阶行列式的求和项共有 $n!$ 项而且显然带正号和带负号的项各半.

§ 1.1.2 两个例子

我们先给出两个概念, 方阵或行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线, 主对角线上的元素 a_{ii} 称为其主对角线元素. 相应地, 从右上角到左下角的对角线称为次对角线, 其上的元素称为次对角线元素.

例 1.1 一, 二, 三阶行列式

当 $n = 1$ 时, $A_1 = (a_{11})$, 由行列式的定义有 $|A_1| = a_{11}$.

当 $n = 2$ 时

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

由于 $2! = 2 \times 1 = 2$, 所以从不同行不同列中取出 2 个元素组成的乘积项只有两项: $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$; 而且容易计算出 $\tau(12) = 0, \tau(21) = 1$, 于是

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即二阶行列式等于主对角线上元素的乘积和次对角线上元素乘积的差.

当 $n = 3$ 时

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, 所以从不同行不同列中取出 3 个元素组成的乘积项有 6 项:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{11}a_{23}a_{32}, a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}, a_{13}a_{22}a_{31}$$

而且容易计算出

$$\tau(123) = 0, \tau(132) = \tau(213) = 1, \tau(231) = \tau(312) = 2, \tau(321) = 3 \text{ 于是}$$

$$|A_3| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

注 我们按照行列式的定义计算出了一, 二, 三阶行列式, 它们是一般行列式计算的基础.

事实上, 即使对于三阶行列式, 上面的公式也不容易记住; 我们更多的是利用后面章节中介绍的方法和技巧来计算. 这里需要记住的是二阶行列式的计算公式.

例 1.2 三角行列式

称行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

为上三角行列式.

下面我们按照行列式的定义来计算上三角行列式.

注意到乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中若有一个元素是零, 那么该项即为零, 求和时可以不考虑. 所以我们只考虑 a_{kj_k} ($1 \leq k \leq n$) 都不是零的情况, 而这当且仅当 $j_k = k$ ($1 \leq k \leq n$). 所以

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \end{aligned} \quad (1.4)$$

即上三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

与之类似, 我们可以求出下三角行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

以及两种倒三角行列式

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} a_{n-12} \cdots a_{1n} \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} a_{n-12} \cdots a_{2n-1} a_{1n} \end{aligned}$$

注 上列特殊行列式的结果, 尤其是(1.4), 它是一般行列式计算的重要工具, 我们将在后面的章节中看到其应用.

练习 1.1 利用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n
 \end{vmatrix}$$

§ 1.2 行列式的性质

§ 1.2.1 行列式的性质

1. 将行列式的行列互换, 行列式值不变, 即有

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\
 a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 \quad (1.5)$$

注 1 设 $m \times n$ 矩阵 A 如 (1.1) 所示, 则称 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\
 a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}
 \end{pmatrix}$$

为 A 的转置, 记作 A^T . 这样, (1.5) 可用矩阵的形式表述为 $|A^T| = |A|$. $|A^T|$ 也称为 $|A|$ 的转置行列式.

注 2 (1.5) 表明行列式中行和列的地位是对称的. 也就是说, 对于行成立的行列式的性质, 对于列也一定成立. 故下文中我们通常用行(列)来统一表示.

2. 行列式的某一行(列)的所有元素都乘以某一常数 k 所得行列式, 等于 k 乘以此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

注1 注意区分下面的重要情形.

设 A 是 n 阶方阵, k 是常数, kA 表示数与矩阵相乘(我们将在第二章介绍这一概念), 此时有

$$|kA| = k^n |A|$$

注2 由(1.6)易知, 行列式一行(列)所有元素的公因子可以提取到行列式的外面; 特别地, 如果行列式某一行(列)所有元素都是零, 那么该行列式值为零.

3. 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和, 则此行列式等于两个行列式的和, 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一, 其余各行列的元素与原行列式相同, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

注1 后文将要介绍行列式的计算中的一个重要技巧: 拆项. 这条性质是其理论基础.

注2 由(1.6)和(1.7)容易得到

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 k_1 b_{i1} + k_2 c_{i1} & k_1 b_{i2} + k_2 c_{i2} & \cdots & k_1 b_{in} + k_2 c_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = k_1 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 + k_2 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

4. 互换行列式的两行(列), 行列式的值反号, 即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = - \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

注1 如果方阵 A 有两行(列) 完全相同, 那么 $|A| = 0$.

交换 $|A|$ 相同的两行(列), 由(1.8) 有 $|A| = -|A|$, 于是 $|A| = 0$.

注2 由上述注解和(1.6) 易知, 如果行列式有两行(列) 的对应元素成比例, 那么此行列式的值为零.

5. 把行列式的某一行(列) 的所有元素都乘以数 k , 再添加到另一行(列) 上去, 行列式的值不变. 即若