JINGJI SHUXUE JICHU JIAOCAI FUDAO
XIANXING DAISHU

双博士系列

经济数学基础教材辅导

线性代数

主编 北京大学数学科学学院 田勇
编写 双博士数学课题组

科学技术文献出版社

经济数学基础教材辅

线性代数

主　　编　北京大学数学科学学院　田　勇
编　　写　双博士数学课题组
编写人员　胡东华　刘　茜　李菊川　刘　英　陈　丰　刘晓龙
熊国平　高永军　狄　懿　垄　伟　李　亮　刘立新
郭　娟　刘治国　杨　军　乔海玲　刘　津　刘大庆
汪　萍　胡星期　刘治佳　张　望　韩　彬　林娟娟
丁　晓　刘楣林　胡在斌　朱　傲　蔡贵娟　王绣英
李利娟　闵　伟　高　睿　李秀红　刘素枚　李　芹
韩　珍　周丽红　温　晴　包凌燕　钟崇光　韩　福
高　鑫　温桂荣　韩　琴　郭海权　史　进　温　军
王鸿发　郭洪杰　徐桂株　徐英杰　刘峥嵘　白春红
褚　峥　孙文涛　伍　鹏　刘　阳　杜　鹃　白春燕
总 策 划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
·北京·

图书在版编目(CIP)数据
线性代数/田勇主编. -修订本. -北京:科学技术文献出版社,2008.11
(经济数学基础教材辅导)
ISBN 978-7-5023-3131-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 田…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 141114 号

出　版　者　科学技术文献出版社
地　　址　北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话　(010)51501739
图书发行部电话　(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮购部电话　(010)51501729
网　　址　http://www.stdph.com
策划编辑　科　文
责任编辑　袁其兴　杜　娟
责任校对　唐　炜
责任出版　王杰馨
发　行　者　科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者　利森达印务有限公司
版(印)次　2008 年 11 月修订版　第 1 次印刷
开　　本　850×1168　32 开
字　　数　250 千
印　　张　8.75
印　　数　1～5000 册
定　　价　15.00 元

前 言

双博士品牌高校数学辅导系列丛书，历年位居全国同类销量排行榜榜首，有居高不下的人气指数！线性代数作为财经类专业的核心课程之一，重要性毋容置疑。本书作为线性代数教材辅导书，讲解细致独到，丰富了教材应试技巧及方法点拨，集课堂辅导与应试攻略于一体，是一本经济实惠版学生用书。适合本科生同步辅导及同等学历自考生参考使用，也可以作为考研辅导教材。

本书在去年版本的基础上做了精心修订，完善了章节内容，丰富了解题思想，使其结构更具系统性、科学性。

本书特色为：

知识要点总结：串讲概念、性质和定理，归纳记忆方法。

解题方法总结：精选各种经典题型，覆盖本章所有知识点，遵循数学最新教学大纲及数学考研大纲，力求有所创新，讲解细致犹如名师在侧。

考研真题解析：列出最新考研大纲，解析历年考研真题，并逐题分析解读，帮助大家理清且掌握考点。大多数人都做过大量的真题和典型例题，当然做到后来，就不必再中规中矩，只认题型想解法即可。

同步自测习题：本书的各章同步自测习题就是在同学们对各章内容有了全面了解之后，给同学们一个检测、巩固的机会，以对各种题型有个深刻的了解，从而下笔如有神。同时，也使同学们对各个知识点有更为深刻的理解，达到以此类推，互为贯通的效果。

温馨提示：

✽“双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌，全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✽ 来自北京大学研究生会的感谢信摘要：双博士，您好！……，首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助！双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久被北大师生感怀和铭记！

北京大学研究生会

✽ 现在市场上有人冒用我们的书名，企图以假乱真，因此，读者在购买时，请认准双博士品牌。

编者

2008 年于北京大学

目 录

第一章　行列式

§1.1　n 阶行列式

§1.1.1　n 阶行列式的定义

（一）排列

定义　1.1（排列）　由 n 个不同的自然数组成的一个有序数组称为一个 n **阶排列**. 大多数情形下，我们考虑的是前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 阶排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$.

注 1　n 阶排列总共有 $n!$ 个.

注 2　在一个 n 阶排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 中，如果一个较大的数 j_k. 排在一个较小的数 j_l 前面，即 $k<l$ 而 $j_k>j_l$，则称这对数 (j_k,j_l) 构成一个**逆序**.

注 3　一个 n 阶排列中逆序的总数称为这个 n 阶排列的**逆序数**，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

（二）n 阶行列式

定义 1.2（矩阵）　由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排列的 m 行 n 列的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为一个 $m\times n$ 阶**矩阵**，通常记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})$.

特别地，如果 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 为 n **阶方阵**. 为了记号上的方便，我们通常省略掉矩阵的下标，记为 $\boldsymbol{A}$.

我们称 $a_{ij}(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，表(1,1) 中的行(列) 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列).

定义 1.3(**行列式**) n **阶行列式**定义为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和；其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是奇排列时，乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取负号. 当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是偶排列时，乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取正号. 记为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.2)$$

这里，$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 阶排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 求和.

注　由于 n 阶排列共有 $n!$ 个，所以 n 阶行列式的求和项共有 $n!$ 项而且显然带正号和带负号的项各半.

§1.1.2　两个例子

我们先给出两个概念，方阵或行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素 a_{ii} 称为其主对角线元素. 相应地，从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**，其上的元素称为次对角线元素.

例 1.1　一，二，三阶行列式

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}_1=(a_{11})$，由行列式的定义有 $|\boldsymbol{A}_1|=a_{11}$.

当 $n=2$ 时

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

由于 $2!=2\times1=2$，所以从不同行不同列中取出 2 个元素组成的乘积项只有两项：$a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$；而且容易计算出 $\tau(12)=0,\tau(21)=1$，于是

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即二阶行列式等于主对角线上元素的乘积和次对角线上元素乘积的差.

当 $n = 3$ 时

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$,所以从不同行不同列中取出 3 个元素组成的乘积项有 6 项:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{11}a_{23}a_{32}, a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}, a_{13}a_{22}a_{31}$$

而且容易计算出

$\tau(123) = 0, \tau(132) = \tau(213) = 1, \tau(231) = \tau(312) = 2, \tau(321) = 3$ 于是

$$\begin{aligned} |A_3| = \ & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

注 我们按照行列式的定义计算出了一,二,三阶行列式,它们是一般行列式计算的基础.

事实上,即使对于三阶行列式,上面的公式也不容易记住;我们通常更多的是利用后面章节中介绍的方法和技巧来计算. 这里需要记住的是二阶行列式的计算公式.

例 1.2 三角行列式

称行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

为**上三角行列式**.

下面我们按照行列式的定义来计算上三角行列式.

注意到乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中若有一个元素是零,那么该项即为零,求和时可以不考虑. 所以我们只考虑 $a_{kj_k}(1 \leqslant k \leqslant n)$ 都不是零的情况,而这当且仅当 $j_k = k(1 \leqslant k \leqslant n)$. 所以

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \end{aligned} \tag{1.4}$$

即上三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

与之类似,我们可以求出**下三角行列式**

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

以及两种**倒三角行列式**

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}a_{n1}a_{n-12}\cdots a_{1n}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}a_{n1}a_{n-12}\cdots a_{2n-1}a_{1n}$$

注 上列特殊行列式的结果,尤其是(1.4),它是一般行列式计算的重要工具,我们将在后面的章节中看到其应用.

练习 1.1 利用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

§1.2 行列式的性质

§1.2.1 行列式的性质

1. 将行列式的行列互换,行列式值不变,即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

注 1 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如(1.1) 所示,则称 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**,记作 A^T. 这样,(1.5) 可用矩阵的形式表述为 $|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$. $|\boldsymbol{A}^T|$ 也称为 $|\boldsymbol{A}|$ 的转置行列式.

注 2 (1.5) 表明行列式中行和列的地位是对称的. 也就是说,对于行成立的行列式的性质,对于列也一定成立. 故下文中我们通常用行(列) 来统一表示.

2. 行列式的某一行(列) 的所有元素都乘以某一常数 k 所得行列式,等于 k 乘以此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

注 1　注意区分下面的重要情形.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,k 是常数,$k\boldsymbol{A}$ 表示数与矩阵相乘(我们将在第二章介绍这一概念),此时有

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}|$$

注 2　由(1.6)易知,行列式一行(列)所有元素的公因子可以提取到行列式的外面;特别地,如果行列式某一行(列)所有元素都是零,那么该行列式值为零.

3. 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行列的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

注 1　后文将要介绍行列式的计算中的一个重要技巧:拆项. 这条性质是其理论基础.

注 2　由(1.6)和(1.7)容易得到

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
k_1 b_{i1} + k_2 c_{i1} & k_1 b_{i2} + k_2 c_{i2} & \cdots & k_1 b_{in} + k_2 c_{in} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= k_1 \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ k_2 \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

4. 互换行列式的两行(列),行列式的值反号,即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{1.8}
$$

注 1 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行(列)完全相同,那么 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 交换 $|\boldsymbol{A}|$ 相同的两行(列),由(1.8)有 $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$,于是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

注 2 由上述注解和(1.6)易知,如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,那么此行列式的值为零.

5. 把行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k,再加到另一行(列)上去,行列式的值不变. 即若