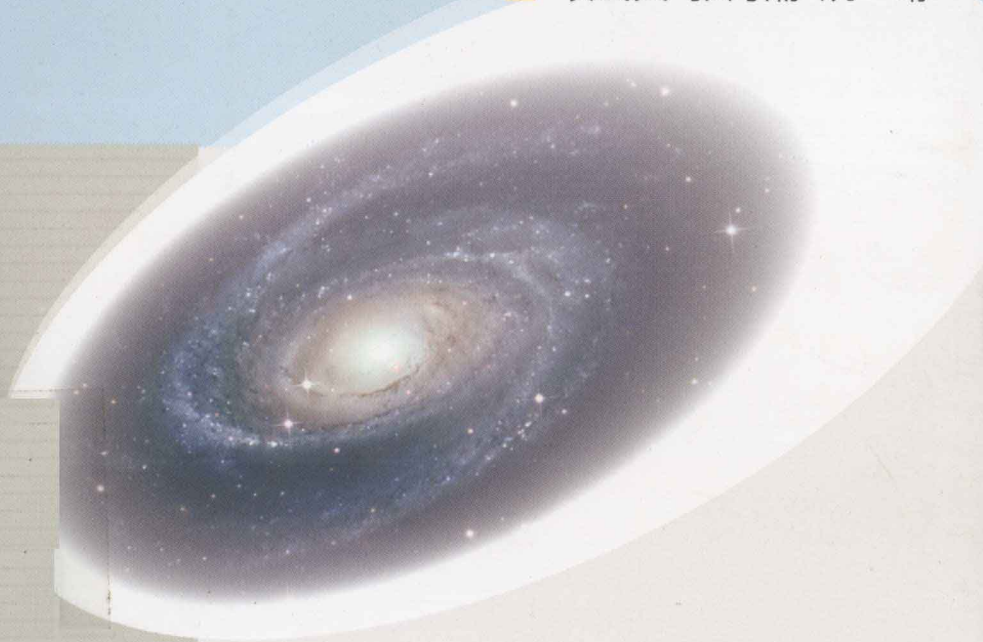


千古之谜与 几何天文物理两千年

——纪念开普勒《新天文学》问世四百周年

■ 项武义 张海潮 姚 珩



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

千古之谜
几何天文物理两千年
——纪念开普勒《新天文学》
问世四百周年

Qiangu zhi Mi yu Jihe Tianwen
Wuli Liangqian Nian
——Jinian Kepler *Xin Tianwenxue*
Wenshi Sibai Zhounian

项武义 张海潮 · 姚 珩



高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

千古之谜与几何天文物理两千年: 纪念开普勒《新天文学》问世四百周年/ (美) 项武义, 张海潮, 姚珩编.
—北京: 高等教育出版社, 2010. 2

ISBN 978-7-04-014419-2

I. ①千… II. ①项…②张…③姚… III. ①天文
学史—世界—通俗读物 IV. ①P1-091

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 001451 号

策划编辑 王 瑜 责任编辑 张海雁 封面设计 王凌波
责任绘图 尹文军 版式设计 王 莹 责任校对 殷 然
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京东君印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2010年2月第1版
印 张	5.375	印 次	2010年2月第1次印刷
字 数	130 000	定 价	12.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 14419-00

内 容 简 介

本书以通俗浅显的语言,介绍了从古希腊时代到牛顿时代关于天文学变革的历史,特别突出了开普勒关于行星运行理论的功绩。本书作者试图用初等数学推导再现,开普勒当年如何从第谷等前辈积累下来的浩瀚的天文观察数据中,获得行星运行三大定律的研究过程,同时又解释了牛顿如何从开普勒三大定律导出万有引力定律。

作为通俗的科学知识和科学历史的普及读物,本书对于大学理工科类学生以及学有余力的高中生,了解西方文明和理性思维的发展过程很有裨益,对读者养成理性思维的习惯、学习追求真理的精神有一定的启发作用。

前言

纵观理性文明从公元前 5 世纪到 17 世纪 2 000 多年的发展史,其中几何学、天文学和物理学三者紧密相联,而且扮演着其中的主角与主轴。在诸多古文明中,如中国、埃及、巴比伦、希腊、玛雅等,天文、星象一直是令人神往、发人深思者;而且也都注意到天际有五颗与众不同、奇特独行的星体,即金、木、水、火、土五大行星。它们漫游于黄道十二宫,其行踪独特,令人难解其怪。因此这也就自然成为古天文学之中心课题:众说纷纭,百思不得其解的“千古之谜”(参看第二章)。此事一直到整整 400 年前之 1609 年开普勒行星运行定律之发现才得以真相大白。可以说,上述千古之谜乃是贯穿几何学、天文学与物理学这 2 000 年研究的核心议题。

自古以来,量天、理解天象一直是研究几何学的主要原动力和向往的崇高目标。古希腊几何学家们,体认到量天在精准上的极高要求,因而这促使他们在定量几何基础论上力求严格、明确:首先他们在长度的度量上提出“可公度性”,但是在其初论中“误判”可公度性是普遍成立的并以此为其头号公设。此事一直到希伯萨斯发现不可公度性之存在才迷途知返;其后希腊几何学界经历了大半世纪的危机、挑战与“炼狱”,才由欧多克斯创逼近论而得以重建其几何基础论,此乃是理性文明史上第一个伟大的基石与里程碑(参看第一章)。如今回顾反思,我们可以认识到几何学是由于天文学的需求而立论严谨,虽经挫折,但终能浴火重建,脱胎换骨,为理性文明奠定了极为基本、重要之几何与分析基础论。

古希腊的几何学大师,如欧多克斯、阿波罗尼斯,也都以“量天”为其志趣;而天文学大师如阿利斯塔克、希帕克斯和托勒密,

也都精通几何学(其实,他们可以说都是两栖、双修的几何学、天文学大师)。古希腊文明在天文学上世代相承的成果在托勒密的《至大论》中集其大成。大体上《至大论》乃是一种纯几何的试图对于行星、太阳、月亮的“视运动”作一系统描述,而当年所采用者乃是“地心”体系而不是“日心”体系。如今反思,此事实乃误入歧途。试问当年为什么会误入歧途呢?而且还会在这件事上有长达千年的迷途“不”知返呢?此事着实令人费解!其实,远在公元前3世纪,阿利斯塔克即已提出“日心”之主张,但是因为“日心”说和当时的“物理观”全然相悖而被弃置,一直被冷冻到16世纪才由哥白尼给以“文艺复兴”。大致上,上述迷途千年难返的原因大概可以归结到下述两点:其一是长期以来奉为经典的亚里士多德物理学论述,其实它乃是一种形而上的似是而非之论;其二是托勒密体系对于行星的“视运动”基本上具有相当不错的可预测性[一般约在 $10'$,亦即 $(1/6)^\circ$ 左右]。这种将错就错,还能把相当复杂的周期平面“视运动”用均轮、本轮、小本轮(亦即多个等速圆周运动之妥加组合)描述得差不离,相当程度地反映着希腊几何天文学家世代相承地钻研行星“视运动”上,用力之深和高度的几何技巧。

但是这种本质上和事实极为不符的“地心”体系,业已到了愈来愈繁复、左支右绌、难以为继的状况。使得有识之天文学家们觉得有改弦更张之必要。及至文艺复兴后期,幸有哥白尼、第谷和开普勒三位天文学大师,各尽其毕生之力完成了天文学巨棒的“三接力”。迷途知返,千古之谜得以真相大白;几何学量天之梦想终于在开普勒的超人奋斗下得以圆满达成。400年前是整个理性文明史上无比辉煌的时刻。开普勒行星运行三大定律是理性文明中第二个光芒万丈的里程碑,它不但全面革新了天文学,也使得物理学迷途知返,全面更新。由开普勒定律,伽利略的重力实验,笛卡儿的解析几何与惯性定律,一直到牛顿的万有引力定律的发现,可以说是水到渠成,顺理成章。由开普勒的新天文学到牛顿的新物

理学,起承转合进展之神速,比之于两千年的进化历程,简直可以说是一气呵成!牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》则是理性文明中第三个伟大的里程碑。

千古之谜在几何、天文、物理长达2 000年的发展史中,贯穿全局。其间引人入胜、发人深思、富有启发的思想、方法和重大突破比比皆是。我们试写这本小册子,概述其要并且试着让读者能身历其境,重访某些重大突破的精要所在。师法先贤,高山仰止、心向往之。希望此书能有助于有智、有志之青年能够踏着巨人的脚印,迈步奋进,投身于理性文明之世代相承,承先启后,继往开来之长河。

目 录

第一章 古希腊几何基础论之浴火重生与连续世界的认知	1
1. 中西定量平面几何之比较分析与希腊几何基础初论	1
2. 希帕克斯的伟大发现——不可公度比的存在	5
3. 欧多克斯之逼近论——几何基础论之震后重建	6
4. 连续性与连续世界的认知	9
第二章 天文学的发生与内容	15
1. 天文崇拜及神秘性	15
2. 第一个天体模型——欧多克斯的同心球	19
3. 阿利斯塔克对地心说之质疑	23
4. 阿波罗尼斯的本轮-均轮、偏心圆与椭圆	28
5. 古典天文学的奠基者——希帕克斯	34
6. 集古代天文学大成的行星理论——托勒密系统	38
第三章 科学革命的序曲	41
1. 目的论之宇宙观和文艺复兴	41
2. 新柏拉图主义——数学与实体	45
3. 哥白尼日心说之特质——简单性	46
4. 行星逆行与日心系统之和谐性	53
5. 精致与完善的天文观测者——第谷	60
6. 对圆的迷思与太阳角色的不定性	64
第四章 开普勒三定律之探索与发现	66
1. 启蒙与时代背景	66
2. 概述行星运行三定律的探索历程	72
3. 地球绕日运行的面积律:迈向新天文学的 基础性重大突破	75

4. 千古之谜,真相大白——又见椭圆	79
第五章 重访行星三定律的探索历程——师法其意、改弦更张、 身历其境	85
1. 重访之一:发现地球面积律的简洁途径	86
2. 重访之二:发现地球椭圆律的简洁途径	89
3. 重访之三:水到渠成,顺理成章——行星运行三定律 ..	92
4. 回顾、演练与展望	101
第六章 天地一体的万有引力定律	109
1. 划时代《原理》一书之定义定律与核心内涵	109
2. 月亮、苹果及抛体运动	113
3. 微积分、几何和运动学的三连星	120
4. 伽利略、笛卡儿与开普勒	122
5. 面积律等同向心力——《原理》的首要命题	132
6. 《原理》中的直接问题与逆问题	136
第七章 《原理》重要命题的阐述与特质	141
1. 圆周运动的速度向量和面积律的数理分析	141
2. 从面积律和椭圆律到平方反比力律—— 直接问题	144
3. 平方反比力至椭圆律或圆锥曲线轨道—— 逆问题	146
4. 球体的吸引力与积分之艺术	148
结束语	154
参考文献	159
感谢	162

第一章

古希腊几何基础论之浴火重生与连续世界的认知

1. 中西定量平面几何之比较分析与希腊几何基础初论

几何学 (geometry) 乃是理性文明对于大自然所在的空间 (space) 的认识论。宇宙中的所有事物、现象皆存在于其中, 发生于其内, 当然也永远受着空间本质的孕育与制约。几何学的课题也就是去研讨、理解空间的本质, 是理性文明 (civilization of rational mind) 的基础所在, 也是先行者, 可以说是理所当然的第一科学。概括地说, 空间的重要本质可以总结为下述三点, 即

对称性: 空间对于任何给定平面之反射对称性。

平直性: 三角形之内角和恒为一平角 (等价于平行性)。

连续性: 直线是连续不断的, 但是一剪就断 (亦即略去其中一点, 则直线分隔成不相连的两段)。

(1) 中国古算中的测量术

几何学研究的自然进程是先研究平面几何, 进而再研究立体几何; 而平面几何之研讨则是先由定性层面起始, 再推进到定量层面。本节将先简述中国古算中的定量平面几何之精要和古希腊的定量平面几何基础初论, 并作简短之比较分析。

大体上来说, 中国古算中善用面积公式, 乃是以“长方形面积等于长 $\times$ 宽, 直角三角形面积等于 $1/2 \times$ 底 $\times$ 高”为基点, 简洁地推导当年测量术之两个基本公式, 即勾股弦公式和出入相补公式, 其证法如下:

(i) 勾股弦公式: 勾方 + 股方 = 弦方 (图 1-1)

如图 1-2 所示, 一个长、宽皆为 $a + b$ 的正方形, 可以用两种分割, 即得

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

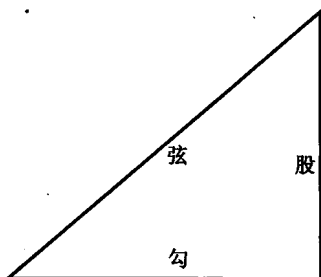


图 1-1 直角三角形的三边

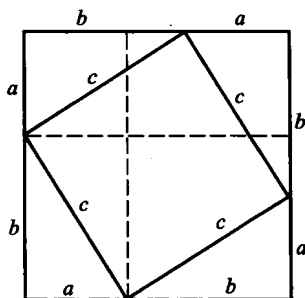


图 1-2 正方形的分割方法

(ii) 出入相补: 如图 1-3 所示, 出入相补原理很可能是下述想到实例者: 其中 $(h + h')$ 是欲测的树高, $(b + b')$ 和 h' 是可测之影长和标杆高。为了便于善用面积公式, 配以其虚线部分。

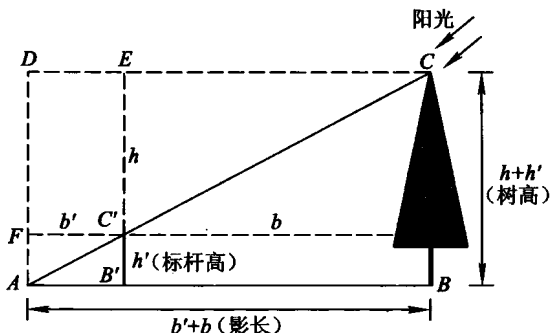


图 1-3 影长和标杆高关系

如此易见

$$\begin{aligned}
b \cdot h' &= S_{\square B'BCC'} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AB'C'} - S_{\triangle C'GC} \\
&= S_{\triangle ADC} - S_{\triangle AFC'} - S_{\triangle C'EC} = S_{\square FC'ED} = b' \cdot h \\
\Rightarrow \frac{b}{b'} &= \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'}
\end{aligned}$$

即得相似直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的对应直角边之边长比例式。由它再加上勾股弦公式就可以推导 $\overline{AC}:\overline{AC'}$ 也等于上述比值。再者,两个一般的相似三角形,总是可以用其垂线分割成两对相似直角三角形之组合。由此可见上述两者和面积公式业已构成一组完备的平面测量之基础。接着让我们再来介绍古希腊的定量平面几何基础初论。

(2) 定量平面几何基础初论(公元前 5、6 世纪)

话说当年,量天和理解天象,一直是古希腊几何学家们的原动力和向往的崇高目标。他们有鉴于量天对于精准之极高要求,在研究定量平面几何之基础理论时,于长度的度量这个基本概念的定义上,力求严格,一丝不苟。提出了可公度性(commensurability)这个纯理论的概念,亦即两个线段 a, b 都是另一长度 c 的正整数倍,即有 $a = m \cdot c, b = n \cdot c$, 则定义其比值 $a:b = m:n$ 。但是当年“误认”可公度性是普遍成立者(universality of commensurability),而且以此“误判”为其定量几何基础论(foundation of quantitative geometry)之“头号公理”(first axiom),进而对于定量几何的基本公式如矩形、三角形面积公式,勾股定理(亦即勾股弦公式)和相似三角形的边长比例式等逐一加以严格论证。主要是用平行分割,如图 1-4 所示之矩形面积公式之证明:

设矩形的长和宽分别是 l 和 w , 而 u 则是取定的单位长。由可公度普遍成立的“公设”即分别有 $\{l, u\}$ 和 $\{w, u\}$ 之公尺度 c 和 c' , 使得

$$l = m \cdot c, u = n \cdot c; \quad w = p \cdot c', u = q \cdot c'$$

如图 1-4 所示, $\square(l, w)$ 和 $\square(u, u)$ 分别可以平行分割为 $m \cdot p$ 和 $n \cdot q$ 个 $\square(c, c')$ 。由此可见

$$S_{\square(l, w)} = m \cdot p S_{\square(c, c')}, S_{\square(u, u)} = n \cdot q S_{\square(c, c')}$$

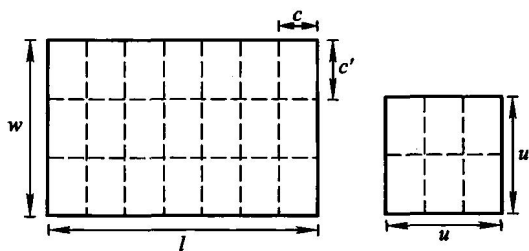


图 1-4 矩形面积公式

所以有下述矩形面积公式：

$$S_{\square(l,w)} : S_{\square(u,u)} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (l : u) \cdot (w : u)$$

若将上述两者作一比较分析，易见两者都发现了基本上相同的基本公式，即矩形、三角形的面积公式，直角三角形的勾股定理（亦即勾股弦公式）和相似三角形的边长比例式，大同小异。但是处理方式和论证上则各有长短。

在中国古算中以矩形面积公式为其起点而不加论述，然后善用它去简洁地推导其他公式；而且在长度的度量这个基本概念上也不加深究，可以说是一种工程师致用为尚的认知方式。但是在古希腊的初论中，虽然在可不可公度上犯了严重之误判，但是在可公度的“公设”之下，则立论严谨，对于矩形面积公式等逐一加以论证，可以说是一种纯理论的严格要求，但是并未完全达成。一直到希帕克斯（Hipparchus, 190 B. C. —120 B. C.，图1-5）的石破天惊之发现和欧多克斯（Eudoxus, 390 B. C. —337 B. C.）创逼近论（theory of approximation）才真正完成定量几何基础论。此事不但使得希腊几何学脱胎换骨，大幅超越中国定量几何，也为理性文明奠定坚实的基础，实乃理性文



图 1-5 希帕克斯

明第一个伟大的里程碑。

2. 希帕克斯的伟大发现——不可公度比的存在

当年希帕克斯在沙盘上用芦秆在研究几何,他先画了一个正五边形和其两条对角线,如图 1-6 所示左侧者,他把前一天用当代熟知的三角形内角和恒为一个平角和等腰三角形定理分析所得者逐一标记。亦即 $\triangle A_2B_2B_1$ 和 $\triangle A_2C_2C_1$ 都是底角皆为 $2\pi/5$ 之等腰三角形,而 $\triangle B_2C_2A_2$ 则是底角皆为 $\pi/5$ 的等腰三角形。

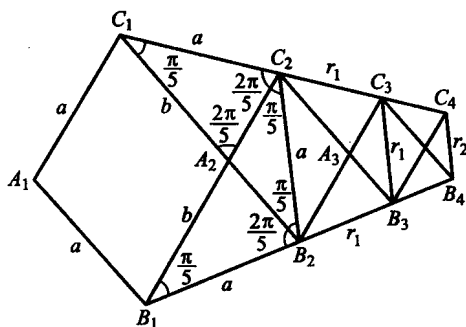


图 1-6 希帕克斯正五边形和其两条对角线

由此得知其对角线长 b 等于其边长 a 加上 $r_1 = \overline{A_2B_2} = \overline{A_2C_2}$ 。那天他突发异想,把 $\overline{B_1B_2}$ 和 $\overline{C_1C_2}$ 分别延长一段 r_1 ,即如图所示之 $\overline{B_2B_3} = \overline{C_2C_3} = r_1$ 。

他一眼就看出五边形 $A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一个小一号的正五边形!此事使得他惊恐万状!为什么呢?因为他熟知用辗转丈量法求两个线段 $\{a, b\}$ 的最长公尺度,但是上述几何事实却说明对于一个正五边的边长和对角线长 $\{a, b\}$ 的辗转丈量乃是永无休止的。这也就证明了它们是不可公度的。因此他们当年建立几何基础论的头号公理——“可公度性普遍成立”——根本是错的!当代引以为自豪的基础论其实是建筑在一个错误的公理之上的!这个石破天惊的发现,使得全希腊的几何学界大为震惊,无比地难

堪！其实不可公度性的存在，并不是全面否定了当年“初论”的成果；它只是说原本以为业已完整的证明，其实只是在可公度的情形下的证明；而在不可公度的一般情形下，则尚有待补证！这个亟待补证的任务，对于当时的希腊几何学界，是一个严峻而且迫切的挑战。大约历经了半个世纪的努力，才因欧多克斯开创了影响深远、广阔的逼近论而得以完美达成，下面将简述其基本想法和精要。

3. 欧多克斯之逼近论——几何基础论之震后重建

(i) 比较原则：在 $\{a, b\}$ 不可公度的情形下，其“比值”不再是一个分数，乃是一种有待“明确其义”的新量，但是它和一个分数 $\frac{m}{n}$ 之间的大小关系则其义甚明，即

$$a : b \begin{cases} < \frac{m}{n} & \Leftrightarrow n \cdot a < m \cdot b \\ > \frac{m}{n} & \Leftrightarrow n \cdot a > m \cdot b \end{cases}$$

(ii) 逼近定理：对于任意大的整数 N ，恒有 m 使得 $\frac{m}{N} < a : b < \frac{m+1}{N}$ （亦即将所给的不可公度比 $a : b$ 夹逼于相差仅为 $\frac{1}{N}$ 的两个分数之间），欧多克斯提出目下误称为阿基米德（Archimedes）公设者为上述定理论证之依据。

(iii) 不可公度比“ $a : b$ ”和“ $c : d$ ”之间的大、小或相等关系的明确界定：设 $a : b$ 和 $c : d$ 不相等，则两者之差乃是一个非零的定值，而 $\frac{1}{N}$ 在 N 无限增大下是一个可以小到任意小者。亦即存在足够大之 N 使得 $\frac{1}{N}$ 小于两者之差。因此 $c : d$ 不可能也夹逼于上述同样的 $\frac{m}{N}$ 和 $\frac{m+1}{N}$ 之间。亦即在 $c : d$ 小于 $a : b$ 时，有 $c : d < \frac{m}{N} <$

$a:b$; 而在 $c:d$ 大于 $a:b$ 时, 则有 $a:b < \frac{m+1}{N} < c:d$ 。再者, 若 $a:b$

和 $c:d$ 和任给分数 $\frac{m}{n}$ 恒有相同的大小关系, 则定义为 $a:b = c:d$ 。

欧多克斯用上述极其简朴精到的想法, 全面重建定量几何基础论。有鉴于中国古法善用面积的论证, 其实真正要补证者, 可以归结到下述矩形公式:

$$S_{\square(a,b)} : S_{\square(u,u)} = (a:u)(b:u)$$

在 $a:u$ 和 $b:u$ 至少有一个不可公度的情形之补证。兹简述如下:
(不妨设两者皆为不可公度)

证明: 对于任给正整数 N , 不论它有多大皆有 m 和 m' 使得

$$\frac{m}{N} < a:u < \frac{m+1}{N}; \quad \frac{m'}{N} < b:u < \frac{m'+1}{N}$$

亦即
$$\frac{m}{N}u < a < \frac{m+1}{N}u; \quad \frac{m'}{N}u < b < \frac{m'+1}{N}u$$

如图 1-7 所示, $\square(a,b)$ 包含 $\square(\frac{m}{N}u, \frac{m'}{N}u)$, 而它又被包含于 $\square(\frac{m+1}{N}u, \frac{m'+1}{N}u)$ 之内, 由此可得

$$\frac{mm'}{N^2} < S_{\square(a,b)} : S_{\square(u,u)} < \frac{(m+1)(m'+1)}{N^2}$$

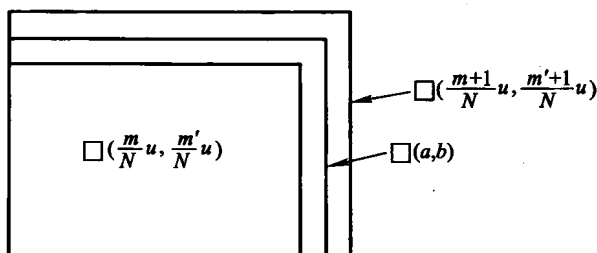


图 1-7 不可公度性

由前述不等式相乘, 亦有

$$\frac{mm'}{N^2} < (a:u)(b:u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{N^2}$$

所以 $S_{\square(a,b)}:S_{\square(u,u)}$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之间若有差别,必然要比上述同时将两者夹逼于其间的那两个分数的差别要更小!即小于

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{N^2} - \frac{mm'}{N^2} = \frac{m+m'+1}{N^2} = \frac{1}{N} \left(\frac{m}{N} + \frac{m'+1}{N} \right)$$

但是在 N 无限增大下,它是可以小到任意小者。所以 $S_{\square(a,b)}:S_{\square(u,u)}$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之间不可能有任何差别。这样就简洁清晰地完成基本的矩形面积公式之补证。

欧多克斯所创的逼近法不但把当年仅仅在可公度的特殊情形下具有其证明的各种各样定理和公式,加以明确简洁的“补证”,使得它们不论在可公度或不可公度的情形下皆普遍成立,从而彻底重建了定量几何基础论。再者,他有鉴于曾经采用错误的“公设”作为几何学的论证依据的惨痛教训,决心下工夫彻底检查当时的几何学,尽其所知所能把其论证的依据,压缩到“至精至简”:流传至今的《欧氏几何学》(Euclidean Geometry)中绝大部分内容来自欧多克斯的著作。所以“公理化”治学的典范和人类理性文明中的第一科学的初阶集其大成者,实乃欧多克斯,而并非欧几里得(Euclid, 330 B. C. —260 B. C.)的伟大贡献。不但此也,欧多克斯的逼近原理和方法论不但重建了定量几何基础论,而且也是分析学(analysis)的发祥地和基本方法。他本人就把它用来证明“锥体体积等于三分之一底面积乘高”这个立体几何基本公式,他的证法以及随后阿基米德把它拓展到球面面积公式和球体体积公式的论证乃是积分学的雏形和范例。

如今回顾,将中、西古文明的定量平面几何作一比较分析:两者所得的基本公式大致相同,亦即矩形、三角形的面积公式,勾股弦公式(亦即勾股定理)和相似三角形的边长比例式,但是在基调和格局上则两者是迥然不同的。中国古代的工程师研讨几何是为了致用,是唯用是尚的。他们在基本测量公式的推导上善用面积,