

机电控制工程系列教材

Introduction to Modern Control Theory and Method  
(Second Edition)

# 现代控制理论与方法概论 (第2版)

董景新 吴秋平 编著

Dong Jingxin Wu Qiuping

清华大学出版社

机电控制工程系列教材

Introduction to Modern Control Theory and Method  
(Second Edition)

# 现代控制理论与方法概论

(第2版)

董景新 吴秋平 编著

Dong Jingxin Wu Qiuping

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

该教材是在董景新、吴秋平编著的《现代控制理论与方法概论》的基础上,补充现代控制最新理论与方法重新编写的。主要内容包括:控制系统的状态空间数学模型;线性控制系统状态时域响应;线性系统的能控性和能观测性;系统的稳定性;线性控制系统的综合方法;线性及非线性估计理论基础;变分法求最优控制;极大值原理;动态规划法;线性二次型最优控制;线性系统的随机最优控制;模型参考自适应控制;自校正控制;模糊控制;神经网络控制;遗传算法和免疫控制;其他智能控制以及倒立摆控制实例。该教材对现代控制理论基础、最优控制、自适应控制、智能控制均有所介绍;着重于概念的建立和理解,不追求严格的定理理论证明;引入较多例题帮助读者理解概念和方法,侧重于应用;同时将 MATLAB 软件工具的应用引入教材。

本书可作为《控制工程基础(第4版)》(董景新等编著,清华大学出版社,2015)的后续教材,主要面向机械类、仪器类及其他非控制专业的高年级本科生和研究生,也可供相关领域的科技人员参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论与方法概论/董景新,吴秋平编著.--2版.--北京:清华大学出版社,2016

机电控制工程系列教材

ISBN 978-7-302-42415-4

I. ①现… II. ①董… ②吴… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 298605 号

责任编辑:许 龙

封面设计:常雪影

责任校对:刘玉霞

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:30.75 字 数:748千字

版 次:2007年8月第1版 2016年6月第2版 印 次:2016年6月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:69.00元

# 前言



该教材是在董景新、吴秋平编著的《现代控制理论与方法概论》(清华大学出版社,2007)的基础上,补充了现代控制最新理论与方法改编而成的。

随着机械类学科与信息类学科结合得日益密切,面对高技术机电产品在市场上的激烈竞争,原先对控制技术涉足不深的机械类、仪器类学科对控制技术的需求空前增长。日新月异的高技术创新型机电产品翻新越来越快,经典控制技术已经难以完全胜任,最优控制、自适应控制、智能控制等现代控制技术不断发展成熟,不可避免地在机械类、仪器类学科中引入。

本教材面向机械类、仪器类在本科阶段已经学习过经典控制理论的本科高年级学生、研究生和工程技术人员。主要内容包括:控制系统的状态空间数学模型;线性控制系统状态时域响应;线性系统的能控性和能观测性;系统的稳定性;线性控制系统的综合方法;线性及非线性估计理论基础;变分法求最优控制;极大值原理;动态规划法;线性二次型最优控制;线性系统的随机最优控制;模型参考自适应控制;自校正控制;模糊控制;神经网络控制;遗传算法和免疫控制;其他智能控制以及倒立摆控制实例。其中,非线性估计理论基础、免疫控制、粒子群优化算法和蚁群算法是全新增加的内容,其他各章节的内容也都或多或少进行了更新。

该教材课程是仪器类、机械类等学科研究生的核心知识点课程,是清华大学“985”支持的研究生建设课程之一。教材作者在清华大学多年讲授该课程的一些体会也融入了修订版的教材中。该教材对现代控制理论基础、最优控制、自适应控制、智能控制均有所介绍;着重于概念的建立和理解,不追求严格的定理理论证明;引入较多例题帮助读者理解概念和方法,侧重于应用;同时将 MATLAB 软件工具的应用引入教材。为了更好地理解和掌握本书的内容,除各章正文中例题外,在各章后还选编了有关练习题和思考题,书后还附有部分习题的参考答案,以便读者自学。

本教材第7章线性估计理论基础、第8章非线性估计理论和第16章模糊控制由吴秋平副教授编写;其他章节均由董景新教授编写;第20章的实例主要由研究生李恺提供。全书

由董景新教授统稿。

现代控制理论和技术领域广阔,目前仍在不断发展之中。编著者力图按照机械类、仪器类等非控制类本科生的学科基础,以及技术发展需要编写内容,自感很难完全如愿,错误疏漏在所难免,恳请读者不吝赐教。

作 者

2015年10月于清华大学

# 目录



## 第1部分 基础知识

<b>1</b>	<b>概述</b> .....	3
<b>2</b>	<b>控制系统的状态空间数学模型</b> .....	7
	2.1 状态变量及状态空间表达 .....	7
	2.2 状态空间表达式的建立 .....	11
	2.3 状态矢量的线性变换 .....	28
	习题 .....	37
<b>3</b>	<b>线性控制系统状态时域响应</b> .....	40
	3.1 线性连续定常系统状态方程的解 .....	40
	3.2 线性连续时变系统状态方程的解 .....	44
	3.3 线性离散系统状态方程的解 .....	48
	3.4 瞬态响应的计算机仿真方法 .....	52
	习题 .....	54
<b>4</b>	<b>线性系统的能控性和能观测性</b> .....	57
	4.1 线性系统的能控性 .....	57
	4.2 线性系统的能观测性 .....	65
	4.3 系统结构的分解 .....	70
	习题 .....	90
<b>5</b>	<b>系统的稳定性</b> .....	95
	5.1 李雅普诺夫稳定性方法 .....	95
	5.2 线性系统渐近稳定的判别方法 .....	98
	5.3 非线性系统的稳定性分析 .....	102
	5.4 波波夫超稳定性方法简介 .....	105
	习题 .....	108

<b>6</b>	<b>线性控制系统的综合</b>	110
6.1	系统构成及特性	110
6.2	极点配置	114
6.3	状态重构问题	115
6.4	系统镇定和解耦问题	120
	习题	124
<b>7</b>	<b>线性估计理论基础</b>	128
7.1	估计问题的提法和估计准则	128
7.2	估计理论的发展	129
7.3	最小二乘估计	130
7.4	最小方差估计	134
7.5	线性最小方差估计	136
7.6	卡尔曼滤波	138
7.7	实用卡尔曼滤波技术	142
7.8	联邦滤波器	152
7.9	几种最优估计的优缺点比较	159
	习题	160
<b>8</b>	<b>非线性估计理论</b>	162
8.1	非线性估计技术的发展	162
8.2	扩展卡尔曼滤波	164
8.3	无迹卡尔曼滤波	170
8.4	粒子滤波	177
8.5	扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波和粒子滤波算法的应用对象比较	187
	习题	188

## 第2部分 最优控制

<b>9</b>	<b>变分法求最优控制</b>	192
9.1	基本概念	192
9.2	用变分法求解最优问题	194
9.3	有约束条件的泛函极值	198
9.4	变分法求最优控制	198
	习题	207
<b>10</b>	<b>极大值原理</b>	209
10.1	连续系统的极大值原理	210
10.2	离散系统的极大值原理	213
10.3	时间最优控制	214

习题	221
<b>11 动态规划法</b>	224
11.1 离散系统的动态规划法	224
11.2 连续系统的动态规划法	227
习题	231
<b>12 线性二次型最优控制</b>	233
12.1 状态调节器	233
12.2 输出调节器	239
12.3 离散系统情况	242
12.4 跟踪问题(随动问题)	243
习题	246
<b>13 线性系统的随机最优控制</b>	248
13.1 系统状态对随机作用的响应	248
13.2 随机状态反馈调节器	251
13.3 随机输出反馈调节器	253
13.4 随机跟踪问题	258
13.5 离散系统随机最优控制	263
习题	266

### 第3部分 自适应控制

<b>14 模型参考自适应控制</b>	269
14.1 模型参考自适应控制系统的主要结构形式	269
14.2 局部参数最优化设计方法	271
14.3 基于稳定性理论的设计方法	272
14.4 不同模型参考自适应系统设计方法的发展及特点	280
习题	282
<b>15 自校正控制</b>	284
15.1 最小方差自校正控制	284
15.2 广义最小方差自校正控制	289
15.3 极点配置自校正控制	296
15.4 自校正PID控制	301
15.5 自适应控制系统的鲁棒性	302
习题	303

### 第4部分 智能控制介绍

<b>16 模糊控制</b>	309
16.1 模糊控制的产生与发展	309



16.2	模糊数学基础知识	311
16.3	模糊控制系统与模糊控制器概论	325
16.4	基本模糊控制器设计	337
16.5	模糊集成控制	346
16.6	MATLAB 模糊逻辑工具箱	346
	习题	349
<b>17</b>	<b>神经网络控制</b>	<b>350</b>
17.1	神经网络的产生和发展	350
17.2	人工神经元模型	353
17.3	网络结构及工作方式	358
17.4	神经网络的学习方法	360
17.5	BP 算法	363
17.6	基于神经网络的模糊自适应控制	372
	习题	375
<b>18</b>	<b>遗传算法和免疫控制</b>	<b>376</b>
18.1	遗传算法	376
18.2	免疫控制	394
	习题	408
<b>19</b>	<b>其他智能控制</b>	<b>409</b>
19.1	混沌控制	409
19.2	粒子群优化算法	422
19.3	蚁群算法	425
	习题	428
<b>20</b>	<b>倒立摆控制实例</b>	<b>429</b>
20.1	系统构成和控制方案	429
20.2	倒立摆系统建模、仿真与分析	431
20.3	系统软件设计与调试	458
20.4	系统调试与实验结果	461
20.5	倒立摆的模糊神经网络自适应控制	463
	部分习题参考答案	466
	附录 A Diophantine 方程	479
	参考文献	482



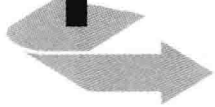
# 第 1 部分

## 基础知识

---



# 1



## 概 述

自 20 世纪 40 年代末美国科学家维纳(N. Wiener)创立控制理论以来,短短的几十年控制理论已经渗透到各个领域,并伴随着其他科学技术的发展,极大地改变了整个世界。控制理论自身也在创造人类文明中不断向前发展,在机电工业领域的应用更是日新月异。

机电工业是我国最重要的支柱产业之一,而传统的机电产品正在向机电一体化方向发展,并取得巨大进展。我国科技界普遍认为,机电一体化是用系统工程学的观点和方法,研究在机电系统产品中如何将机械、微机、信息处理和自动控制技术集成综合应用,以求达到最佳的融合。

机电一体化产品或系统的显著特点是系统控制自动化。机电控制型产品技术含量高,附加值大,在市场上具有很强的竞争优势,已形成机电一体化产品的主流。当前国际上机电结合型产品,诸如典型的工业机器人(robot)、数控机床(computer numerical control machine tools)、自动导引车(AGV),乃至柔性制造系统(FMS)、计算机集成制造系统(CIMS)等都广泛地应用了控制理论;在高性能的产品中,包括航空航天产品甚至人们日常使用的照相机等,都已经越来越多地用到了最优控制、自适应控制和智能控制等现代控制理论。

最优控制是使系统在被控时间内,所需性能和系统实际性能间的差异的指标为最小,即寻找使性能指标最小的时间函数的控制,寻求动静态的性能最优。最优控制通常是在状态空间数学模型基础之上,对系统进行分析和综合。

在机电控制中,有时受控对象参数和扰动变化影响因素很多,而且过于复杂,不易预知。例如,机械运动的静摩擦、库仑摩擦等非线性现象引起的参数变化。再例如,通常机械手臂从直立位置到水平伸展位置的转动惯量变化很大(可达 1 : 50),且多自由度互相耦合,转动惯量变化规律很复杂。自适应控制正是被应用于随时间改变而其系统对象参数和扰动变化难以预知的情况。设计能修正自身特性,以适应对象和扰动特性变化的控制器是自适应研究的内容。

自适应控制系统的理论问题除了保证系统精度和快速性,更多地集中在稳定性、收敛性和鲁棒性(robustness)方面,这些都是自适应控制系统能够在工程应用中获得成功的重要方面。所谓鲁棒性,是指在存在扰动和未建模动态特性的条件下,系统能保持其稳定性和一定动态性能的能力。鲁棒性的概念包括鲁棒稳定性和鲁棒性能。该问题的提出主要是由于通常现代控制理论过于依赖十分精确的数学模型,以至于在工程上较难得到实际应用。

自适应控制系统首先成功用于飞机的自动驾驶,现在已扩展到航空、航天、航海、机械、电力、化工、冶金、能源、信息、生物工程等广阔领域。在运动控制和机械手控制方面,模型参考自适应控制技术较早获得成功运用。由于采用了模型参考自适应控制技术,自动补偿了系统在低速爬行、系统惯量变化、增益变化以及摩擦负载的非线性特性的变化,从而极大地提高了系统的稳态和动态跟踪精度。

经典控制理论、最优控制理论和自适应控制理论都是建立在数学模型基础之上的,建模过程是必须经过的一步。但许多实际系统的高阶、高维数以及系统信息的模糊性和不确定性对成熟的控制理论形成了严重挑战,于是控制理论与人工智能(artificial intelligent)的结合产生和发展了智能控制技术(intelligent control technology)。

智能控制技术的创立和发展是对当代多种前沿学科、多种先进技术和多种科学方法的高度综合和集成,智能控制的研究在当前国内外人工智能、自动化、计算机技术等领域都占有一定的比重,受到学术界和工程界的广泛关注。

现代制造系统正朝着集成化、柔性化、智能化方向发展,相应的产品在制造过程组织和过程控制中,对柔性和智能性的要求也越来越高。智能控制不依赖于被控过程的精确数学模型,它使系统能根据过程状况信息利用其自身拥有的知识做出有效的控制操作。

智能控制技术是研究复杂的不确定被控对象(或过程)问题的技术。它采用人工智能方法,有效地克服系统的不确定性,是系统从无序到期望的有序状态转移的方法及其规律。智能控制技术适用于被控对象和环境有未知或不确定因素,或者其数学模型难以建立,或者其运行环境、工况有不可预测的变化等场合。在被控对象模型含有时变、非线性、时滞、耦合等难以控制的因素的情况下,采用其他控制理论难以设计出理想、符合要求的系统时,都有可能期望应用智能控制获得解决。

智能控制用机器模拟人的智能,使机器具有类似于人的智能,其实质是研究如何构造智能机器或智能系统,以模拟、延伸、扩展人类的智能。智能控制是在计算机科学、控制论、信息论、神经心理学、哲学、语言学等多种学科研究的基础上发展起来的。

人工智能、自动控制、信息论和运筹学的交叉形成了智能控制理论。随着智能控制技术的发展,现代几乎各种技术的发展都已开始涉及智能控制技术,可以说,智能控制已经广泛应用到许多领域。智能控制中,自学习技术从简单的参数学习向更为复杂的结构学习、环境学习和复杂对象学习的方向发展,并发展了神经网络、模糊逻辑、进化算法、免疫控制、粒子群优化算法、蚁群算法、专家系统、混沌控制等技术。同时,还发展了相应的计算机辅助控制系统设计工具,使控制理论在工程上的应用更加方便。

表1-1概括了控制理论的历史发展进程。半个多世纪以来,控制理论从主要依靠手工计算的经典控制理论发展到依赖计算机的现代控制理论,发展了最优控制、自适应控制、智能控制。

各种控制理论都有其发展的历史背景及相互联系,同时也都有其局限和不足。例如,经典控制理论对线性定常系统有完善的控制理论和良好的控制效果,但对多输入-多输出、时变系统、非线性系统难以胜任;最优控制理论建立在受控对象严格而准确的数学模型基础上,否则控制效果会大打折扣,而准确的数学模型在工程上是很难实际得到的;模糊控制需要提高稳态精度,寻找一般性稳态分析和系统化设计方法;神经网络控制需要加速算法的收敛速度,提高神经网络的适应能力。各种控制理论分支还需要互相借鉴、不断发展。

表 1-1 控制理论的发展

时 间	控 制 理 论	数 学 基 础	特 点
1946—1955	反馈理论 伺服控制理论	Laplace 变换 传递函数 过渡过程理论 稳定性理论	经典控制理论(基于手工计算的局限); 着眼于系统的外部联系; 重点为单输入-单输出的线性定常系统 (包括连续系统和离散系统); 以传递函数为基础;
1955—1960	采样控制理论 非线性控制理论	Z 变换 相平面理论 噪声和滤波理论	除时域分析外,以频率法、根轨迹法为主要分析方法; 设计时常用试探法
1960—1965	状态空间理论 能控性和能观性理论 最优控制理论	矢量微分方程理论 矩阵理论 集合论 变分理论 极值搜索方法	现代控制理论(伴随计算机的发展); 多输入-多输出的时变系统(包括连续系统和离散系统); 以状态空间理论为基础;
1965 年以后	随机控制理论 自适应控制理论 自学习控制理论 智能控制理论 神经网络控制理论 模糊控制理论 混沌学 遗传算法 免疫控制 粒子群优化算法 蚁群算法 $H_{\infty}$ 空间理论 机器人控制理论 仿生学理论	随机过程理论 数理规划理论 运筹学 系统工程理论 图像识别理论 复值函数理论 模糊数学	以时域分析为主; 着眼于系统的状态及其内部联系(哲学上的突破); 交叉学科的特点; 带有生物的特征; 设计时采用严格的数学规律

控制理论的发展需要增加控制理论体系的开放性,汲取其他学科的先进成果。为了满足人们更高的控制要求,控制理论需要对当代多种前沿学科、多种先进技术和科学方法高度综合集成。

控制理论的发展不断开拓新视角,利用数学模型和知识模型集成的广义模型进行定量与定性相结合的系统分析也在取得进展。

对一个动态系统设计控制器时,通常有多个相互矛盾的目标需要考虑,如何分析和协调这些目标,探索多目标优化的数字化解决方式以达到最优化设计,近年来已取得一些成果。

混合式控制理论也成为控制理论发展的一个热点。以一种控制理论为主,结合其他控制理论的优点构成复合式控制往往可以取得最佳的控制效果。比如,模糊控制与 PID 控制相结合的模糊 PID 控制,与自适应控制相结合的模糊自适应控制,与神经网络相结合的模

糊神经网络控制,以及鲁棒模糊控制、鲁棒神经网络控制、专家自适应PID控制等。这些复合式控制都显示出旺盛的生命力,代表了一种发展趋势。除了上述复合控制外,多模态控制、多模型自适应控制也是一种集多种控制优点于一身的混合控制。多模态控制指多个控制器存在于同一控制系统中,在适当时候切换工作状态的控制器;多模型自适应控制利用多模型来逼近系统的动态性能,以期能对复杂系统达到更好的控制精度、跟踪速度和稳定性。

控制理论在发展过程中一方面走向高度分化,不断产生新的理论分支;另一方面走向高度综合,产生了多模态控制、多模型自适应控制等理论。从单项技术、复合式技术到技术群,从基本的反馈到自适应、自学习、自组织结构,控制理论取得了很大的发展。

控制问题可归纳为以下4类:

(1) 确定性控制问题。在确定性控制问题中,系统和扰动的模型、参数及初始条件均是确定的、已知的。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(2) 随机控制问题。在随机控制问题中,系统模型参数及初始条件是确定的、已知的,而扰动变量及其初始状态是统计特性已知的随机序列。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(3) 自适应控制问题。在自适应控制问题中,系统模型参数及初始条件是不完全确定的,扰动变量及其初始状态统计特性也是未知的。其最优控制是综合一个控制过程或序列,使某一指定的性能指标函数达到最小。

(4) 智能控制问题。前3类控制问题对象的结构是已知的,而在智能控制问题中,系统结构和参数均未知,很难建立有效的数学模型,现阶段借鉴人工智能特点,采用专家系统、模糊控制、人工神经网络控制等方法解决。

本教材在经典控制理论的基础上,采用现代控制理论方法,介绍了各类控制问题的主要内容。

# 2

## 控制系统的状态空间数学模型

本章首先通过一些简单的机电系统数学模型的列写,选定并得到系统状态变量及状态空间表达的基本形式。然后,分别介绍如何通过微分方程、传递函数、方块图等描述系统的其他数学模型,以及直接从系统机理出发建立系统状态空间的表达式。同时介绍控制系统中经常用到的利用状态矢量的线性变换,以简化或规范化状态空间数学模型。

### 2.1 状态变量及状态空间表达

首先通过以下几个机电系统数学模型例子引出状态变量的概念以及状态空间表达的一般形式。

**例 2-1** 在图 2-1 所示系统中, $R$  为电阻, $L$  为电感, $C$  为电容, $i_L(t)$  为流过电感的电流, $u_C(t)$  为电容两端的电压, $u_i(t)$  和  $u_o(t)$  分别为输入和输出电压。

**解** 根据基尔霍夫定律,该系统可表示为如下微分方程组:

$$\begin{cases} u_i(t) = Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + u_C(t) \\ i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \end{cases}$$

$$u_o(t) = u_C(t)$$

即

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}u_i(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) \end{cases}$$

$$u_o(t) = u_C(t)$$

也可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

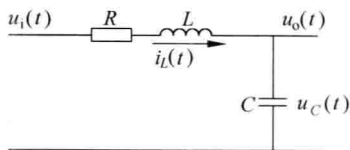


图 2-1 电路网络(一)



$$u_o = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

**例 2-2** 在图 2-2 所示系统中,  $m$  为质量,  $D$  为黏性阻尼系数,  $k$  为弹性刚度,  $f_i(t)$  为输入力,  $x_o(t)$  为输出位移。

**解** 根据牛顿第二定律, 该系统可表示为如下微分方程组:

$$\begin{cases} v_o(t) = \frac{dx_o(t)}{dt} \\ f_i(t) - Dv_o(t) - kx_o(t) = m \frac{dv_o(t)}{dt} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dx_o(t)}{dt} = v_o(t) \\ \frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x_o(t) - \frac{D}{m}v_o(t) + \frac{1}{m}f_i(t) \end{cases}$$

也可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o(t) \\ \dot{v}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f_i(t)$$

$$x_o(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_o(t) \\ v_o(t) \end{bmatrix}$$

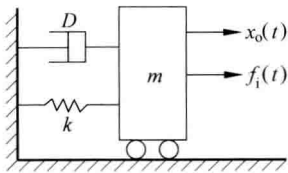


图 2-2 质量-弹簧-阻尼系统(一)

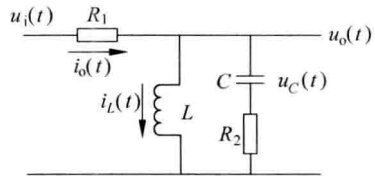


图 2-3 电路网络(二)

**例 2-3** 在图 2-3 所示系统中,  $R_1$  和  $R_2$  为电阻,  $L$  为电感,  $C$  为电容,  $i_L(t)$  为流过电感的电流,  $u_C(t)$  为电容两端的电压,  $u_i(t)$  为输入电压,  $i_o(t)$  为输出电流,  $u_o(t)$  为输出电压。

**解** 根据基尔霍夫定律, 该系统可表示为

$$\begin{cases} u_i(t) = R_1 i_o(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \\ u_i(t) = R_1 i_o(t) + u_C(t) + [i_o(t) - i_L(t)]R_2 \\ i_o(t) - i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_o(t) = u_C(t) + [i_o(t) - i_L(t)]R_2 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L(t) + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_C(t) + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} u_i(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L(t) - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_C(t) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} u_i(t) \end{cases}$$