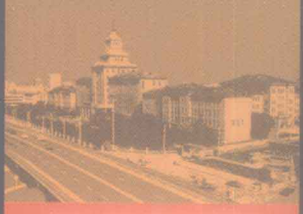


HIT

数学·统计学系列

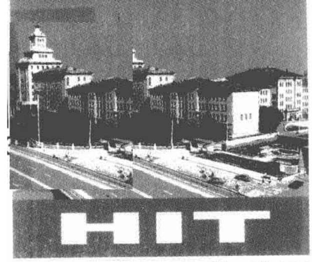
The Methods and Techniques of Mathematical Olympiad Inequalities

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧 下

蔡玉书 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧 下



数学·统计学系列

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧

The Methods and Techniques of Mathematical Olympiad Inequalities

(下)

蔡玉书 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本册共包括十一章:第十四章函数和微积分方法证明不等式;第十五章几何方法证明不等式;第十六章数学归纳法证明不等式;第十七章运用 Abel 变换证明不等式;第十八章分析法证明不等式;第十九章不等式证明中的常用代换;第二十章含绝对值的不等式;第二十一章不等式与函数的最值;第二十二章数列中的不等式;第二十三章涉及三角形的不等式的证明;第二十四章几何不等式与几何极值。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手、教练员参考使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课堂教材及不等式研究爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克不等式证明方法和技巧.全2册/蔡玉书编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.5

ISBN 978-7-5603-3182-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①不等式-中学-教学参考资料 Ⅳ.①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 090033 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫　翟新烨
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　总印张 77.75　总字数 1436 千字
版　　次　2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3182-9
定　　价　158.00 元(上、下)

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎目录

函数和微积分方法证明不等式

第十四章

本章主要介绍利用函数的思想和方法(包括导数和积分的思想和方法)证明不等式.

例题讲解

例1 证明对于任意的$x,y,z\in(0,1)$,不等式$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.(第15届全俄数学奥林匹克试题)

证法一 考虑三次函数$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$.

由$1-x>0,1-y>0,1-z>0$,有

$$f(1)=(1-x)(1-y)(1-z)>0$$

又$f(1)=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$,从而

$$(x+y+z)-(xy+yz+zx)<1-xyz<1$$

即

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$$

证法二 考虑一次函数$f(x)=x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)-1=(1-y-z)x+y+z-yz-1$,由$y,z\in(0,1)$得$f(0)=y+z-yz-1=-(1-y)(1-z)<0,f(1)=-yz<0$,所以$f(x)$在$(0,1)$上恒小于0,即不等式$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$成立.

例2 证明如果给定的两个正数 $p \leqslant q$,则对任意 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon \in [p,q]$,都有

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

并确定等号成立的充要条件.(1977 年美国数学奥林匹克试题)

证明 给定正数 u,v,考虑函数 $f(x)=(u+x)\left(v+\frac{1}{x}\right)$,$0<p \leqslant x \leqslant q$,可以证明对任何 $x \in [p,q]$,

$$f(x) \leqslant \max\{f(p),f(q)\}$$

事实上,不妨设 $p<q$,令 $\lambda=\frac{q-x}{q-p}$,则 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 且 $x=\lambda p+(1-\lambda)q$.

由于

$$pq \leqslant \lambda^2 pq+(1-\lambda)^2 pq+\lambda(1-\lambda)(p^2+q^2)=$$
$$[\lambda p+(1-\lambda)q][\lambda q+(1-\lambda)p]$$

所以,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\lambda p+(1-\lambda)q} \leqslant \frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{q}$$

由此可得

$$f(x)=(u+x)\left(v+\frac{1}{x}\right)=uv+1+vx+\frac{u}{x}=$$
$$uv+1+v(\lambda p+(1-\lambda)q)+\frac{u}{\lambda p+(1-\lambda)q} \leqslant$$
$$uv+1+v(\lambda p+(1-\lambda)q)+\frac{\lambda u}{p}+\frac{(1-\lambda)u}{q}=$$
$$\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q) \leqslant \max\{f(p),f(q)\} \qquad ①$$

由 ① 可知,当 a,b,c,d,e 取端点值 p 或 q 时,$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$ 可取其最大值. 设 a,b,c,d,e 中有 x 个取 p,$5-x$ 个取 q,其中 x 是不大于 5 的非负整数. 由于

$$[xp+(5-x)q]\left[\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}\right]=$$
$$x^2+(5-x)^2+x(5-x)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=$$
$$25+x(5-x)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

又 $x(5-x)-6=-(x-2)(x-3)$,所以当 $x=2$ 或者 3 时,$[xp+(5-x)q]$

$[\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}]$ 取到最大值 $25+6(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2$. 于是所证不等式成立,并且当 a,b,c,d,e 中有两个或者 3 个数等于 p,其余等于 q 时,等号成立.

例 3 (康托洛维奇不等式)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1,0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}$. ($n=3$ 是 1979 年北京市数学竞赛题)

证明 题目的结论具有判别式的结构,所以构造相应的二次函数,令

$$f(x)=(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i})x^2-(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}})x+(\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i)$$

要证 $\Delta\geqslant 0$,只要证存在 x_0,使 $f(x_0)\leqslant 0$ 即可. 取 $x_0=\sqrt{\lambda_1\lambda_n}$,

$$\begin{aligned}f(\sqrt{\lambda_1\lambda_n})=&a_1\lambda_n+a_n\lambda_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\lambda_i}\cdot\lambda_1\lambda_n-(\lambda_1+\lambda_n)+\\&a_1\lambda_1+a_n\lambda_n+\sum_{i=2}^{n-1}a_i\lambda_i=\\&-(\lambda_1+\lambda_n)(a_2+\cdots+a_n)+\sum_{i=2}^{n-1}(\frac{\lambda_1\lambda_n+\lambda_i^2}{\lambda_i})a_i=\\&\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_n-\lambda_i)}{\lambda_i}\leqslant 0\end{aligned}$$

所以

$$\Delta=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2}-4\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\geqslant 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}$$

例 4 求所有的实数 k,使得 $a^3+b^3+c^3+d^3+1\geqslant k(a+b+c+d)$,对任意 $a,b,c,d\in[-1,+\infty)$ 都成立.(2004 年中国西部数学奥林匹克试题)

解 当 $a=b=c=d=-1$ 时,有 $-3\geqslant k(-4)$,所以 $k\geqslant\frac{3}{4}$.

当 $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ 时,有 $4\times\frac{1}{8}+1\geqslant k(4\times\frac{1}{2})$,所以 $k\leqslant\frac{3}{4}$.

故 $k=\frac{3}{4}$. 下面证明

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1\geqslant\frac{3}{4}(a+b+c+d) \quad ①$$

对任意 $a,b,c,d \in [-1, +\infty)$ 都成立.

首先证明 $4x^3+1 \geqslant 3x, x \in [-1, +\infty)$.

事实上,由 $(x+1)(2x-1)^2 \geqslant 0$,便得

$$4x^3+1 \geqslant 3x, x \in [-1, +\infty)$$

所以 $4a^3+1 \geqslant 3a, 4b^3+1 \geqslant 3b, 4c^3+1 \geqslant 3c, 4d^3+1 \geqslant 3d$,

将上面的四个不等式相加,便得所要证的不等式 ①.

所以,所求得的实数 $k=\dfrac{3}{4}$.

例5 已知 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为正实数,证明:$(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_1+a_1b_3)^2 \geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)$,并证明当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ 时等号成立.(第28届IMO预选题)

证明 记 $f(x)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x^2-(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_1+a_1b_3)x+(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)=(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)+(a_2x-b_2)(a_3x-b_3)+(a_3x-b_3)(a_1x-b_1)$,不妨设 $\dfrac{a_1}{b_1} \geqslant \dfrac{a_2}{b_2} \geqslant \dfrac{a_3}{b_3}$,在 $x=\dfrac{b_2}{a_2}$ 时上面的二次式的值小于等于0,因而这二次式的判别式小于等于0,这就是所要证明的不等式.

若等号成立,则 $x=\dfrac{b_2}{a_2}$ 为二次式的重根,从而 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 或 $\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$. 不妨设 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$,这时,$(a_1x-b_1)(a_3x-b_3)+(a_2x-b_2)(a_3x-b_3)=2(a_2x-b_2)(a_3x-b_3)$ 以 $(a_2x-b_2)^2$ 为其因式,所以 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

例6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为实数,如果如果满足 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-1)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2-1)>(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1)^2$,证明 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>1$ 和 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>1$ 成立.(2004年美国国家集训队试题)

证明 用反证法. 假设 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<1$ 及 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2<1$,构造二次函数

$$f(x)=(x-1)^2-\sum_{k=1}^{n}(a_kx-b_k)^2=$$

$$\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2-2\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+1-\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

由反设 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<1$,故抛物线开口向上,由已知条件,它的判别式

$$\Delta=4[(1-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2-(1-\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(1-\sum_{k=1}^{n}b_k^2)<0$$

故$f(x)$恒大于0,但是,$f(1)=-\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\leqslant 0$. 与$f(x)$恒大于0矛盾. 所以,假设不成立. 于是命题得证.

例 7 求证:对任意正实数 a,b,c, 都有 $1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$.(2004 年中国西部数学奥林匹克试题)

证法一 令 $x=\frac{b^2}{c^2},y=\frac{c^2}{a^2},z=\frac{a^2}{b^2}$,则 x,y,z 是正数,且 $xyz=1$,于是只需证明

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,令 $A=xy$,则 $z=\frac{1}{A},A\leqslant 1$,于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}>1$$

设 $u=\frac{1}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}$,则 $u\in(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}]$,当且仅当 $x=\sqrt{A}$ 时,有 $u=\frac{1}{1+\sqrt{A}}$.

于是,

$$(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}})^2=(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{x}}})^2=$$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}=$$

$$\frac{2+x+\frac{A}{x}}{1+A+x+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}=1+(1-A)u^2+2u$$

令 $f(u)=(1-A)u^2+2u+1$,则 $f(u)$ 在$(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}]$ 上是增函数,所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\sqrt{f(\frac{1}{1+\sqrt{A}})}=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}$$

令$\sqrt{A}=v$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{A}}}=\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2(1+v^2)}}\leqslant$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{1+v}=\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{1+v}=$$

$$-\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{1+v}}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

证法二　我们只证明右边的不等式,设$x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}$,则$xyz=1$,只要证明

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leqslant 3$$

不妨设$x\leqslant y\leqslant z$,这意味着$xy\leqslant 1,z\geqslant 1$,由柯西不等式我们有

$$(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}})^2\leqslant 2(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2})=$$

$$4[1+\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}]\leqslant 4[1+\frac{1+x^2y^2}{(1+xy)^2}]=$$

$$\frac{8}{1+xy}=\frac{8z}{1+z}$$

即

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\leqslant 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}$$

因此只要证明$2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leqslant 3$,因为$\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leqslant\frac{2}{1+z}$,我们只要证明$2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\leqslant 3$,即证明

$$1+3z-2\sqrt{z(1+z)}\geqslant 0\Leftrightarrow(\sqrt{2z}-\sqrt{1+z})^2\geqslant 0$$

证法三　我们只证明右边的不等式,设$x^2=\frac{b}{a},y^2=\frac{c}{b},z^2=\frac{a}{c}$,其中$x,y$,$z$是正数,则$xyz=1$,只要证明$\sqrt{\frac{2}{1+x}}+\sqrt{\frac{2}{1+y}}+\sqrt{\frac{2}{1+z}}\leqslant 3$.

我们有两种情况:

(1) 当 $x+y+z\leqslant xy+yz+zx$ 时,我们利用柯西不等式得

$$\sqrt{\frac{2}{1+x}}+\sqrt{\frac{2}{1+y}}+\sqrt{\frac{2}{1+z}}\leqslant\sqrt{3\left[\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}\right]}$$

这时只要证明

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\leqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$2[(xy+x+y+1)+(yz+y+z+1)+(zx+z+x+1)]\leqslant$$
$$3(2+x+y+z+xy+yz+zx)\Leftrightarrow$$
$$x+y+z\leqslant xy+yz+zx$$

不等式得证.

(2) 当 $x+y+z>xy+yz+zx$ 时,因为 $xyz=1$,因为这意味着 $(x-1)(y-1)(z-1)>0$,所以 x,y,z 中有两个小于 1,不妨设 $x<1$ 和 $y<1$,因为 $xyz=1$,所证不等式化为 $\sqrt{\frac{2}{1+x}}+\sqrt{\frac{2}{1+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\leqslant 3$.

利用柯西不等式得

$$\sqrt{\frac{2}{1+x}}+\sqrt{\frac{2}{1+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}$$

只要证明

$$2\sqrt{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}}+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\leqslant 3\Leftrightarrow$$

$$2\left(\sqrt{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}}-1\right)\leqslant 1-\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}-1}{\sqrt{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}}+1}\leqslant\frac{1-\frac{2xy}{1+xy}}{1+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}}$$

因为我们有 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geqslant 1$, 不等式左边 $\leqslant\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}-1=\frac{1-xy}{(1+x)(1+y)}$,因此只要证明

$$\frac{1-xy}{(1+x)(1+y)}\leqslant\frac{1-\frac{2xy}{1+xy}}{1+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}}=\frac{1-xy}{(1+xy)\left(1+\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\right)}\Leftrightarrow$$

$$(xy+1+(1+xy)\sqrt{\frac{2xy}{1+xy}}\leqslant xy+1+x+y\Leftrightarrow$$

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy(xy+1)}$$

因为 $x,y\in(0,1)$,所以

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 2\sqrt{xy(xy+1)}$$

不等式得证.

例 8 设非负实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$,求 $u=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ 的最小值.(2003 年国家集训队试题)

解法一 由已知得 $(b+c)(c+a)=1+c^2$,取倒数并变形得

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2c+(a+b)}{1+c^2}$$

故

$$u=\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{1+c^2}+\frac{2c}{1+c^2}$$

由

$$ab+bc+ca=1\Rightarrow\frac{1}{4}(a+b)^2+c(a+b)\geqslant 1\Rightarrow a+b\geqslant 2(\sqrt{1+c^2}-c)$$

由对称性,不妨令 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $0\leqslant c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sqrt{1+c^2}-c\geqslant 0$.

令 $t=a+b$,则 $t\in[2\sqrt{1+c^2}-2c,+\infty)$.

故 $u=\frac{1}{t}+\frac{t}{1+c^2}+\frac{2c}{1+c^2}$,易证 $u(t)$ 在 $[2\sqrt{1+c^2}-2c,+\infty)$ 上单调递增,于是,

$$\begin{aligned}u(t)\geqslant u(2\sqrt{1+c^2}-2c)&=\frac{1}{2}(\sqrt{1+c^2}+c)+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}=\\&2\left(\sqrt{1+c^2}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)-\frac{3}{2}\left(\sqrt{1+c^2}-\frac{c}{3}\right)\geqslant\\&4-\frac{3}{2}\left(\sqrt{1+c^2}-\frac{c}{3}\right)\end{aligned}$$

因为 $\sqrt{1+c^2}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\geqslant 2$,当且仅当 $c=0$ 时等号成立. 而当 $0\leqslant c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,有

$$g(c)=-\left(\sqrt{1+c^2}-\frac{c}{3}\right)\geqslant g(0)=-1$$

所以 $u\geqslant\frac{5}{2}$.

当且仅当 $c=0,a=b=1$ 时,$u=\frac{5}{2}$.

因此,u 的最小值是$\frac{5}{2}$.

解法二 所求的最小值是$\frac{5}{2}$. 记$f(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,我们先证明

$$f(0,a+b,c^{*})\leqslant f(a,b,c) \qquad ①$$

这里 $c^{*}=\frac{1}{a+b}$,$ab+bc+ca=1$.

事实上,

①$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c^{*}}+\frac{1}{c^{*}}\leqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Leftrightarrow$

$\frac{a+b+2c^{*}}{(a+b+c^{*})c^{*}}\leqslant\frac{a+b+2c}{(b+c)(c+a)}\Leftrightarrow$

$\frac{a+b+2c^{*}}{(a+b+c^{*})c^{*}}\leqslant\frac{a+b+2c}{ab+bc+ca+c^{2}}\Leftrightarrow$

$\frac{a+b+2c^{*}}{a+b+2c}\leqslant\frac{1+c^{*2}}{1+c^{2}}\Leftrightarrow$

$\frac{a+b+2c^{*}}{a+b+2c}-1\leqslant\frac{1+c^{*2}}{1+c^{2}}-1\Leftrightarrow$

$\frac{2(c^{*}-c)}{a+b+2c}\leqslant\frac{(c^{*}-c)(c^{*}+c)}{1+c^{2}}\Leftrightarrow$

$\frac{2}{a+b+2c}\leqslant\frac{c^{*}+c}{1+c^{2}}$(这里用到了 $c^{*}=\frac{1}{a+b}>\frac{1-ab}{a+b}=c$)$\Leftrightarrow$

$2+2c^{2}\leqslant(a+b+2c)(c^{*}+c)\Leftrightarrow$

$2\leqslant(a+b)(c^{*}+c)+2cc^{*}=1+(a+b)c+2cc^{*}\Leftrightarrow 1\leqslant 1-ab+\frac{2(1-ab)}{(a+b)^{2}}\Leftrightarrow$

$$ab(a+b)^{2}\leqslant 2(1-ab) \qquad ②$$

注意到$2(1-ab)=2c(a+b)\geqslant\frac{2(a+b)^{2}}{2}$(这里用到了 $c\geqslant b\geqslant a$),从而,为证明式 ② 成立,只需证明$(a+b)^{2}\geqslant(a+b)^{2}ab$,这只需证明 $1\geqslant ab$. 而此式是显然的,从而式 ① 成立.

利用式 ① 可知

$$f(a,b,c)\geqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+(a+b)$$

记$x=a+b+\frac{1}{a+b}$,则$f(a,b,c)\geqslant x+\frac{1}{x}\geqslant\frac{5}{2}$.(这里用到 $x\geqslant 2$,而 $x+$

$\frac{1}{x}$ 在 $x>1$ 时单调递增). 等号在 $a=0,b=c=1$ 时取到. 于是,所求的最小值是$\frac{5}{2}$.

例 9 设 x,y,z 均是正实数, 且 $x+y+z=1$, 求三元函数 $f(x,y,z)=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$的最小值,并给出证明. (2003 年湖南省数学竞赛试题)

解 考察函数 $g(t)=\frac{t}{1+t^2}$,可知 $g(t)$ 是奇函数. 由于当 $t>0$ 时,$\frac{1}{t}+t$ 在$(0,1)$ 内递减,易知 $g(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$ 在在$(0,1)$ 内递增. 而对于 $t_1,t_2\in(0,1)$ 且 $t_1\leqslant t_2$ 时,有

$$(t_1-t_2)[g(t_1)-g(t_2)]\geqslant 0$$

所以,对任意 $x\in(0,1)$,有$(x-\frac{1}{3})(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10})\geqslant 0$,故

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$$

同理,

$$\frac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\frac{3}{10}(3y-1)$$

$$\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}(3z-1)$$

以上三式相加,有

$$f(x,y,z)=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(x+y+z)-3]=0$$

当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,$f(x,y,z)=0$,故所求的最小值为 0.

例 10 设 a,b,c,d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数,求证:$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$. (第 31 届 IMO 预选题)

证明 令 $S=a+b+c+d$,则有 $S>0$,构造函数$f(x)=\frac{x^2}{S-x}$,因为该函数在$[0,S)$ 上是增函数,所以对任意的 $x\in[0,S)$,有

$$(x-\frac{S}{4})[f(x)-f(\frac{S}{4})]\geqslant 0$$

故

$$\frac{x^3}{S-x}-\frac{Sx^2}{4(S-x)}-\frac{Sx}{12}+\frac{S^2}{48}\geqslant 0$$

因为$\frac{Sx^2}{4(S-x)}=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4(S-x)}$,所以

$$\frac{x^3}{Sx}\geqslant\frac{x^2}{3}+\frac{Sx}{9}-\frac{S^2}{36} \qquad ①$$

由 $ab+bc+cd+da=1$,所以

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da=1$$

因为$a,b,c,d\in[0,S)$,将式①中的x分别换成a,b,c,d,并将所得的四个不等式相加得

$$\frac{a^3}{S-a}+\frac{b^3}{S-b}+\frac{c^3}{S-c}+\frac{d^3}{S-d}\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant$$
$$\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$$

例 11 设 a,b,c 是正实数,求证:$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8$.(2003 年美国数学奥林匹克试题)

证法一 因为左边的式子是齐次的,所以不妨设$a+b+c=3$,于是只需证明

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leqslant 8$$

令$f(x)=\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$,$x\in\mathbf{R}^+$,

则

$$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{3(x^2-2x+3)}=\frac{1}{3}(1+\frac{8x+6}{x^2-2x+3})=$$
$$\frac{1}{3}(1+\frac{8x+6}{(x-1)^2+2})\leqslant\frac{1}{3}(1+\frac{8x+6}{2})=$$
$$\frac{1}{3}(4x+4)$$

所以,

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{1}{3}(4a+4)+\frac{1}{3}(4b+4)+\frac{1}{3}(4c+4)=8$$

证法二 将a,b,c分别换成$\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}$,不等式不变,所以不妨假设$0<a,b,c<1$,$a+b+c=1$,则