



全国高职高专教育“十一五”规划教材

实用经济 数学

主 编 何先应

实用经济数学

Shiyong Jingji Shuxue

主 编 何先应
副主编 宋自奋 刘 翌



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材,是为了高职教育教改新形势对经济数学课程的要求、结合作者多年教学经验编写而成的。

本书主要突出了几个特色:1. 实用为主、必须够用、广而不深、点到为止;2. 强化案例设计,突出能力目标;3. 传统与现代相结合,数学与计算机相统一。主要内容包括:函数与极限、导数及其应用、积分及其应用、线性分析基础、概率及数理统计基础、数学建模和数学实验。

本书适用于高等职业院校财经、管理类等专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

实用经济数学/何先应主编. —北京:高等教育出版社,2010.8

ISBN 978-7-04-030352-0

I. ①实… II. ①何… III. ①经济数学-高等学校:技术学校-教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第137420号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 李 陶 封面设计 赵 阳 责任绘图 杜晓丹
版式设计 马敬茹 责任校对 姜国萍 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 14.5
字 数 350 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010年8月第1版
印 次 2010年8月第1次印刷
定 价 22.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30352-00

前 言

随着时代的发展,中国高等职业教育面临新的挑战 and 机遇。既要适应教育大众化背景下人才的多样化需求,同时鲜明的职业特征决定了其课程体系、教学内容和教学方法等必须有别于传统的专科教育。本着准确定位、积极探索、勇于创新的宗旨,我们在积累多年经验的基础上编写了这本《实用经济数学》,作为高职院校财经类专业“经济数学”课程的主干教材。

通过本教材的学习,可以使學生掌握所学内容的基本概念、基本理论和基本方法。培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力,使学生学到从事经济工作应具备的基本数学知识。培养学生利用高等数学的思想、方法结合经济实际将它转化为数学模型以及求解数学模型的能力,并为后续专业课程的学习奠定良好的数学基础。

我们认为:高职教材编写应突出“高职”特色,高职教育是培养高素质技能型人才,因而教材的编写一定要注重培养学生的实践能力,让经济数学的教学工作服务于不同专业的学习要求,在编写过程中遵循以下原则:

1. 实用为主、必须够用。

数学知识的覆盖面不宜太宽,不追求数学自身的系统性、严密性和逻辑性,略去相关的数学证明和数学推导,淡化计算技巧(如求导技巧、积分技巧等)的介绍,力求突出重点,达到“透过数学看经济”的学习目标。

2. 强化案例设计,突出能力目标。

力求突出在解决实际问题中应用数学思想方法的作用,揭示重要的数学概念和方法的本质。例如,在导数中强调导数的实质——变化率;在积分中强调定积分的实质——无限累加;在微分中强调局部线性化思想;在极值问题中强调最优化思想。引例——导出概念及方法,练习——强化理解,案例——深化应用。

3. 传统与现代相结合,数学与计算机相统一。

数学实验内容将通用数学软件的学习融入课堂,体现了数学教育“与时俱进、各取所需”的新意,使不同基础的学生都将学有所获。

考虑到不同专业、不同层次学生的要求,我们采用模块式编写思路,将《实用经济数学》的内容分为“基础通用”模块(第1—3章)、“线性分析”模块(第4章)、“概率统计”模块(第5章)和“拓展及数学实验”模块(第6章),力争在学时偏紧的情况下提高课程的针对性和有效性。本教材参考课时为90课时。

本教材注重数学建模思想、方法的渗透。无论是引例分析,还是案例应用,包括章节后面的问题思考,都体现作者注重思想过程、淡化系统理论的“实用主义”编写思路,甚至不惜在某些形式上留下“空白点”,突出简明的应用思路!

根据开放教育的需要,我们在主干教材的基础上,还配备了易于修改的教案和课件,并倡导开发学生自主学习的网络课堂、测试及答疑系统等,将有效完善这一信息化、立体化的教材体系。

本教材由江西财经职业学院何先应教授担任主编,并拟定编写大纲。宋自奋副教授和刘翌

教授担任副主编。具体编写分工为:第1章由江西旅游商贸职业学院刘翌教授编写,第2章由何先应教授编写,第3章由江西外语外贸职业学院余翔副教授编写,第4章由江西经济管理干部学院程冬时副教授编写,第5章和第6章由江西财经职业学院宋自奋副教授和邹腊英讲师共同编写。书稿的初步整理由何先应教授和宋自奋副教授组织完成,全书由何先应教授统稿。

本教材在编写过程中,博采众长,借鉴了许多同行的论著、编著及文章,高等教育出版社王冰、邓雁城等编辑为本教材的编写和出版给予了大量的帮助和关心,江西财经职业学院基础部卢赛光副教授在教材整理过程中提出了许多宝贵意见,在此一并致谢。

由于编者的能力和水平所限,书中难免存在不妥或疏漏之处,恳请专家、同仁和读者批评斧正,以便修订时加以完善。

编者

2010.6

目 录

第 1 章 函数与极限	1	【习题 1】	24
1.1 我们身边的经济变量关系	1	【自测题 1】	26
1.1.1 函数的概念	1	第 2 章 导数及其应用	29
1. 函数的定义	1	2.1 导数	29
2. 函数的简单性质	2	2.1.1 导数的概念	29
1.1.2 初等函数	4	1. 引例	29
1. 基本初等函数	4	2. 导数的定义	30
2. 复合函数	4	2.1.2 基本求导公式与运算法则	32
3. 初等函数	7	1. 基本初等函数的导数	32
1.1.3 常见经济函数	7	2. 导数的四则运算法则	32
1. 货币的时间价值函数	7	2.1.3 复合函数的导数	33
2. 总成本与平均成本	8	2.1.4 隐函数的导数及对数求导法	34
3. 收益与利润	8	1. 隐函数的导数	34
4. 供应与需求	9	2. 对数求导法	35
5. 价格函数	9	*2.1.5 二元函数的偏导数	35
1.2 极限	10	2.2 函数的微分	36
1.2.1 极限的概念	10	2.2.1 引例	37
1. 极限概念的引入	10	2.2.2 微分的定义	37
2. 函数极限	11	2.2.3 微分的运算性质	38
1.2.2 无穷小与无穷大	13	2.2.4 微分在近似计算中的应用	39
1. 无穷小量	13	2.3 函数变化的简单形态	39
2. 无穷大量	14	2.3.1 微分中值定理及洛必达法则	39
3. 无穷大量与无穷小量之间的 关系	14	1. 微分中值定理	39
1.2.3 极限的计算	15	2. 洛必达法则	40
1. 极限的运算法则	15	2.3.2 函数的单调性与极值	43
2. 两个重要极限	18	1. 函数的单调性	43
1.2.4 银行复利问题与投资乘数原理	19	2. 函数的极值	44
1. 银行复利问题	19	2.4 经济中的优化方法	46
2. 投资乘数原理的简介	20	2.4.1 最值分析	46
1.3 连续性的概念	21	1. 函数在闭区间上的最值问题	46
1.3.1 增量的概念	22	2. 经济应用案例	47
1.3.2 函数的连续性	22	2.4.2 边际分析	48
1.3.3 函数的间断点	23	1. 边际成本和最小成本问题	48
1.3.4 初等函数的连续性结论及其应用	23	2. 边际收益及边际利润	49
1.3.5 闭区间上连续函数的性质	24	3. 边际需求及其经济学意义	50
		2.4.3 弹性分析	51

1. 弹性的概念	51	1. 二重积分的定义	81
2. 需求弹性	52	2. 二重积分的性质	83
2.4.4 需求—供给曲线及其应用	53	3.7.2 二重积分的简单计算方法	83
【习题2】	53	【习题3】	86
【自测题2】	55	【自测题3】	89
第3章 积分及其应用	58	第4章 线性分析基础	91
3.1 不定积分的概念与性质	58	4.1 矩阵的概念及其运算	92
3.1.1 原函数与不定积分的概念	58	4.1.1 矩阵的概念	92
1. 原函数的定义	58	1. 引例	92
2. 不定积分的定义	59	2. 矩阵的定义	92
3. 不定积分的几何意义	59	3. 几种常用的矩阵	93
3.1.2 不定积分的性质	60	4. 矩阵的相等和转置	93
3.1.3 基本积分公式	60	4.1.2 矩阵的运算	94
3.2 不定积分的运算方法	61	1. 矩阵的加(减)与数乘运算	94
3.2.1 换元积分法	62	2. 矩阵的乘法运算	95
1. 换元积分方法的介绍	62	4.2 逆矩阵	98
2. 换元积分法的特殊应用	64	4.2.1 逆矩阵的概念与性质	98
3.2.2 分部积分法	66	4.2.2 逆矩阵的计算方法	99
3.3 定积分的概念与性质	67	1. 方阵的行列式	99
3.3.1 定积分的概念	67	2. 利用伴随矩阵法求逆矩阵	105
1. 引出定积分概念的问题	67	3. 利用矩阵的初等变换求逆 矩阵	106
2. 定积分的定义	69	4.2.3 矩阵的秩	107
3. 定积分的几何意义	70	4.3 线性方程组的求解	108
3.3.2 定积分的性质	70	4.3.1 线性方程组的消元解法	109
3.4 牛顿—莱布尼茨公式	71	4.3.2 线性方程组有解的判定定理	111
3.4.1 积分上限函数	71	4.4 投入产出数学模型及其应用	114
3.4.2 牛顿—莱布尼茨公式	73	4.4.1 投入产出表	114
3.5 定积分的特殊计算方法	74	4.4.2 投入产出数学模型	116
3.5.1 换元积分法	74	4.4.3 直接消耗系数	116
3.5.2 分部积分法	75	4.4.4 完全消耗系数	118
3.6 定积分的应用	76	4.4.5 投入产出数学模型的经济应用	119
3.6.1 平面图形的面积	76	1. 在经济预测中的应用	119
1. X -型区域的面积	76	2. 在制定经济计划中的应用	120
2. Y -型区域的面积	76	3. 在调整计划中的应用	121
3.6.2 经济应用模型	78	【习题4】	122
1. 已知边际求总量	78	【自测题4】	125
2. 资本存量问题	78	第5章 概率论与数理统计基础	129
3. 洛伦兹曲线的概念及应用	79	5.1 随机事件及其概率	130
3.6.3 无穷区间上的反常积分	80	5.1.1 随机事件的概念	130
*3.7 二重积分	81	1. 随机事件的定义	130
3.7.1 二重积分的概念与性质	81		

2. 事件之间的关系及运算	131	1. 假设检验的基本思想与概念	164
5.1.2 概率及其性质	133	2. 单正态总体的假设检验的几个 类型	166
1. 随机事件的概率及古典 概型	133	【习题 5】	167
2. 条件概率与乘法公式	135	【自测题 5】	169
3. 全概率公式和贝叶斯 公式	138	第 6 章 数学建模和数学实验	172
5.1.3 事件的独立性	139	6.1 数学建模概述	173
1. 事件的独立性定义	139	6.1.1 数学建模的步骤	173
2. 独立重复试验	142	1. 模型建立	173
5.2 随机变量及其分布	142	2. 模型求解	175
5.2.1 随机变量的概念	142	3. 结果的分析与检验	175
1. 随机变量	142	6.1.2 建模实例——报童订报模型	176
2. 随机变量的分类	143	6.2 MATLAB 软件及其应用	179
5.2.2 离散型随机变量及其分布	143	6.2.1 MATLAB 的窗口环境	180
1. 离散型随机变量的概率分布	143	1. 命令窗口 (Command Window) ...	180
2. 常见的离散型随机变量的分布 函数	144	2. 工作空间窗口 (Workspace Window)	180
5.2.3 连续型随机变量及其分布	146	3. 命令历史窗口 (Command History)	181
1. 概率分布函数和概率密度函数	146	4. 当前目录浏览器 (Current Directory)	181
2. 正态分布与 3σ 原则	150	5. MATLAB 的搜索路径 (Searching Path)	181
5.3 随机变量的数字特征	151	6. 内存数组编辑器 (Array Editor)	181
5.3.1 随机变量的数学期望	151	7. 帮助浏览器 (Help Browser)	181
1. 离散型随机变量的数学期望	151	6.2.2 MATLAB 的变量和数据操作	182
2. 连续型随机变量的数学期望	153	1. 变量与常量	182
5.3.2 随机变量函数的数学期望	155	2. 数据操作	183
5.3.3 方差的概念、性质和几种常见分布的 方差	156	6.2.3 MATLAB 中的矩阵及运算	185
1. 方差的概念	156	1. 矩阵的建立	185
2. 方差的性质	157	2. 特殊矩阵	187
3. 常用分布函数的方差	158	3. 矩阵的运算	187
* 5.4 数理统计基础	159	6.2.4 MATLAB 在微积分中的应用	189
5.4.1 数理统计的基本概念	159	1. 极限运算	189
1. 总体、样本	159	2. 导数	189
2. 简单随机样本	159	3. 积分	190
3. 统计量	160	4. 求极值	190
4. 统计量的几个重要分布	160	5. 化简和代换	190
5.4.2 参数估计	162	6. 解方程	191
1. 参数的点估计	162	6.3 线性规划问题的 LINGO 求解	191
2. 参数的区间估计	163		
5.4.3 假设检验	164		

6.3.1 一般线性规划模型的建立与求解	191	【习题 6】.....	204
1. 线性规划问题的形式	191	【自测题 6】	206
2. LINGO 软件简介	193	附表 1 标准正态分布表	207
3. LINGO 软件的高级使用	196	附表 2 泊松分布表	209
6.3.2 敏感性分析与影子价格	199	参考答案	211
1. 敏感性分析	199	参考书目	220
2. 影子价格	202		

第 1 章 函数与极限

【学习目标】

1. 了解常见的经济函数
2. 理解函数极限的概念
3. 掌握极限四则运算法则,会用两个重要极限求极限
4. 了解初等函数的连续性

【能力目标】

1. 能解释身边的简单经济变量关系(税收问题,银行利率问题等)
 2. 能计算连续计息时资金的现值和终值
 3. 能分析某些上市公司的财务报表
 4. 能理解 GDP、GNP、CPI 等经济变量的含义
- GDP(英文全称 Gross Domestic Product)国内生产总值
GNP(英文全称 Gross National Product)国民生产总值
CPI(英文全称 Consumer Price Index)消费者物价指数

开章语

某品牌计算器出厂价 120 元,成本为 80 元.厂家为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购一台,单位售价就降低 2 分钱(例如,某商行订购了 300 台,订购量比 100 台多 200 台,于是每台就降低 $0.02 \times 200 = 4$ 元,商行可以按 116 元/台的价格购进 300 台),但最低价为 100 元/台.问题如下:

- 1) 把每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- 2) 把利润 L 表示为订购量 x 的函数;
- 3) 当一商行订购了 1 000 台时,厂家可获利润多少?

为了学会处理各种经济变量的关系,我们必须了解函数及其性质.

1.1 我们身边的经济变量关系

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

在许多实际问题中,量往往不是孤立地存在的,一些变量之间相互联系,相互制约,存在着确

定的关系.

下面我们通过两个实例来说明变量之间的依赖关系.

引例 1 圆的面积 S 与半径 r 之间的关系用 $S = \pi r^2$ 表示, 半径 r 可取大于 0 的实数, 当圆的半径 r 变化时, 面积 S 也会发生相应的变化, 这说明面积 S 依赖于半径 r 变化.

引例 2 自由落体运动规律为 $h = \frac{1}{2}gt^2$, 式中 h 为下降距离, g 为重力加速度, t 为降落的时间, 这个公式描述了物体在自由降落的过程中, 下降的距离 h 与时间 t 之间的依赖关系.

在以上两个引例中, 各个变量的实际意义和解析式虽然不相同, 但它们都具有以下特点: 所描述的变化过程有两个变量, 变量之间有一个确定的依赖关系, 或称为对应法则, 虽然对应法则的表达式不同, 但当其中一个变量在一定范围内取定一个数值时, 按照对应法则, 另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 数学上将变量之间对应关系的实质进行了总结, 就得到函数的概念.

定义 1.1 设 D 和 M 是两个实数集合, 如果对于 D 内的每一个值 x , 可按照一定的对应关系 f , 得到 M 内唯一确定的值 y 与它对应. 则称 y 为定义在 D 上的 x 的函数, 或简称 y 是 x 的函数, 记作:

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, f 称为对应法则, 数集 D 称为函数 y 的定义域. 当 x 遍取 D 中的一切实数值时, 与它对应的函数值 y 的集合 M 称为函数 y 的值域, 记作:

$$M = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

如图 1-1 所示.

当自变量 x 取某一个确定的数值 x_0 时, 因变量 y 所得到的确定值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 表示为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

f 是反映自变量与因变量之间关系的对应法则, 也可用 φ 、 g 、 h 、 F 等符号表示, 例如函数 $y = g(x)$ 、 $y = h(x)$ 等.

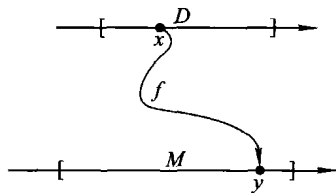


图 1-1

函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相同, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

练习 1 求函数 $y = \frac{1}{\lg(x+1)}$ 的定义域.

解

$$\text{由 } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases}, \text{ 得: } \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

所以原函数的定义域为 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$, 用区间表示为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. 函数的简单性质

我们来复习一下函数的几种性质, 即函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性.

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义, 对于区间 I 内任意两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 内为单调增加函数, 此时 I 为 $y = f(x)$ 的单调增加区间; 若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 内为单调减少函数, 此时 I 为 $y = f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数的图像是一条沿 x 轴正上升的曲线, 单调减少函数的图形是一条沿 x 轴正

向下降的曲线.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的; 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数不是单调的.

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称, 对任意 $x \in D(f)$, 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称. 如果点 $P(x, f(x))$ 在图像上, 则与它关于 y 轴对称的点 $P'(-x, f(x))$ 也在图像上, 如图 1-2.

奇函数的图像关于原点对称. 如果点 $P(x, f(x))$ 在图像上, 则与它关于原点对称的点 $P'(-x, -f(x))$ 也在图像上, 如图 1-3.

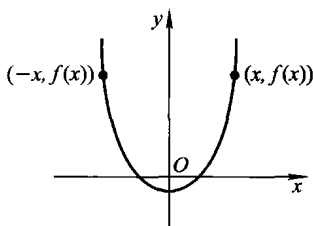


图 1-2

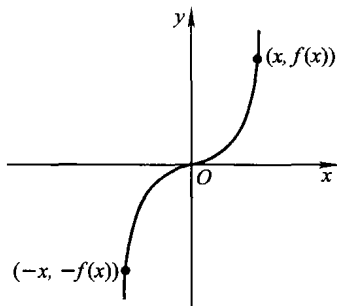


图 1-3

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

又例如 $f(x) = \sin x$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.

定义 1.4 设 T 为一个非零常数, 如果函数 $f(x)$ 对于任意 $x \in D(f)$, $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 使上述关系式成立的最小正数 T , 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为周期.

周期为 T 的周期函数特点: 在定义域内每隔一个长度为 T 的区间上, 函数图像有相同的形状.

例如, 函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 有不等式 $|f(x)| \leq M$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 内是有界函数, 即 $f(x)$ 在 I 内有界; 如果不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在 I 内是无界函数, 即 $f(x)$ 在 I 内无界.

有界函数的几何特点: 有界函数的图像夹在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

例如, 函数 $y = \cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 内是有界的, 因为存在正数 $M = 1$, 使得对于任意实数 x , 不等式 $|\cos x| \leq 1$ 恒成立.

又如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 3)$ 内是无界的, 而在 $[2, 5]$ 内是有界的.

练习 2 判别函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的奇偶性

解 因为 $f(x)$ 的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 是关于原点对称的区间.

又因为任取 $x \in D$, 有

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

练习 3 判断下列各组函数是否相同?

(1) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

(2) $y = \lg x^4$ 与 $y = 4 \lg x$

(3) $y = f(x) = 1$ 与 $u = g(v) = \sin^2 v + \cos^2 v$

解 (1) 不相同. 因为两函数对应法则不同, 值域也不一样. $y = x$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 而 $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 的值域为 $[0, +\infty]$.

(2) 不相同. 因为两函数定义域不同. $y = \lg x^4$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $y = 4 \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(3) 相同. 因为两函数的定义域都为 $\mathbf{R}$, 对应法则也一样.

常用的函数表示方法有列表法、图示法、解析法(公式法). 顾名思义, 分别指用表格、图形、数学式子表示两个变量之间的函数关系.

1.1.2 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数. 为后面学习方便起见, 现将这六类基本初等函数的表达式、定义域、性质、图像等列表表示出来. (见表 1-1)

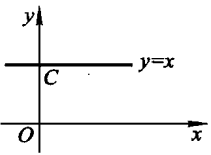
2. 复合函数

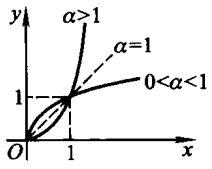
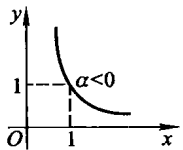
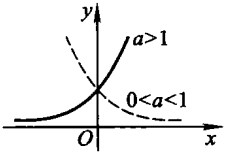
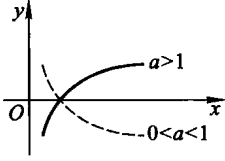
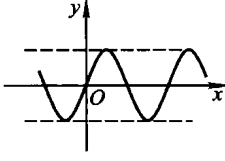
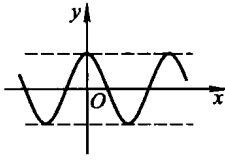
定义 1.6 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, 若 $D(f) \cap Z(\varphi) \neq \emptyset$, 则通过 u , 把 y 表示成 x 的函数 $y = f[\varphi(x)]$, 此时称 y 为 x 的复合函数, 其中 x 是自变量, y 是因变量, u 是中间变量.

例如, $y = \arcsin u, u = x^3$ 可复合成函数 $y = \arcsin x^3$; $y = e^u, u = \tan x$ 可复合成函数 $y = e^{\tan x}$.

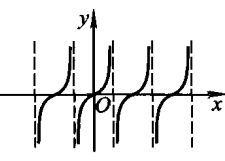
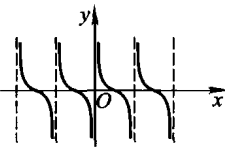
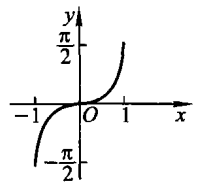
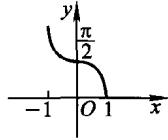
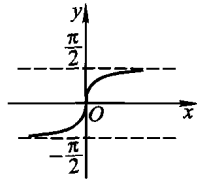
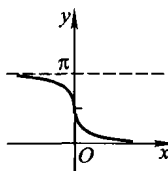
注意 两个函数能够复合成一个复合函数的前提是 $D(f) \cap Z(\varphi) \neq \emptyset$. 若不满足这个前提, 就不能复合. 如, $y = \arccos u$ 与 $u = 3 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $y = \arccos u$ 的定义域是 $[-1, 1]$, $u = 3 + x^2$ 的值域是 $[3, +\infty)$, 所以 $y = \arccos(3 + x^2)$ 没有意义.

表 1-1 基本初等函数表

函数名称	表达式	定义域	图形特征及其性质	
1. 常数函数	$y = C$ (C 为常数)	$x \in \mathbf{R}$		平行于 x 轴, y 轴上截距为 C 的直线.

函数名称	表达式	定义域	图形特征及其性质	
2. 幂函数	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$ 且 α 为常数)	定义域依 α 的取值而定, 但不论 α 为何值, 当 $x > 0$ 时都有定义.		$\alpha > 0$ 时, 曲线过 $(0,0)$, $(1,1)$ 点在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加. 这时 $y = x^{\alpha}$ 的图形为 α 次抛物线.
				$\alpha < 0$ 时, 曲线过点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内为单调减少. 以 x 轴、 y 轴为渐近线. 这时 $y = x^{\alpha}$ 的图像称为 α 次双曲线.
3. 指数函数	$y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)	$x \in \mathbf{R}$		曲线过点 $(0,1)$, 在 x 轴上方. (1) $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 为递减函数, 沿 x 轴正方向接近 x 轴; (2) $a > 1$ 时, $y = a^x$ 为递增函数, 沿 x 轴负方向接近 x 轴.
4. 对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)	$x \in \mathbf{R}$		曲线过点 $(1,0)$, 在 y 轴右边. (1) $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 为递减函数, 沿 y 轴正方向接近 y 轴; (2) $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 为递增函数, 沿 y 轴负方向接近 y 轴.
5. 三角函数 (1) 正弦	$y = \sin x$	$x \in \mathbf{R}$		(1) 过原点, 奇函数, 有界, 周期为 2π , 值域为 $[-1, 1]$;
(2) 余弦	$y = \cos x$	$x \in \mathbf{R}$		(2) 偶函数, 有界, 周期为 2π , 值域为 $[-1, 1]$;

续表

函数名称	表达式	定义域	图形特征及其性质	
(3) 正切	$y = \tan x$	$x \in \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$		(3) 奇函数, 无界, 周期为 π , 在每个小定义区间内单调减少, 值域为 $\mathbf{R}$.
(4) 余切	$y = \cot x$	$x \in \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$		(4) 奇函数, 无界, 周期为 π , 在每个小定义区间内单调增加, 值域为 $\mathbf{R}$.
6. 反三角函数 (1) 反正弦	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$		(1) 有界, 过原点, 递增函数, 奇函数, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
(2) 反余弦	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$		(2) 有界, 递减函数, 值域为 $[0, \pi]$;
(3) 反正切	$y = \arctan x$	$x \in \mathbf{R}$		(3) 有界, 过原点, 递增函数, 奇函数, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
(4) 反余切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in \mathbf{R}$		(4) 有界, 递减函数, 值域为 $(0, \pi)$.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. (即中间变量可以有多个) 如, $y = \sqrt{u}$, $u = \ln v$, $v = \tan x$, 可以复合成函数 $y = \sqrt{\ln \tan x}$, 其中 u, v 都是中间变量.

练习 4 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = \sqrt{3x-1}$; (2) $y = 2^{e^{-x^2}}$.

解 (1) $y = \sqrt{3x-1}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = 3x-1$ 复合而成.

(2) $y = 2^{e^{-x^2}}$ 是由 $y = 2^u, u = e^v, v = -x^2$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 1.7 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合过程构成的,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如:函数 $y = e^{\frac{x^2}{3}}, y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), y = \cot 3x - e^{2x} + \sin ax$, 都是初等函数.

否则就不是初等函数.

我们后面所讨论的函数大多数都是初等函数,分段函数一般不是初等函数.

例如, $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ 是初等函数,因为它实际上就是 $y = |x| = \sqrt{x^2}$, 可看作是由 $y = \sqrt{u}, u = x^2$

复合而成的. 分段函数若可以表示成一个式子,则为初等函数,否则不是.

1.1.3 常见经济函数

1. 货币的时间价值函数

货币是流通领域不可缺少的执行交换的媒介,做财经工作的人,总是要和货币打交道,但是货币的价值与时间是有关联的,一笔款若存入银行,它会随着存放时间的增长而增长利息;若参与投资,会由于生产和经营活动而取得利润;但货币若闲置不用,却会因物价指数上升而贬值,这些情况都表现为币值与时间的各种函数关系. 因此,从财经工作的人,必须树立货币的时间价值观念.

(1) 单利计算公式:设初始本金为 A_0 元,年利率为 R ,则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数,它们之间的关系为:

$$A_m = A_0 + mRA_0 = A_0(1 + mR)$$

例如:若本金 A_0 为 2 万元,存入银行的年利率为 10%,则第三年末的本利和为:

$$A_3 = 2(1 + 3 \times 0.1) = 2.6 \text{ (万元)}$$

(2) 复利计算公式:设初始本金为 A_0 元,年利率为 R ,则第一年末的本利和为:

$$A_1 = A_0 + RA_0 = A_0(1 + R)$$

将 A_1 存入银行,则第二年末的本利和:

$$A_2 = A_0(1 + R) + A_0(1 + R)R = A_0(1 + R)^2$$

再将 A_2 存入银行,如此反复,则第 m 年末的本利和 A_m 是时间 m 的函数,其函数关系为:

$$A_m = A_0(1 + R)^m$$

这就是以年为期的复利计算公式.

在前面的例子中,对同样的本金和年利率,若按复利计算公式计算,则第三年末的本利和为

$$A_3 = 2(1 + 0.1)^3 = 2.662 \text{ (万元)}$$

案例 1 一张票据到期时的本利和应为 2 万元,规定提前月付要按月利率 1% 的复利(就是利上加利)贴金(向银行支付利息),现持票人要提前三个月兑付,问兑付时实得金额多少?

解 设实得金额为 x 万元,则

$$2 = x \cdot (1 + 1\%)^3$$

从而

$$x = \frac{2}{1.01^3} = 1.941\ 2(\text{万元})$$

说明提前三个月兑付时,实得金额为 1.941 2 万元.

案例 2 某人在 2008 年欲用 1 000 元投资 5 年,设年利率为 5%,试分别按单利、复利计算到第 5 年末,该人应得的本利和 S .

解

按单利计算: $S = 1\ 000(1 + 0.05 \times 5) = 1\ 250(\text{元})$

按复利计算: $S = 1\ 000(1 + 0.05)^5 \approx 1\ 276.28(\text{元})$

下表我们比较了利息按单利、复利和连续复利计算从 2008 年到 2012 年的本利和,

年份	总额(元) 年单利率计	总额(元) 年复利率计
2008	1 050.00	1 050.00
2009	1 100.00	1 102.50
2010	1 150.00	1 157.63
2011	1 200.00	1 215.51
2012	1 250.00	1 276.28

我们看到,当按复利计算时,投资者赚钱多;按单利计算时,投资者赚钱少.

2. 总成本与平均成本

根据经济学理论,产品的总成本是固定成本与变动成本两部分之和;固定成本 C_0 (厂房及设备折旧费,管理人员工资,保险费等),它不随产量 x 的变化而变化,是一个常量;变动成本(原材料费,能源消耗费,生产工人工资等),它随着产量 x 的变化而变化,即为 x 的函数,记作 $C_1(x)$. 于是总成本函数的一般形式是:

$$C(x) = C_0 + C_1(x)$$

当产量 $x=0$ 时的总成本就是固定成本,有 $C(0) = C_0$.

总成本函数 $C(x)$ 与产量 x 的商,称为平均成本函数,记作:

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

平均成本函数反映的是产量达到 x 时的平均单位成本.

3. 收益与利润

收益函数是产品销售后所获得的总收益与产品销售的函数关系. 当产品销售为 x ,价格为 p 时,收益函数的一般形式是:

$$R(x) = px$$

当销量 $x=0$ 时, $R(0) = 0$.

如果产销平衡,即产量为 x ,销量也为 x 时,利润函数的一般形式是:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

案例 3 若某公司生产某产品,固定成本为 2 万元,每当生产一台产品成本增加 3 千元,每台