非线性微分方程

李继彬 李存富 编

ixianxing Weifen Fangcheng

成都科技大学出版社

非线性微分方程

李继彬　李存富　编

非线性微分方程

李继彬　李存富　编

成都科技大学出版社出版发行
四川省新华书店经销
成都科技大学印刷厂印刷
⁻本787×1092毫米　1/32　印张：8.9375
8年6月第1版　　1988年6月第1次印刷
：193千字　　　　　印数：1500
3N7—5616—0183—2/O·24(课)
定价：1.49元

前　　言

本书是为工科研究生编写的。编者试图以较少的篇幅介绍非线性微分方程的近代方法，并兼顾某些应用。

本书初稿曾以讲义形式在 1980 —— 1986 年先后为昆明工学院研究生讲授过四遍，并在兄弟院校进行过交流，这次又作了一些修改和补充。

第一章是预备知识，介绍有限维空间中线性算子的谱理论及矩阵函数，它是第二章线性系统的必要基础。第二章介绍线性系统理论，主要是解的结构、常系数线性微分方程组的解法与线性周期系统。第三章介绍一般系统的解的存在唯一性定理，它是以后各章的基础。第四章介绍在非线性振动理论中常用的定性方法，并给出某些应用。第五章介绍稳定性理论。第六章介绍解析方法（即摄动理论）。每章末都附有习题，供讲课后选作。

编者希望通过本门课程的教学，为研究生提供数学工具，以便尽快地投入本专业的研究工作。

鉴于编者学识浅薄，倘有谬误，欢迎不吝指正。

编　者

一九八七年

目　　录

第一章　预备知识

§1　线性空间

1.1. 线性空间

定义 1.1　设 C 为复数域，X 为一非空集合．若 X 中的元素满足下列公理，称 X 为数域 C 上的线性空间．X 中的元素称“向量”．

一、X 关于加法构成可交换群，即若 x，y，$z\in X$ 则成立着：

1．加法封闭性：$\forall x$，$y\in X$，$x+y\in X$，$x+y$ 称“和”；

2．加法结合律：$(x+y)+z=x+(y+z)$；

3．存在零元素：$\theta\in X$ 使得 $x+\theta=x$；

4．存在负元素：$-x\in X$，使得 $-x+x=\theta$；

5．加法交换律：$x+y=y+x$．

二、在 X 中定义一个与数量的乘法运算，即设 x，$y\in X$，α，$\beta\in C$ 成立着：

1．乘法封闭性：$\forall x\in X$，$\forall \alpha\in C$，$\alpha x\in X$；

2．乘法结合律：$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

3．乘法分配律：$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y;$$

4．$1\cdot x=x$．

例 1 全体实函数，按函数加法与函数和实数的乘法，构成实数域上的线性空间.

例 2 实数域 R 上的矩阵 A_{mn} 的全体，按矩阵的加法与矩阵和数的乘法，构成 R 上的线性空间.

1.2 线性空间的维数、基底与坐标

设 X 为线性空间.

定义 1.2 设 x_1，x_2，$\cdots x_n \in X$，若存在不全为零的数 α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n \in C$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \tag{1.1}$$

成立，则称 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 线性相关. 反之，若 (1.1) 仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_n = 0$ 时才成立，则称 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 线性无关.

定义 1.3 设 e_1，e_2，$\cdots$，$e_n \in X$，且它们线性无关. 若 $\forall x \in X$ 可表为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \qquad \xi_1, \ \xi_2 \cdots, \ \xi_n \in C \tag{1.2}$$

则称 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 为 X 的一组基底，称 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_n 为 x 在基底 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 下的坐标.

性质 1 设 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 为 X 的一组基底，则 X 中任意 n 个线性无关元素 e'_1，e'_2，$\cdots$，e'_n 也组成 X 的基.

证 任取 $x \in X$，$x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$，因为 e'_1，$\cdots$，$e'_n \in X$，

故有

$$e_j' = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} e_i \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

兹证 $\det\{\gamma_{ij}\} \neq 0$. 事实上，假设不然，则 η_1，η_2，…，η_n 的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \eta_i = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

必有非零解 α_1，α_2，…，α_n. 从而

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \alpha_j \right) e_i = \theta$$

这与 e_1'，e_2'…，e_n' 线性无关相矛盾.

由于 $\det\{\gamma_{ij}\} \neq 0$，则存在 η_1，η_2，…，η_n 使 $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \eta_j = \xi_i$. 于是

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j' = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \eta_j e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = x$$

从而 e_1'，e_2'，…，e_n' 为 X 的一组基底. 证毕.

注意 在性质 1 的证明中，矩阵 $A = \mathrm{matr}\{r_{ij}\}$ 称为由基 e_1，e_2，…，e_n 到新基 e_1'，e_2'，…，e_n' 的过渡矩阵. 同一个向量 x 在基$\{e_i\}$下有坐标 ξ_1，…，ξ_n，在新基 $\{e_i'\}$ 下有坐标 η_1，…，η_n，则两组坐标间有关系为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad \vec{\xi}=A\vec{\eta} \tag{1.3}$$

性质 2 设 $e_1, \cdots, e_n$ 及 $e_1', \cdots, e_m'$ 分别是 X 的基，则 $m=n$.

证 不妨设 $m \geqslant n$. 兹证 $m=n$. 事实上，如果 $m>n$，则因 $e_1, \cdots, e_n$ 为 X 的基，由性质1，n 个线性无关的 $e_1', \cdots, e_n'$ 又组成 X 之基，故有

$$e_m'=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i'$$

这与 $e_1', e_2', \cdots, e_m'$ 线性无关相矛盾. 证毕.

定义 1.4 若有 n 个元素组成 X 的一组基，称 X 为 n 维线性空间；若基由无限多个元素组成，称 X 为无限维线性空间.

1.3 线性子空间

定义 1.5 设 X 为数域 C 上的线性空间，M 为 X 中元素组成的子集合. 若 M 对 X 的两种运算也构成线性空间，称 M 为 X 的一个线性子空间.

由单个零向量组成的集合及 X 本身是两个特殊的子空间，称为 X 的平凡的子空间.

若 M 与 N 是 X 的两个子空间，则它们的交 $M \cap N$ 也是 X 的子空间. 此外，X 中 m 个线性无关元素的线性组合的全体构成 X 的线性子空间，称之为由线性无关元 $e_1, \cdots,$

e_m 所张成的线性子空间.

定义 1.6 设 M, N 为 X 的线性子空间, $S=M+N$ 表示由 M 中每个元素 x 与 N 中每个元素 y 按和 $x+y$ 组成的集合. 若 S 中每个元素, 只能唯一地表成 M 中一元素与 N 中一元素之和, 称 S 为 M 与 N 的直接和, 记为 $M\dot{+}N=S$.

定理 1.1 设 $S=M+N$, 则 $S=M\dot{+}N$ 的充要条件是 $M\cap N=\theta$.

证 若 $M\cap N\neq\theta$, 则存在 $e\neq\theta$, $e\in M\cap N$. 在 M 及 N 中分别取元素 x 及 y, 令 $z=x+y+e=(x+e)+y=x+(y+e)\in M+N$. 但 $x+e\in M$, $y+e\in N$, 可见 z 有两种不同表示法, 与直接和定义相矛盾. 必要性得证.

反之, 设 $M\cap N=\theta$, $z\in S$, 若 z 有两种不同表示法: $z=x_1+y_1=x_2+y_2$, x_1, $x_2\in M$, y_1, $y_2\in N$, 则 $x_1-x_2=y_2-y_1=z_1$, 因 $z_1\in M$, $z_1\in N$, 则有 $z_1\in M\cap N$, 由于 $M\cap N=\theta$, 故 $z_1=\theta$, 即 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 充分性得证.

定理 1.2 设 M, N 为 n 维线性空间 X 的子空间, 且 $S=M\dot{+}N$, 则 M 的基 e_1, e_2, $\cdots e_r$ 与 N 的基 e_1', e_2', $\cdots$, e_s' 合起来构成 S 的基.

证 $\forall z\in S$, $z=x+y$, $x\in M$, $y\in N$, 因为

$$x=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i,\qquad y=\sum_{i=1}^{s}\beta_i e_i'$$

故有

$$z=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{s}\beta_i e_i'$$

从而 S 中每个元素都可以用 e_1，…，$e_r, e_1'\cdots e_s'$ 线性表示.

兹证 $e_1,\cdots,e_r$，$e_1',\cdots,e_s'$ 线性无关. 设它们线性相关，即有不全为零的数 α_1，…，α_r，β_1，…，β_s 使得

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{s}\beta_i e_i'=\theta$$

令 $x=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i$，$y=\sum_{i=1}^{s}\beta_i e_i'$ $x\in M$，$y\in N$，故有 $x=-y\in M\cap N$. 因为 S 是 M 与 N 的直接和，$M\cap N=\theta$，即 $x=y=\theta$. 从而 $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=\beta_1=\cdots=\beta_s=0$. 这与假设相矛盾.

证毕.

类似地，可定义 $S=N_1\dot{+}N_2\dot{+}\cdots\dot{+}N_s$，并且不难证明当且仅当 $N_i\cap(\bigcup_{j\neq i}N_j)$ $(j,i=1,2,\cdots,s)$ 时，S 为 N_1，N_2，…，N_s 的直接和. 同样有类似定理 1.2 的相应结论.

定理 1.3（维数定理） 设 M，N 为 X 的子空间，$\dim M=r$，$\dim N=s$，$\dim(M\cap N)=k$，则 $\dim(M+N)=\dim M+\dim N-\dim(M\cap N)$，即 $\dim(M+N)=r+s-k$.

证 在 $M\cap N$ 中选定一组基 e_1，e_2，…，e_k，再从 M 中选出 a_1，a_2，…，a_{r-k}，这两组向量组成 M 的基. 从 N 中选出 b_1，b_2，…，b_{s-k} 与 e_1，e_2，…，e_k 一起组成 N 的基. 故 $M+N$ 中每个元素可通过 e_1，$\cdots e_k$，a_1，…，a_{r-k}，

b_1, …, b_{s-k} 线性表出.

考察由 b_1, …, b_{s-k} 张成的子空间 P, 则显然有 $M+N=M+P$. 兹证 $M\cap P=\theta$, 则 $M+N=M\dot{+}P$, 从而由定理 1.2, e_1, …, e_k, a_1, …, a_{r-k}, b_1, …, b_{s-k} 共 $r+s-k$ 个元素组成 $M+N$ 的基, 即

$$\dim(M+N)=r+s-k$$

若 $M\cap P\neq\theta$, 则存在 $x\in P$ 且 $x\in M$, $x\neq\theta$, 因为 $P\subseteq N$, 故 $x\in N$, $x\in M$, 即 $x\in M\cap N$, 因此

$$x=\sum_{i=1}^{s-k}\alpha_i b_i=\sum_{i=1}^{k}\beta_i e_i$$

由于 e_1, …, e_k, b_1, …, b_{s-k} 为 N 的基, 它们线性无关, 从而 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{s-k}=\beta_1=\cdots=\beta_k=0$, $x=\theta$. 这与假设矛盾.

证毕.

§2 线性算子

2.1. 映射的概念

设 X, Y 为两集合, 映射 σ: $X\to Y$ 是指一个法则, 使得 X 中的每个元素 x 有 Y 中的一个确定元素 y 与之对应. y 称 x 在映射 σ 下的象, x 称 y 的原象.

映射 σ: $X\to Y$ 称为单射 (injection), 若它是一对一的; 称为满射 (surjection), 若它是 X 到 Y 上的映射; 称为双射 (bijection), 若它既是单射又是满射, 即若 x_1, $x_2\in X$, 且 $x_1\neq x_2$, 则 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$ 且对每个 $y\in Y$, 存在 $x\in X$, 使得 $\sigma(x)=y$.

设 X, Y 是线性空间. 若 x_1, $x_2 \in X$, α, $\beta \in C$, 恒有 $\sigma(\alpha x_1+\beta x_1)=\alpha\sigma(x_1)+\beta\sigma(x_2)$, 则称 σ 为 X 与 Y 之间的同态（线性）映射.

线性映射称同构映射, 若它是双射. 两线性空间之间若存在同构映射 σ: $X \to Y$. 称 X 与 Y 同构.

显然, 任意两个 n 维线性空间必同构.

2.2. 线性算子

定义 2.1 设 X 是 C 上的线性空间, X 上的一个算子 $\mathscr{A}$ 是指 X 到它自身的一个映射. 若该映射是同态的, 则称线性算子.

若 X 是 n 维的, 线性算子 $\mathscr{A}$ 通常称线性变换.

设 X 的基为 e_1, e_2, $\cdots$, e_n, 以下说明线性算子 $\mathscr{A}$ 可用一个 $n\times n$ 矩阵来表示. 设 $x\in X$, $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$, $y=\mathscr{A}x=\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j$, 若 $\mathscr{A}e_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i$, 即

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{A}e_1,\mathscr{A}e_2,\cdots,\mathscr{A}e_n)\\
&\qquad=(e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

或

$\mathscr{A}(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)=(\mathscr{A}e_1,\ \mathscr{A}e_2,\ \cdots,\ \mathscr{A}e_n)=(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)A$, 记 $A=\mathrm{matr}\{\alpha_{ij}\}$, 矩阵 A 称线性算子 $\mathscr{A}$ 在

基 e_1，e_2，…，e_n 下的矩阵.

从上述定义可见

$$\mathscr{A}x=\mathscr{A}\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mathscr{A}e_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j e_i=\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_i$$

故有

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad \vec{\eta}=A\vec{\xi} \tag{2.1}$$

(2.1) 表示在 X 的基 e_1，e_2，…，e_n 之下，元素 x 经 $\mathscr{A}$ 变为 $y=\mathscr{A}x$ 时，相应坐标之间的关系.

容易看出，对于取定的基，我们建立了数域 C 上的 n维线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}$ 与数域 C 上的 n 阶矩阵 A 之间的一一对应关系（双射），故 $\mathscr{A}$ 与 A 之间在映射意义下同构.

线性算子 $\mathscr{A}$ 的矩阵 A 与 X 的基有关，基不同，一般说来 A 也就不一样. 在不同基下，同一个线性变换 $\mathscr{A}$ 的对应矩阵之间有何关系呢？

设 $\mathscr{A}$ 在基 e_1，e_2，…，e_n 下的矩阵为 A，在基 e_1'，e_2'，…，e_n' 下的矩阵为 B，从旧基到新基的过渡矩阵为 T，即

$$(e_1', e_2', \cdots, e_n')=(e_1, e_2, \cdots, e_n)T$$

于是从

$$(\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \cdots, \mathscr{A}e_n)=(e_1, e_2, \cdots, e_n)A$$

$$(\mathscr{A}e_1', \mathscr{A}e_2', \cdots, \mathscr{A}e_n')=(e_1', e_2', \cdots, e_n')B$$

得

$(e_1', e_2' \cdots, e_n')B=(\mathscr{A}e_1', \mathscr{A}e_2', \cdots, \mathscr{A}e_n')=\mathscr{A}(e_1', e_2', \cdots, e_n')=\mathscr{A}[(e_1, e_2, \cdots, e_n)T]=[\mathscr{A}(e_1, e_2, \cdots, e_n)]T$
$=(\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \cdots, \mathscr{A}e_n)T=(e_1, e_2, \cdots, e_n)AT$
$=(e_1', e_2', \cdots, e_n')T^{-1}AT$

即
$$B=T^{-1}AT \tag{2.2}$$

定义 2.2 若 A, B 为数域 C 上两 $n\times n$ 矩阵，若存在可逆矩阵T，使得 $B=T^{-1}AT$，称 A 与 B相似，记为$A\sim B$.

由定义 2.2 及前面的讨论可知，线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵相似. 反之，若两矩阵相似，可将它们视为同一线性变换在两组基下对应的矩阵.

2.3. 线性算子的零空间（核）与值域

定义 2.3 线性空间 X 中满足$\mathscr{A}x=\theta$ 的全体 x 之集合记为 $N(\mathscr{A})$，称为线性算子$\mathscr{A}$的零空间（核）. $\mathscr{A}$的全体象$\mathscr{A}x$ 组成的集合，称为$\mathscr{A}$的值域（*range*），记为 $R(\mathscr{A})$.

容易证明，$N(\mathscr{A})$，$R(\mathscr{A})$ 都是 X 的线性子空间.

定理 2.1 设 X 为 n 维线性空间，$\mathscr{A}$为其上定义的线性算子，则

$$\dim N(\mathscr{A})+\dim R(\mathscr{A})=n \tag{2.3}$$

称 $\dim R(\mathscr{A})$ 为$\mathscr{A}$的秩，$\dim N(\mathscr{A})$ 为$\mathscr{A}$的零度.

证 设 $\dim N(\mathscr{A})=\nu$，$\dim R(\mathscr{A})=\rho$，令 $N(\mathscr{A})$ 的基为 $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$，在此基础上再加上 X 中的元素 $x_{\nu+1}$，

$\cdots$，x_n，构成 X 的基．取 X 中的任一元素 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$，则

$\mathscr{A}x=\sum_{i=\nu+1}^{n}\xi_i\mathscr{A}x_i$，这表明 $\mathscr{A}x_{\nu+1}$，$\cdots$，$\mathscr{A}x_n$ 张成值域 $R(\mathscr{A})$．兹证 $\mathscr{A}x_{\nu+1}$，$\cdots$，$\mathscr{A}x_n$ 线性无关．事实上，设有 $n-\nu$ 个不全为 0 的数 $\alpha_{\nu+1}$，$\cdots$，α_n 使得 $\alpha_{\nu+1}\mathscr{A}x_{\nu+1}+\cdots+\alpha_n\mathscr{A}x_n=\theta$，则 $\mathscr{A}(\alpha_{\nu+1}x_{\nu+1}+\cdots+\alpha_n\mathscr{A}x_n)=\theta$，即 $\alpha_{\nu+1}x_{\nu+1}+\cdots+\alpha_n x_n\in N(\mathscr{A})$，这与 x_1，$\cdots$，x_ν 为 $N(\mathscr{A})$ 之基且 x_1，$\cdots$，x_n 线性无关相矛盾．故 $\mathscr{A}x_{\nu+1}$，$\cdots$，$\mathscr{A}x_n$ 构成 $R(\mathscr{A})$ 之基，从而 $\dim R(\mathscr{A})=n-\nu$．　　证毕．

我们称定理 2.1 中的 $x_{\nu+1}$，$\cdots$，x_n 为值域的生成组．设值域生成组张成的空间为 $P(\mathscr{A})$，则有 $X=N(\mathscr{A})\dot{+}P(\mathscr{A})$．

2.4 线性空间的不变子空间

定义 2.4　设 M 是线性空间 X 的一个子空间，若对于 M 中任一个元素 x 及定义在 X 上的线性算子 $\mathscr{A}$，恒有 $\mathscr{A}x\in M$，称 M 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．

例 1　整个空间 X 与由单个零元素构成的子空间，对每个线性变换 $\mathscr{A}$ 都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．

例 2　$\mathscr{A}$ 的值域 $R(\mathscr{A})$ 及核 $N(\mathscr{A})$ 都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．

定理 2.2　设 M 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，$M\subset X$，$\dim M=m$，$\dim X=n(0<m<n)$，则可选适当的基使 $\mathscr{A}$ 所对应的