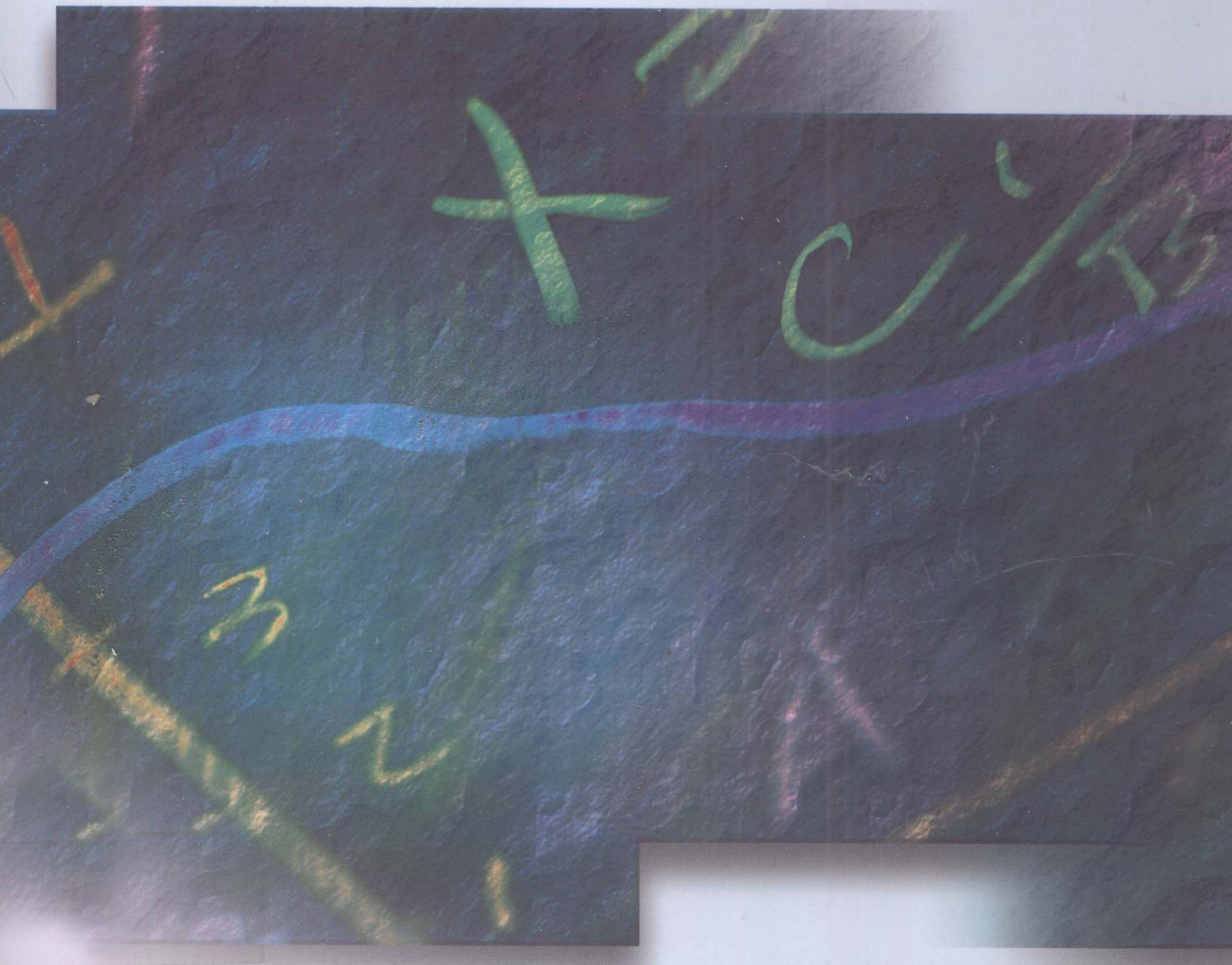
中等职业学校教学辅导用书 · 数学系列

数学学习指导与练习（第2版）

（第2册）

■孙明红　主编　■刘学卫　李励信　副主编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

中等职业学校教学辅导用书·数学系列

数学学习指导与练习(第2版)

(第2册)

孙明红　主编
刘学卫　李励信　副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

《数学学习指导与练习(第2版)》是学生掌握数学知识,培养数学能力的辅导用书,全书共2册,本书是第2册。本书以指导和训练为主,概要地介绍了中等职业学校学生必修的部分数学课内容。

本书的主要特点是:用简炼的语言总结数学概念,用具体的例题来讲解解题思路。题型覆盖面广,解题思路灵活。学生可通过书中大量的单元练习和综合习题来加深理解。

本书突出基础性、实用性、灵活性和训练性,是中等职业学校教师教学和学生学习的必备参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

数学学习指导与练习.第2册/孙明红主编.—2版.—北京:电子工业出版社,2005.8
中等职业学校教学辅导用书·数学系列
ISBN 7-121-01663-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.数学课-专业学校-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第093793号

责任编辑:刘文杰
印　　刷:北京季蜂印刷有限公司
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
经　　销:各地新华书店
开　　本:787×1092　1/16　印张:8.75　字数:221千字
印　　次:2006年2月第3次印刷
印　　数:3000册　定价:9.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

第2版前言

数学是学生必须学好的一门文化课,同时也是学生学好后续专业课的基础。数学的思想、内容、方法和语言在现代科学技术、生产和生活中的应用越来越广泛,已成为现代文化不可缺少的组成部分,它对于提高学生的数学素养,提高学生分析问题、解决问题的能力,发展学生的创新意识,培养其科学的思维方法和辩证唯物主义思想有着不可替代的作用。我们编写这套学习指导与练习,就是要为学生学好数学提供有力的支持。

本书共分两册,分别与人民教育出版社出版的中等职业学校国家规划教材(提高版)第一、二册配套。内容包括:学习目标、学法指导、同步训练三个部分。其中,学法指导部分包括例题赏析、易错易混问题剖析,力求在开拓学生的解题思路、引导学生掌握适当的数学思想方法、澄清错误的认识等方面发挥重要作用。而同步训练部分设有A、B两组题目,A组题目主要是为巩固掌握课本知识,形成初步技能而设计的基本题;B组题目为提高学生分析问题、解决问题的能力而设,供学有余力的学生选用。每一单元、每一章都有一份适当的测试题。每册书的最后都附有同步训练题、单元测试题和综合测试题的答案与提示。

本书既是学生学好数学的学习指导书,又是学习数学过程中必不可少的同步训练册。其主要特点如下:

1. 科学性强。力求没有科学性错误,更注重符合学生的认知规律,符合职业学校的教学实际。训练题分A、B两组,题目的设置由易到难,教师可根据学生的实际情况,指导学生有针对性地进行练习,体现了分层次教学的思想。

2. 趣味性强。这套学习指导与练习并不仅限于学习指导与同步训练的题目,而且还选用适量的小知识、趣味题、名人名言等,希望能为激发学生的学习兴趣做出贡献。

3. 注重数学思想方法的指导与训练。例题都是精选的、典型的。解答过程前有思路分析、后有点拨或点评,对于开拓学生思路、培养探索精神大有裨益。

本书由孙明红任主编,刘学卫、李励信任副主编,参加编写工作的还有李长林、吴硕、闫桂明、祁志卫、赵纪向、程宝顺、田连军等同志。

本书的编写得到了各地职教室、职教科和职业学校的领导、老师和同学们的大力支持，特此一并致谢。

编写一套适合职业学校特点的学习指导与练习，并非易事，但我们会继续努力，认真学习，加强理论与实践的结合，同时，也希望广大教师和同学们在使用过程中及时提出宝贵的意见，以便我们及时修改和补充，使其日臻完善。

编　者

2005 年 7 月

目　录

第 9 章　平面解析几何

9.1　直线的方程

9.1.1　学习目标

体会一点和一个方向能够确定一条直线的原理，理解直线的方向向量、法向量、倾斜角、斜率等概念. 掌握直线方程的点向式、点斜式、点法式、斜截式和一般式.

9.1.2　学法指导

由于 90° 角的正切值不存在，所以当直线垂直于 x 轴时没有斜率，垂直于 x 轴的直线方程 $x = a$，垂直于 y 轴的直线方程 $y = b(a, b \in \mathbf{R})$.

由定义知直线的方向向量 $\vec{v}$ 和法向量 $\vec{n}$ 互相垂直，直线 $Ax + By + C = 0$ 的一个法向量 $\vec{n} = (A, B)$，直线的一个方向向量 $\vec{v} = (B, -A)$ 或 $\vec{v} = (-B, A)$.

直线的方向向量与斜率也可以知其一，求其二. 如果已知直线 l 的一个方向向量 $\vec{v} = (v_1, v_2)$，则斜率 $k = \frac{v_2}{v_1}$；如果已知直线 l 的斜率为 k，则它的一个方向向量 $\vec{v} = (1, k)$.

例题赏析

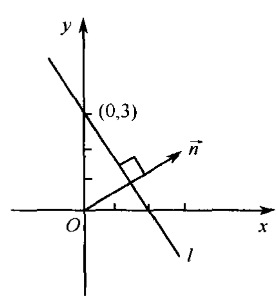
［例 1］　已知直线 $l: \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2}$，写出直线 l 经过的一个点、一个方向向量、一个法向量、斜率.

解： 直线 l 经过点 $(-1, 5)$，一个方向向量 $\vec{v} = (3, 2)$，一个法向量 $\vec{n} = (2, -3)$，斜率 $k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3}$

点拨： 直线的方向向量 $\vec{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} l \text{ 的法向量 } \vec{n} = (v_2, -v_1) \text{ 或 } (-v_2, v_1) \\ l \text{ 的斜率 } k = \frac{v_2}{v_1} (v_1 \neq 0) \end{cases}$

由直线 l 的斜率为 $k \Rightarrow l$ 的方向向量 $\vec{v} = (1, k)$.

［例 2］　画直线. 今后我们将会遇到许多需要画直线的问题，怎样才能根据直线方程快且准确地画出直线呢？我们来看下面的例子.



(1) 画直线 $3x + 2y - 6 = 0$

解： 令 $x = 0$，得 $y = 3$　　$\therefore$ 直线过点 $(0, 3)$

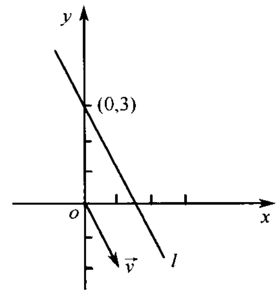
又 $\because$ 直线的一个法向量 $\vec{n} = (3, 2)$

过点 $(0, 3)$ 画直线 l 垂直于 $\vec{n} = (3, 2)$，如图所示.

(2) 画直线 $y = -2x + 3$

解： $\because$ 斜率 $k = -2$　　$\therefore$ 方向向量 $\vec{v} = (1, -2)$，截距 $b = 3$　　$\therefore$ 直线过 $(0, 3)$

∴ 过点(0,3) 画直线 l 平行于 $\vec{v}=(1,-2)$,如图所示.



想一想

(1) 怎样画直线$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}$?

(2) 怎样利用"两点确定一条直线"画直线$3x-4y=12$?

9.1.3 同步训练

A 组

1. 判断题:

(1) 与直线平行的向量叫做直线的方向向量.(　　)

(2) 直线的方向向量是与直线平行的非零向量.(　　)

(3) 直线的法向量是与直线在同一平面内且与直线垂直的非零向量.(　　)

(4) 一条直线有且仅有一个方向向量.(　　)

(5) 直线向上的方向与 x 轴的夹角叫做直线的倾斜角.(　　)

(6) 如果一条直线的斜率不存在,那么这条直线的倾斜角不存在.(　　)

2. 填空题:

(1) 过点 $P(0,2)$ 且平行于 $\vec{v}=(-2,3)$ 的直线的点向式方程是________.

(2) 过点 $Q(-2,5)$ 且垂直于 $\vec{n}=(3,-4)$ 的直线的点法式方程是________.

(3) 若直线 l 的点向式方程是$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{5}$,则 l 的一个方向向量 $\vec{v}=$ ________,斜率 $k=$ ________,一个法向量 $\vec{n}=$ ________.

(4) 直线 $3x-4y+1=0$ 的一个法向量 $\vec{n}=$ ________,一个方向向量 $\vec{v}=$ ________.

(5) 已知点 $A(3,0)$、$B(-2,1)$,则直线 AB 的斜率 $k=$ ________.

(6) 与 x 轴平行的直线的斜率 $k=$ ________.

3. 求下列直线的方程,并化为一般式:

(1) 经过两点 $M_1(0,-2)$、$M_2(3,2)$

(2) 过点 $P(2,-1)$,倾斜角为$\frac{\pi}{3}$

(3) 过点 $P(-2,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+5=0$

(4) 过点 $P(3,-1)$ 且平行于直线 $2x+y-10=0$

B 组

1. 选择题:

(1) 下列命题正确的是(　　)

(A) 一条直线有且仅有一个方向向量　　(B) 一条直线的法向量与该直线平行

(C) 所有直线都有斜率　　(D) 所有直线都有倾斜角

(2) 直线 $y=-4x+3$ 的斜率、方向向量、法向量分别是(　　)

(A) $k=-3,\vec{v}=(1,-3),\vec{n}=(-3,1)$　　(B) $k=4,\vec{v}=(-1,-4),\vec{n}=(4,-1)$

(C) $k=-3,\vec{v}=(-1,3),\vec{n}=(3,-1)$　(D) $k=-4,\vec{v}=(1,-4),\vec{n}=(4,1)$

(3) 直线 $\sin\alpha\cdot x-y+1=0$ 的斜率 k 的取值范围是(　　)

(A) $k>0$　(B) $k\in[-1,1]$　(C) $k\in(-\infty,+\infty)$　(D) $k<0$

(4) 若三点 $A(2,3)$、$B(a,4)$、$C(8,a)$ 在同一条直线上，则 a 的值为(　　)

(A)0　(B)5　(C)0 或 5　(D)0 或 -5

(5) 直线 $(2m^2-5m+2)x-(m^2-4)y+5=0$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则 m 的值是(　　)

(A)3　(B) -3　(C)2 或 3　(D) -3 或 -2

2. 解答题：

(1) 已知 $\triangle ABC$ 顶点 $A(-3,0)$，$B(2,1)$，$C(-2,3)$，

求：① BC 边所在直线的方程

② BC 边上的高所在直线的方程

③ 过点 A 与 BC 平行的直线方程

(2) 若直线 $(2m^2-7m+3)x+(m^2-9)y+3m^2=0$ 在 y 轴上的截距是 -4，求 m 的值

(3) 直线 l 经过点 $(-2,4)$，其倾斜角是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 的倾斜角的 2 倍，求 l 的方程

9.2　两条直线的位置关系

9.2.1　学习目标

掌握两直线平行、重合、垂直的条件，两直线的夹角公式，会求两直线的交点.

9.2.2　学法指导

两直线的位置关系是由它们的系数 A、B、C 来确定的. 学习判定方法时应在理解的基础上自然记忆. 例如，判定两直线平行，要想到：两直线平行，则它们的法向量必平行，而两向量平行的充要条件是它们的坐标对应成比例，即课本上所列的 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

例题赏析

[例 1]　求过点 $(-2,-1)$ 且与直线 $l:\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$ 的夹角为 $60°$ 的直线方程.

分析：为了减少未知数，可利用点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$.

解：设所求直线的点斜式方程为 $y+1=k(x+2)$

整理得　$kx-y+2k-1=0$

$\because$ 两直线的夹角为 $60°$

$\therefore \frac{|\sqrt{3}k+(-1)\times 1|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\cdot\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\cos 60°=\frac{1}{2}$　即 $\frac{|\sqrt{3}k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

解得 $k=0$ 或 $k=\sqrt{3}$

$\therefore$ 当 $k=0$ 时，所求直线方程是 $y+1=0$

当 $k=\sqrt{3}$ 时，所求直线方程是 $\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}-1=0$

9.2.3 同步训练

A 组

1. 判断题:

(1) 直线 $x-3y-3=0$ 和 $2x-6y-3=0$ 垂直.(   )

(2) 直线 $2x-5y+1=0$ 和 $5x+2y-1=0$ 平行.(   )

(3) 直线 $x=3$ 和 $y=2$ 没有交点.(   )

(4) 直线 $2x+y-1=0$ 和 $3x-y+5=0$ 的夹角是$\frac{\pi}{4}$.(   )

(5) 直线 $x-y+1=0$ 和 $2x-2y+3=0$ 的夹角是0.(   )

(6) 直线 $2x-3y=0$ 和 $5x-7y-1=0$ 的交点是(3,2).(   )

2. 选择题:

(1) 两直线 $2x+4y+1=0$ 和 $3x+my+9=0$ 互相垂直,则 m 的值是(   )

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C)6 (D) -6

(2) 直线 $3x-y+k=0$ 和 $6x-2y+1=0$ 的位置关系是(   )

(A) 平行 (B) 相交 (C) 平行或重合 (D) 垂直

(3) 直线 $x-y+6=0$ 和 $x+y-7=0$ 的夹角是(   )

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C)0 (D) $\frac{\pi}{2}$

(4) 直线 $2x+4y+9=0$ 和 $x+ay+8=0$ 的夹角是$\frac{\pi}{4}$,则 a 的值是(   )

(A) -3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 或$\frac{1}{3}$ (D) -3 或 $-\frac{1}{3}$

B 组

1. 选择题:

(1) 直线 $l_1: ax+y-3=0, l_2: x+by-c=0$,则 $ab=1$ 是 $l_1 // l_2$ 的(   )

(A) 充要条件 (B) 充分条件 (C) 必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(2) $m=-2$ 是直线 $(2-m)x+my+3=0$ 和 $x-my-3=0$ 互相垂直的(   )

(A) 充要条件 (B) 充分条件 (C) 必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(3) 若直线 $Ax+3y+C=0$ 和 $2x-3y+4=0$ 的交点在 y 轴上,则 C 的值是(   )

(A)4 (B) -4 (C) ± 4 (D) 与 A 有关

(4) 直线 $2x+5y-10=0$ 和坐标轴围成的三角形面积是(   )

(A)10 (B)7.5 (C)12.5 (D)5

2. 求下列直线方程:

(1) 过两直线 $x-2y+2=0$ 和 $3x+4y-14=0$ 的交点且平行于直线 $3x-y-8=0$

(2) 已知直线 $l_1: 3x+2y-12=0$, l_1 与 l_2 的交点在 x 轴且 $l_1 \perp l_2$,求 l_2 的直线方程

9.3 点到直线的距离

9.3.1 学习目标

掌握点到直线的距离公式,会求两平行线的距离.

9.3.2 学法指导

应用点到直线的距离公式时，应将所给直线方程化成一般式 $Ax + By + C = 0$，如有缺项，则该项的系数为 0. 如直线 $3x = 4$ 化为一般式为 $3x + 0 \cdot y - 4 = 0$.

例题赏析

[例 1] 求与原点距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，斜率为 1 的直线方程.

解：$\because k = 1$

$\therefore$ 设所求直线方程为 $y = x + b$，即 $x - y + b = 0$.

又 $\because$ 点$(0,0)$ 到直线 $x - y + b = 0$ 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|0 \times 1 - 0 \times 1 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$ 整理得 $|b| = 1$ $\therefore b = \pm 1$

$\therefore$ 所求直线方程为 $x - y + 1 = 0$ 或 $x - y - 1 = 0$.

[例 2] 已知：$\triangle ABC$ 的顶点 $A(3, -2)$，$B(5,2)$，$C(-1, -4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

分析：利用点到直线的距离公式，可求出点 A 到直线 BC 的距离 AD，而 AD 是三角形的一条高.

解：$\because \overrightarrow{BC} = (-6, -6)$

$\therefore$ 直线 BC 的点向式为$\frac{x-5}{-6} = \frac{y-2}{-6}$，化简得：$x - y - 3 = 0$

$\therefore \triangle ABC$ 的高 $|AD| = \frac{|3 \times 1 + (-2) \times (-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$

又 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$.

9.3.3 同步训练

A 组

已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，$D(2,2)$，求：(1) 点 D 到直线 AC 的距离 (2) 点 B 到直线 AD 的距离

B 组

1. 已知直线经过点 $P(0,5)$ 且与点 $Q(-1,3)$ 的距离为 1，求直线 l 的方程.
2. 求与直线 $7x + 24y - 5 = 0$ 平行并且距离等于 3 的直线方程.

9.4 二元一次不等式表示的区域

9.4.1 学习目标

能正确判断二元一次不等式(组) 表示的区域.

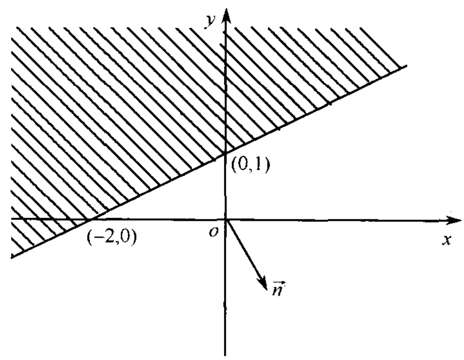
9.4.2　学法指导

求二元一次不等式所表示的区域分三个步骤：第一步画出直线 $Ax + By + C = 0$，第二步画出直线的法向量 $\vec{n} = (A, B)$，第三步判断.

直线 $Ax + By + C = 0$ 把坐标平面分成两部分：在法向量 $\vec{n} = (A, B)$ 指向的那一侧半平面所有点的坐标满足不等式 $Ax + By + C > 0$；而在另一侧（$-\vec{n}$ 指向的那一侧）所有点的坐标满足不等式 $Ax + By + C < 0$.

例题赏析

［例 1］　用不等式表示如下图所示的阴影区域.



分析：先求过点 $(-2,0)$ 和 $(0,1)$ 的直线方程，再用试点的方法（特殊值法）判断.

解：$\because$ 直线过点 $(-2,0)$ 和 $(0,1)$

$\therefore$ 直线的方向向量 $\vec{v} = (2,1)$，

代入点向式方程得 $\dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-1}{1}$，

化简得：$x - 2y + 2 = 0$

把原点 $O(0,0)$ 的坐标代入方程的左侧，得 $2 > 0$

所以原点不在的另一侧的阴影区域相应的不等式为

$x - 2y + 2 \leqslant 0$

易错易混问题剖析

解题时，先把不等式整理成左边是 $Ax + By + C$ 的形式（右边是零），例如：$2 - x > -2y$，法向量 $\vec{n}$ 等于什么？不等号的方向怎样？利用同解变形原理将原不等式整理得 $x - 2y - 2 < 0$，这时我们方可看出 $\vec{n} = (1, -2)$，不等号是小于号.

9.4.3　同步训练

A 组

画出下列不等式（组）表示的区域.

(1) $2x - 5 \leqslant y$　　(2) $\begin{cases} x - y \leqslant 0 \\ 2x + 3y - 6 > 0 \end{cases}$

B 组

画出不等式 $\dfrac{x + y + 1}{x - y + 1} > 0$ 表示的区域.

单元测试 21

1. 填空题：（每空 6 分，共 40 分）

(1) 若直线 l 的点向式方程是 $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-2}{5}$，则直线 l 上的一个点的坐标是______，一个方

向向量 $\vec{v}=$ ________________，一个法向量 $\vec{n}=$ ____________.

(2) 直线 l 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，则它的斜率 $k=$ __________.

(3) 当直线的倾斜角 $\alpha=$ ________时，它的斜率不存在.

(4) 若直线 $3x-2y+1=0$ 与 $6x-ay+4=0$ 平行，则 $a=$ ________.

(5) 若直线 $3x-2y+5=0$ 与 $mx+3y+1=0$ 垂直，则 $m=$ ________.

(6) 直线 $2x+4y+9=0$ 与 $x-3y+8=0$ 的夹角是______.

(7) 点 $(3,-2)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是________.

(8) 两直线 $x-y+1=0$ 与 $x+y-3=0$ 的交点是________.

2. 解答题：(每小题 10 分，共 40 分)

(1) 求过点 $(2,1)$ 且平行于直线 $3x-4y+1=0$ 的直线方程

(2) 已知点 $A(-1,3)$、$B(6,-2)$，求线段 AB 的垂直平分线方程

(3) 求过两直线 $2x+y-3=0$ 和 $x-y=0$ 的交点且与直线 $x+3y+1=0$ 垂直的直线方程

(4) 直线 l 过点 $P(3,-2)$ 且它的倾斜角是直线 $x-2y+1=0$ 的倾斜角的 2 倍，求 l 的方程

3. 趣味题：

这些问题也许是老生常谈，但是答起来极易掉进“陷阱”. 你呢?试一下吧!

(1) 共有 15 个小朋友玩老鹰捉小鸡的游戏，有 5 只“小鸡”被捉住了，问还有几只“小鸡”没被捉住?

(2) 小黄和小兰都想买一个玩具猫，小黄缺 1 分钱，小兰缺 4 角 2 分钱. 如果两人合买一个，钱还是不够，问这个玩具猫的价格是多少钱?

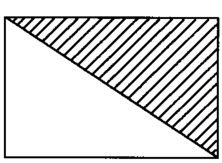
(3) 把一个长方形桌面锯去一个角，还剩几个角?

答案：

(1)15 个小朋友中有一个是“鸡妈妈”；一个是“老鹰”，另外 13 个是小鸡，有 5 个被捉，还剩 8 只“小鸡”.

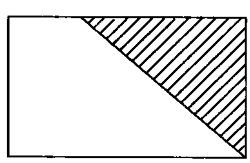
(2) 小黄缺一分钱，但为什么加上小兰的钱合买，还是不够呢?这说明小兰没有钱. 小兰缺 4 角 2 分钱，说明这个玩具猫的价钱是 4 角 2 分.

(3) 剩下 3 个角，或 4 个角，或 5 个角，如图(a)、图(b)、图(c) 所示(阴影表示锯掉的部分).



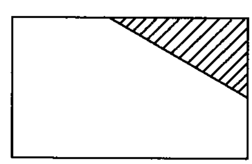
剩下 3 个角

(a)



剩个 4 个角

(b)



剩下 5 个角

(c)

9.5 曲线与方程

9.5.1 学习目标

理解曲线与方程的概念，会求曲线方程.

9.5.2 学法指导

曲线与方程的概念是解析几何的基础概念.解析几何的两个基本问题:建立曲线的方程以及利用方程研究曲线的几何性质,都是建立在这个基础上的.树立数形结合思想,把握曲线与方程的关系是学习本节的关键.

例题赏析

[例 1] 已知坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点都在曲线 c 上,那么(　　)

(A) 曲线 c 上的点的坐标都适合方程 $f(x,y)=0$

(B) 凡坐标不适合 $f(x,y)=0$ 的点都不在 c 上

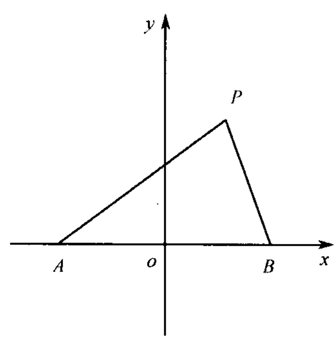
(C) 不在 c 上的点的坐标必不适合 $f(x,y)=0$

(D) 不在 c 上的点的坐标有些适合 $f(x,y)=0$,有些不适合 $f(x,y)=0$

分析: 对照曲线与方程的概念,不能够得出 $f(x,y)=0$ 是曲线 c 的方程.如设方程 $f(x,y)=0$ 为 $y=\sqrt{1-x^2}$,满足该方程的点都在以原点为圆心、1 为半径的圆上.而圆上的点 $(0,-1)$ 的坐标却不适合方程,又原命题的逆否命题是(C),根据原命题与它的逆否命题的等价性,故选(C).

点拨: 本例着重考查学生对基本概念的理解,以及命题形式的等价转换.曲线与方程的定义表明:曲线 c 的方程是 $f(x,y)=0$ 的充分必要条件是,曲线 c 上所有点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解,并且以方程 $f(x,y)=0$ 的实数解为坐标的点都在曲线 c 上,这是识别曲线和方程关系的基本依据.

[例 2] 已知两个定点 A、B,且 $|AB|=4$,求满足 $|PA|^2-|PB|^2=64$ 的动点 P 的轨迹方程.



解法 1: 取直线 AB 为 x 轴,AB 线段的中点为原点,如右图建立直角坐标系.

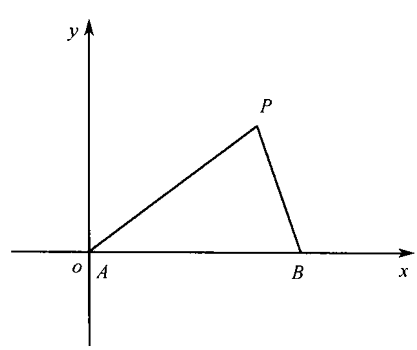
则 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,设动点 $P(x,y)$,那么:

$|PA|^2=(x+2)^2+y^2$, $|PB|^2=(x-2)^2+y^2$

依题意有: $|PA|^2-|PB|^2=64$,即 $[(x+2)^2+y^2]-[(x-2)^2+y^2]=64$

整理可得: $8x=64$,即 $x=8$

所求轨迹方程为 $x=8$,它是一条平行于 y 轴的直线.



解法 2: 以 A 点为原点,直线 AB 为 x 轴,如右图建立直角坐标系.

则 $A(0,0)$、$B(4,0)$,设动点 $P(x,y)$,那么

$|PA|^2=x^2+y^2$, $|PB|^2=(x-4)^2+y^2$

依题意有: $|PA|^2-|PB|^2=64$,即 $(x^2+y^2)-[(x-4)^2+y^2]=64$

整理可得: $8x=80$,即 $x=10$

所求轨迹方程为 $x=10$,它是一条平行于 y 轴的直线.

解法 3: 如下图建立直角坐标系.

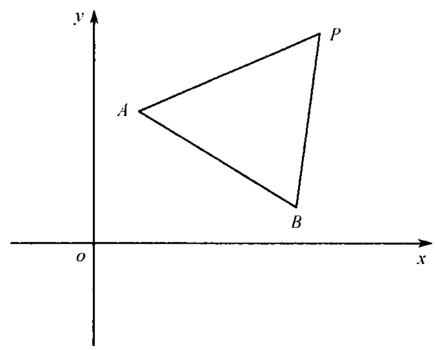
设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，动点 $P(x,y)$，那么

$|PA|^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$

$|PB|^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$

$|PA|^2-|PB|^2=64$

即 $[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]-[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]=64$



整理可得：$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-64=0$

所求轨迹方程为 $2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-64=0$，是一条直线.

点拨：由曲线求它的方程的基本思路是以给出的轨迹几何条件(即动点的运动规律)，如何通过坐标系的恰当选取，寻求动点 $P(x,y)$ 的坐标 x、y 之间的关系，即建立关于 x、y 的方程 $f(x,y)=0$. 对于同一条曲线(或直线)在不同的坐标系中，方程是不同的，在解法 1、解法 2 中轨迹方程形式简单，而解法 3 中轨迹方程形式烦琐，这是由于选取坐标系不恰当所造成的. 因此，求曲线方程时，要根据具体情况适当选取坐标系，使所得轨迹方程尽可能简单. 在求得动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程 $f(x,y)=0$ 后，有时 $f(x,y)=0$ 不表示任何几何轨迹，例如：所求得轨迹方程为 $x^2+y^2+1=0$，因为这个方程无实数解，所以它不表示任何几何轨迹.

9.5.3 同步训练

A 组

1. 已知曲线 c 上的所有点的坐标都是方程 $f(x,y=0)$ 的解，那么(　　)

(A) 以方程 $f(x,y)=0$ 为坐标的点都在曲线 c 上

(B) 以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点有些不在曲线 c 上

(C) 不在曲线 c 上的点的坐标都不是方程的解

(D) 坐标不满足方程的点都不在曲线 c 上

2. 下面四点不在曲线 $x^2-2xy+y^2-4=0$ 上的是(　　)

(A)$(1,-1)$　　(B)$(-1,1)$　　(C)$(1,1)$　　(D)$(2,0)$

3. 已知曲线的方程为 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$，若曲线过原点，那么必有(　　)

(A)$A=0$　　(B)$B=0$　　(C)$C=0$　　(D)$A+B+C=0$

4. 等腰 $\triangle ABC$，若底边两端点坐标是 $B(0,0)$、$C(0,2)$，则顶点 A 的轨迹方程是(　　)

(A)$x=1$　　(B)$y=1$　　(C)$x=1(y\neq0)$　　(D)$y=1(x\neq0)$

5. 判断命题 p 是命题 q 的什么条件(充分条件、必要条件、充要条件)

(1)p:$x=|y|$　　q:点 $M(x,y)$ 到两坐标轴距离相等________.

(2)p:$(x-2)(y-1)=0$　　q:$(x-2)^2+(y-1)^2=0$________.

(3)p:$x^2+2x-3=0$　　q:$x=1$________.

(4)p:$\sin\alpha\neq\sin\beta$　　q:$\alpha\neq\beta$________.

6. 动点 M 到点 $A(1,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-1$ 的距离，则动点 M 的轨迹方程是________.

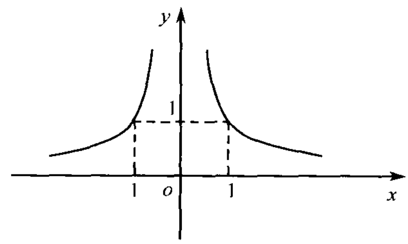
7. 已知定点 A、B，$|AB|=2a(a>0)$，有动点 P 使得 $PA\perp PB$，求动点 P 的轨迹方程.

B 组

1. 如图所示的曲线方程是(　　)

(A) $xy = 1$　　(B) $|x|y = 1$

(C) $x|y| = 1$　　(D) $|xy| = 1$



2. 方程 $\log_x y = 1$ 与下列方程表示同一条曲线的是(　　)

(A) $y = x(x > 0, x \neq 1)$　(B) $y = x(x > 0)$

(C) $y = x(x \geqslant 0)$　　(D) $y = x(y > 0)$

3. 到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是(　　)

(A) $y = x$　　(B) $y = -x$　　(C) $y = |x|$

(D) $y = x$ 或 $y = -x$

4. 点 $M(1,a)$ 在曲线 $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ 上,则 a 的值是________.

5. 到两坐标轴距离之差为 2 的点的轨迹方程是________.

6. $\triangle ABC$ 中三条边 $c > b > a$ 且成等差数列,其中 $b = 2$,求顶点 B 的轨迹方程.

9.6　曲线的交点

9.6.1　学习目标

理解两条曲线交点坐标的意义;通过解方程组求两条曲线的交点.

9.6.2　学法指导

求曲线的交点的问题,就是求它们的方程所组成的方程组的实数解问题;由曲线方程的定义可知,两条曲线交点的坐标应该是两个曲线方程的公共实数解,即两个曲线方程组成的方程组的实数解;反过来,方程组有几个实数解,两条曲线就有几个交点,方程组没有实数解,两条曲线就没有交点.

9.6.3　同步训练

1. 曲线 $c_1: |y| = x$ 与曲线 $c_2: x^2 + y^2 = 2$ 的交点坐标是(　　)

(A) 只有(1,1)　　(B)(1,1)、(1,-1)　　(C) 只有(-1,1)　　(D)(1,1)、(-1,1)

2. 方程 $Ax + By + C = 0$ 表示直线的充要条件是(　　)

(A) A、B、C 不全为 0　　(B) A、B、C 全不为 0

(C) A、B 不全为 0　　(D) A、B 全不为 0

3. 曲线 $x^2 = y$ 与 $y^2 = x$ 的交点为____________________.

4. 已知直线 $2x + 4y + a = 0$ 与曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 有两个交点,则 a 的取值范围是________.

5. 曲线与坐标轴的交点:

(1) 令方程 $f(x,y) = 0$ 中的 $x =$ ______,可求出曲线与 y 轴的交点;

(2) 令方程 $f(x,y) = 0$ 中的 $y =$ ______,可求出曲线与 x 轴的交点.