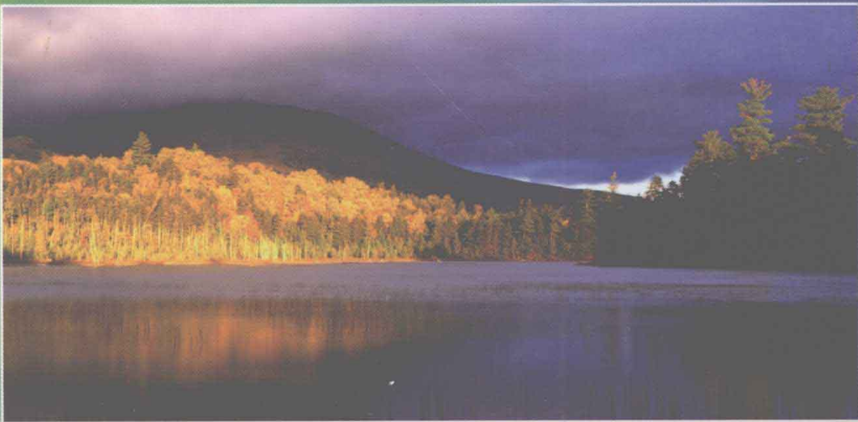
G A O D E N G S H U X U E



普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

（理工类）高等数学 下册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学

（理工类） 下册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写. 全书分上、下两册，共12章. 此为下册，内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，常数项级数与幂级数，傅里叶级数等6章. 书中每节后配有适量的习题，每章之末均配有复习题. 为方便读者查阅参考，在所附习题或复习题之后，都附有答案或提示.

本书条理清晰，论述确切；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深广度恰当，便于教和学. 本书可作为普通高等院校（特别是“二本”及“三本”院校）或成人高校工科类本科或专升本专业的“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 下册 / 刘浩荣，郭景德编著.
-- 上海：同济大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-5608-4601-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… ②郭… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 129296 号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学（理工类）下册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 编著

组稿 曹 建 吴丽丽 **责任编辑** 曹 建 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622）
经　销 全国各地新华书店
印　刷 同济大学印刷厂
开　本 787 mm×960 mm 1/16
印　张 18.75
印　数 1—4 100
字　数 375 000
版　次 2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
书　号 ISBN 978-7-5608-4601-9

定　价 29.00 元

前　言

随着我国高等教育的迅速发展，为适应部分普通高等院校理工科专业（“二本”、“三本”）的教学需要，我们应同济大学出版社之约，按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（以下简称“教学基本要求”）编写了这套《高等数学》（理工类）教材. 本教材仍分上、下两册，共 12 章. 上册为 6 章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等；下册为 6 章，内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，常数项级数与幂级数，傅里叶级数等.

编写本套教材的基本思路是：精简冗余内容，压缩叙述篇幅；降低教学难度，突出应用特色. 为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性，我们着重采用了以下一些做法：

(1) 内容“少而精”，取材更加紧扣“教学基本要求”. 对于某些超出“教学基本要求”，而属于教学中可讲或可不讲的内容，即使编入也均以 * 号标记或用小号字排版，以供不同专业选用或参考.

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时，适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性. 例如，根据“教学基本要求”，我们对三个微分中值定理的严格证明均予省略，只叙述定理的条件和结论，并借助于几何图形较为直观地解释其几何意义. 此外，对于某些较为繁复的计算或公式推导，能删去的就删去，不能删去的便略去其计算或推导的过程.

(3) 相对传统的教材，本教材对章节体系安排作了一些新的尝试. 例如，由于略去了“函数”中与中学知识较多重复的内容，从而压缩了篇幅，把“函数”和“极限与连续”合并为一章. 类似地，把“中值定理”与“导数的应用”合并为一章，把“定积分”与“定积分的应用”也合并为一章. 又如，为使内容安排得紧凑些，我们把“无穷小和无穷大”与“无穷小的比较”也合并为一节. 考虑到学习“常微分方程”与求不定积分的联系较为紧密，同时也为后续课程及早应用数学工具提供方便，我们把传统教材下册中的“常微分方程”一章移到了本教材上册之末.

(4) 在对教材中各章、节内容的组织安排上，考虑到应具有科学性和可读性，除了书写的文字应通顺流畅外，还尽量注意做到由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散. 即使是每节中所选配的例题安排，也均遵循“由简单到复杂，由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时，尽量按照“实践—认识—实践”的认识规律，先由实际引例出发，抽象出数学概念，从而上升到理论阶段（包括有关性质和计算方法等），

再回到实践中去应用.为体现教材的科学性,我们特别注意防止前后内容的脱节,即使遇到个别地方要提前用到后面的知识内容时,也都以"注释"加以交代说明.例如,因"常微分方程"提前放到上册中,当用到欧拉公式时,只能以"注释"说明,而将它放在下册有关幂级数中加以介绍.

(5) 为使教材富有知识性与实用性,我们在某些章节中选用了一些较有实际意义的例题.特别是在"常微分方程"中,我们特地选编了有关"冷却问题",涉及"第二宇宙速度"及产生"共振现象"等知识内容的例题,虽然都以小号字排版,但可供读者参阅,以扩大知识面、提高在日常生活和工程技术中应用数学知识的能力.

(6) 在精简冗余内容、压缩叙述篇幅的同时,对于数学在几何及物理力学或工程技术中的应用并未减弱,只是为降低难度而选用了一些好学易懂的例题,以充分体现理工类教材应具有理论联系实际、重视实际应用的特色.

(7) 按照"学练结合,学以致用"的原则,本教材在各节之后均配置了适量的习题作业,在每章之末也都选配了复习题,且为方便读者查阅参考,在每次习题或复习题之后,均附有答案或提示.

本书由北京航空航天大学李心灿教授主审.他虽年事已高,工作繁忙,但仍在百忙中详细审读了本书,并提出了许多宝贵建议和具体的修改意见,我们深受感悟,谨此表示诚挚而衷心的感谢!

我们在编写这套教材时,主要参考了同济大学数学系刘浩荣、郭景德等编著、由同济大学出版社已经出版的《高等数学》(第4版),同时也参考了同济大学数学系编、由高等教育出版社出版的《高等数学》(第6版)以及由教育部高等教育司组编,北京航空航天大学李心灿教授主编、高等教育出版社出版的《高等数学》等教材.此外,这套教材的编写和出版,得到了同济大学出版社曹建副总编辑的大力鼎助.在此,我们一并表示衷心的感谢!

本教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深度、广度恰当,便于教和学.它可作为普通高校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校工科类本科或专升本专业的"高等数学"课程的教材,也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书.

由于我们编写水平有限,难免有不当或错误之处,敬请广大读者和同行批评指正.

编　者

2011年7月于同济大学

目　　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

向量及其运算是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有用工具，在学习空间解析几何时将看到它的应用. 本章首先介绍如何在空间直角坐标系中建立向量的坐标，用坐标讨论向量的运算.

空间解析几何主要是用代数的方法研究空间几何图形，掌握图形与方程的对应关系，对学习多元函数微积分是很重要的. 本章后半部分将介绍平面和直线及其方程，一般的空间曲面和空间曲线及其方程.

7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间内点的直角坐标

在空间内取定一个点 O，过点 O 作三条具有相同的长度单位，且相互垂直的数轴——x 轴、y 轴和 z 轴，这样就称建立了一个**空间直角坐标系 O-xyz.**

点 O 称为**坐标原点**，简称**原点**. 三条数轴统称为**坐标轴**. x 轴、y 轴、z 轴又分别叫做**横轴**、**纵轴**、**竖轴**. 由任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**(共有三个坐标面)，由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，由 y 轴和 z 轴所确定的坐标面叫做 yOz 面，由 z 轴和 x 轴所确定的坐标面叫做 zOx 面.

通常是把 xOy 面放置在水平面上，并规定 x 轴、y 轴和 z 轴的位置关系遵循**右手系**. 所谓右手系，是指：当右手的四个手指指向 x 轴的正向，然后握拳转向 y 轴的正向时，大拇指所指的方向应是 z 轴的正向(图 7-1).

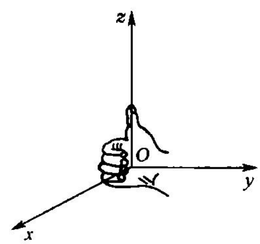


图 7-1

三个坐标面把空间分隔成八个部分，每个部分称为卦限，这八个卦限依次叫做第一卦限、……、第八卦限，它们的位置是第一卦限至第四卦限在 xOy 面上方，按逆时针方向排列，第五卦限至第八卦限在 xOy 面下方，也按逆时针方向排列，其中第五卦限在第一卦限下方.

现在讨论在空间直角坐标系中，空间内的点与三个数组成的有序数组之间的对应关系.

设 M 是空间内任一定点，过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，它们分别交 x 轴、y 轴、z 轴于点 P, Q, R. 设点 P, Q, R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y, z

(图 7-2),于是,按上面的作法,空间内的点 M 唯一确定了一组有序数组:x, y, z. 反之,如果任意给定一组有序数组:x, y, z,在三条坐标轴上可找到分别以它们为坐标的点 P, Q, R,过这三个点分别作垂直于三条坐标轴的平面,这三个平面必然相交于一点 M. 由此可见,空间内的点 M 与有序数组:x, y, z 之间是一一对应关系. 数 x, y, z 称为点 M 的**坐标**,分别叫做点 M 的**横坐标**,**纵坐标**,**竖坐标**. 这时,点 M 可记作 $M(x, y, z)$.

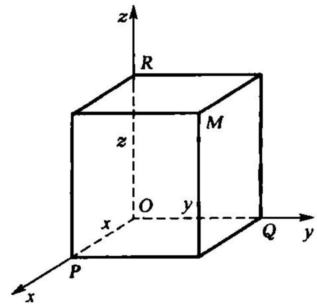


图 7-2

由图 7-2 可看到,若点 M 在 x 轴上,则有 $y=0$, $z=0$,点 M 为 $M(x, 0, 0)$;若点 M 在 y 轴上,则有 $x=0$, $z=0$,点 M 为 $(0, y, 0)$;若点 M 在 z 轴上,则有 $x=0$, $y=0$,点 M 为 $M(0, 0, z)$. 若点 M 在坐标面上,则必有一个坐标为零,例如点 M 在 xOy 面时,则有 $z=0$,点 M 为 $M(x, y, 0)$.

7.1.2 空间内两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间内两点,它们的连线和三条坐标轴都不平行. 过点 M_1 和 M_2,分别作三个垂直于坐标轴的平面,这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体,其中长方体的棱 M_1P, M_1Q, M_1R 分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴(图 7-3). 根据几何知识,长方体的对角线 M_1M_2 的长的平方应等于三条棱长的平方和. 于是有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.$$

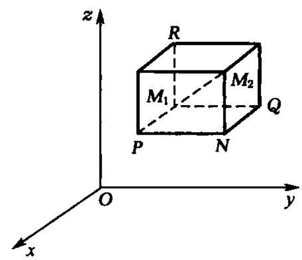


图 7-3

由于线段 M_1P 与 x 轴平行,且点 M_1 与点 P 的横坐标分别为 x_1 与 x_2,故有 $|M_1P| = |x_2 - x_1|$. 同理有 $|M_1Q| = |y_2 - y_1|$, $|M_1R| = |z_2 - z_1|$. 将它们代入上式,我们就得到空间内两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式:

$$\boxed{d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.} \tag{7.1}$$

特殊地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$\boxed{d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.} \tag{7.1$'$}$$

例 1 求点 $M(x, y, z)$ 到三条坐标轴及三个坐标面的距离.

解 过点 M 作垂直于 x 轴的平面,交 x 轴于点 P,则点 P 为 $P(x, 0, 0)$,且线段 MP 的长就是点 M 到 x 轴的距离. 由式(7.1)得

$$|MP| = \sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{y^2+z^2}.$$

同理可得,点到 y 轴,z 轴的距离分别为$\sqrt{x^2+z^2}$,$\sqrt{x^2+y^2}$.

过点 M 作垂直于 xOy 面的直线,设垂足为 A. 于是点 A 的坐标为$(x, y, 0)$,且线段 MA 的长就是点 M 到 xOy 面的距离. 由式(7.1)得

$$|MA|=\sqrt{(x-x)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}=|z|.$$

同理可得,点 M 到 yOz 面和 zOx 面的距离分别为$|x|$和$|y|$.

例 2 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$和 $B(5, 7, -5)$等距离的点.

解 因为所求的点在 y 轴上,故可设它为 $M(0, y, 0)$. 根据题意有

$$|MA|=|MB|,$$

于是有

$$\sqrt{(1-0)^2+(-3-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2+(-5-0)^2},$$

两边平方去根号,整理后得

$$20y=40,$$

从而

$$y=2,$$

所以,所求的点为点 $M(0, 2, 0)$.

习题 7-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点位置的特点.

$$A(0, -1, 0);\ B(2, -2, 0);\ C(5, 0, -2);$$

$$D(3, 0, 0);\ E(0, 3, -4);\ F(0, 0, -7).$$

2. 求点 $M(-1, 3, -2)$在各坐标轴上及在各坐标面上的垂足的坐标.
3. 设 A, B 两点为 $A(4, -7, 1)$, $B(6, 2, z)$,它们间的距离为 $|AB|=11$,求点 B 的未知坐标 z.
4. 求点$(3, -1, -2)$关于各坐标面、各坐标轴和坐标原点的对称点的坐标.
5. 求点 $A(4, -3, 5)$到坐标原点及到各条坐标轴的距离.
6. 在 y 轴上求与点 $A(-3, 2, 7)$和 $B(3, 1, -7)$等距离的点.
7. 在 xOy 面上求与点 $A(1, -1, 5)$, $B(3, 4, 4)$和 $C(4, 6, 1)$等距离的点.
8. 证明以点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

答 案

1. 点 A 在 y 轴上;点 B 在 xOy 面上;点 C 在 zOx 面上;点 D 在 x 轴上;点 E 在 yOz 面上;点 F 在 z 轴上.
2. $(-1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, -2)$; $(-1, 3, 0)$, $(0, 3, -2)$; $(-1, 0, -2)$.

3. $z=7$ 或 $z=-5$.

4. (1)$(3, -1, 2)$, $(-3, -1, -2)$, $(3, 1, -2)$; (2)$(3, 1, 2)$, $(-3, -1, 2)$, $(-3, 1, -2)$; (3)$(-3, 1, 2)$.

5. $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, 5.　　6. $\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$.　　7. $(16, -5, 0)$.

7.2　向量的概念及其几何运算

7.2.1　向量的概念

在日常生活中,我们常会遇见两种不同类型的量:一类是只有大小的量,如长度、面积、体积、温度等,它们称为**数量或标量**;另一类量,不仅有大小,而且有方向,如速度、加速度、力、位移等,它们称为**向量或矢量**.

几何上,常用一条规定了起点和终点的有方向的线段,又称为有向线段来表示向量. 以点 A 为起点,点 B 为终点的向量,记作$\overrightarrow{AB}$(图 7-4). 有时也常用一个黑体字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{F}$ 等.

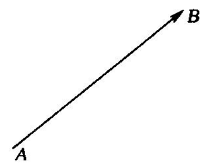


图 7-4

向量的大小是指向量的长度,又称为**向量的模**,向量$\overrightarrow{AB}$和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$和$|\boldsymbol{a}|$(书写时记作$|\vec{a}|$).

起点和终点重合,即模等于零的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$(或$\vec{0}$). 我们规定,零向量的方向是可以任意的.

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 特别是,与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位向量称为$\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**,记作 $\boldsymbol{a}^0$(书写时记作$\vec{a}^0$).

以坐标原点 O 为起点,空间内一点 M 为终点的向量又称为点M 的**向径或矢径**,它常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示(书写时记作$\vec{r}$).

在实际问题中,有的向量与其起点有关,有的向量与其起点无关,但是,它们都有一个共同的特征:都有大小和方向. 因此,数学上研究向量时,通常只考虑向量的大小和方向,并不关心向量的起点在何处,这种与起点无关的向量称为**自由向量**.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果一个向量与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反,则称它是向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向相同或者相反,则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**平行**,记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

7.2.2　向量的加、减运算

中学物理已讲到,作用在同一点的两个不平行的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 可以

用平行四边形法则来确定(图 7-5),向量的加法也是用相同的方法规定的.

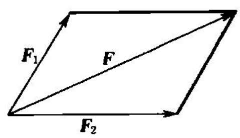


图 7-5

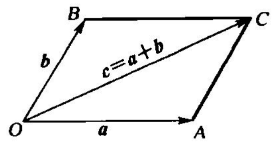


图 7-6

设有两个不平行的非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$. 将向量$\boldsymbol{a}$(或$\boldsymbol{b}$)平移,使它的起点与向量$\boldsymbol{b}$(或$\boldsymbol{a}$)的起点重合,记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以$OA$和$OB$为边作一个平行四边形$OACB$,记对角线的向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$(图 7-6),则称向量$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和,记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

这种规定向量加法的方法叫做**向量加法的平行四边形法则**.

由图 7-6 能看到,向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,所以也可以这样来规定向量的加法:将向量$\boldsymbol{b}$平移,使它的起点与向量$\boldsymbol{a}$的终点重合,把以向量$\boldsymbol{a}$的起点为起点,向量$\boldsymbol{b}$的终点为终点的向量记为$\boldsymbol{c}$(图 7-7),那么,向量$\boldsymbol{c}$就是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和. 这种方法叫做**向量加法的三角形法则**.

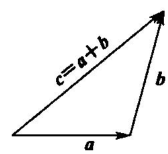


图 7-7

当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行时,我们仍然按照向量加法的三角形法则来规定向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和:将向量$\boldsymbol{b}$平移,使它的起点与向量$\boldsymbol{a}$的终点重合,记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,那么,向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$就称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和.

两个向量加法的三角形法则可以推广到多个向量相加的情形. 例如,已给四个向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$,以向量$\boldsymbol{a}$的终点为起点作出向量$\boldsymbol{b}$(即将向量$\boldsymbol{b}$平移,使它的起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合),再以向量$\boldsymbol{b}$的终点为起点作出向量$\boldsymbol{c}$,然后以向量$\boldsymbol{c}$的终点为起点作出向量$\boldsymbol{d}$,则以向量$\boldsymbol{a}$的起点为起点,向量$\boldsymbol{d}$的终点为终点的向量$\boldsymbol{e}$就称为向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$的和,记作

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},$$

如图 7-8 所示. 这种方法叫做**向量加法的多边形法则**.

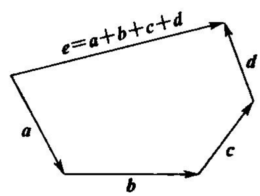


图 7-8

向量加法满足以下运算性质:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

利用负向量的概念,我们可以规定两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由图 7-9 可看到,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,因此,向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差可这样

作出：把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移至同一个起点，那么，以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 特别是当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，点 A 与 B 重合，所以，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；反之，若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，则有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

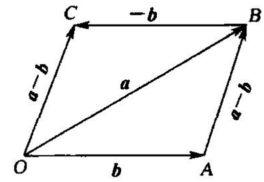


图 7-9

7.2.3 数与向量的乘法

我们规定：数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积** $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向由 λ 的符号所决定：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反（图 7-10）；

当 $\lambda=0$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

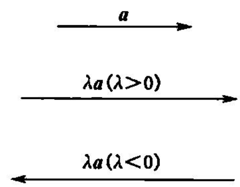


图 7-10

数与向量的乘法满足以下运算性质：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$　（λ,μ 是数）；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　（λ,μ 是数）；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　（λ 是数）.

前面已指出，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 根据数与向量的乘法知，向量 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ 是非零向量，故 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 有意义）与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向，又 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的模为 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$，因此，它是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

习惯上，对于数 $\lambda\neq0$，数 $\frac{1}{\lambda}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$ 也写成 $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$ 的形式，因此，$\boldsymbol{a}^0$ 也可写成

$$\boxed{\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}\tag{7.2}$$

例 1　设 M_1 和 M_2 为数轴上坐标分别为 x_1 和 x_2 的两点，$\boldsymbol{e}$ 为与数轴正向一致的单位向量（图 7-11），验证 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$.

证明　当 $x_2-x_1>0$ 时，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同方向（图 7-11(a)），且 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=x_2-x_1$，所以，$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$；

当 $x_2-x_1<0$ 时，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向（图 7-11(b)），且 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=x_1-x_2$，所以有 $\overrightarrow{M_1M_2}=-(x_1-x_2)\boldsymbol{e}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$；