黑博士品牌标志

BLACK DOCTOR 黑博士 ◎黑博士考研工作室◎ WORKROOM BEIJING

黑博士考研 权威精品数学系列

2006年

考研数学历年真题

详解与命题研究（数学一）

◎组 编 黑博士考研信息工作室

◎主 审 北京大学数学教授 柯懋振

◎主 编 铁 军 李 强（著名数学命题研究专家）

1990-2005

- 根据最直接、最宝贵的第一手资料，总结命题特点和考试规律
- 引导考生针对性备考和高效复习，把握复习的进程和重点
- 深刻分析历年真题，一题多解，全面评注，技巧分析
- 总结命题规律，发现其内在的规律性及重复性
- 透视真题，大胆预测重点题目和重点题型

2006年

新大纲新题型

人民日报出版社

考研命题研究报告精品系列

2006年硕士研究生入学考试

历年真题详解与命题研究

考研数学（一）

（中高级版　精华预测）

主审　北京大学数学教授　柯懋振

主编　铁军　李强（著名数学命题研究专家）

编著　清华大学著名数学教授　黄建东

北京大学著名数学教授　周华强

清华大学著名数学教授　林祥源

北京大学著名数学教授　陈跃祥

清华大学著名数学教授　蔡昌林

北京理工大学数学博士　魏柏芳

上海交通大学数学博士　王东明

人民日报出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

考研数学历年真题详解与命题研究 / 铁 军 李 强 编著

—北京：人民日报出版社，2004.6

（考研历年真题详解与命题研究）

ISBN 7 - 80153 - 866 - 8

Ⅰ. 考… Ⅱ. ①铁… ②李… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 030524 号

考研数学（一）历年真题详解与命题研究

编　　著：铁 军　李 强
责任编辑：安　申
封面设计：何志娟

出版发行：人民日报出版社（北京市金台西路 2 号　邮编：100733）
经　　销：新华书店
印　　刷：新胜印务有限公司

开　　本：787×1092　1/16
字　　数：2000 千字
印　　张：75
印　　数：10000 册
印　　次：2005 年 4 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7-80153-866-8/G・480
总 定 价（全七册）：160.00 元

若发现黑博士系列图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题
请拨打下面电话联系调换：13636715450

前　　言

实践将再次证明：现在你翻开的这本书，对顺利通过每年竞争激烈的硕士研究生数学入学考试来说，是至关重要的。这曾是一本引起广大考生和辅导教师强烈关注的精品书。本书自 2000 年出版以来，已是第五版了。它囊括了教育部考试中心的 60 多位考研数学命题专家 15 年的全部命题心血和集体才智，同时浓缩了笔者对考研数学多年的研究和辅导体会，也自然蕴涵着考生高分致胜的全部技巧和法宝，而你要做的就是：去充分地利用、研究、体会并总结此书所传递的规律和信息。

从 2003 年起，数学考研试卷总分由 100 分增加到了 150 分，分数是考研公共课中最高的。这说明数学在考研科目中的地位是最重要的。从往年的经验看：对于大多数考生而言，数学乃考研核心课程，数学成绩是否合格，将直接关系到考生的考研成败。如果数学不及格，即使总分上线，也不会被录取。显然，激烈的竞争对考生在数学方面提出了相对更高的要求。对于考生来说，熟悉考试的形式和题型无疑会增加获胜的机会。

“研究过去，找出规律；认识现在，掌握重点；预测未来，轻取高分”是本课题的核心内容。多年经验证明：“实际上往年的试题就是复习的重点”。以至于有人断言：“数学复习归纳成一句话，就是反复琢磨历年真题！”本套丛书收集了从 1990 年至 2005 年的理工类数学（一）、（二）和经济类数学（三）、（四）考研真题，分四类成册并对每道题目进行了精辟透彻的分析和讲解，给出了命题评注、技巧分析，为考生深入了解考研数学命题的形式、内容、要求、题型和难度提供了极其有益的帮助和思路，为从中找到考研数学高分复习的方法和思路，提高复习效率探索出了一条科学而规律的致胜途径。

本书的六大独有特色和总结出之命题规律概览

1. 根据最直接、最宝贵的第一手资料，总结命题特点和考试规律。本书汇集了 16 年的历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些试题是考研同学了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，考研题是命题组专家的智慧结晶，它不仅具体地反映了《考试大纲》所规定的对考生数学知识、能力和水平的测试要求，而且全面展现了考研试卷的结构，各部分试题分布，考研试题的特点，每部分内容的考点、重点和难点；同时还蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题的趋势，本书以历届考研试题为基本素材，对每一道试题进行了独到、深刻、详细的解答和分析，对考生关心的问题进行了深入的分析、研究和总结，力图揭示命题的规律和趋势。

2. 引导考生针对性备考和高效复习，握住自己复习的进程和重点。数学要考三门课，要复习的内容极为丰富，难度的确很大。考研数学复习不能落入俗套，要有创新思路，既要寻找适合自己特点的的路子，又要清醒地把握住自己复习的进程和重点，做到临考不乱，胸有成竹。数学应该如何复习？数学的重点是什么？大多数学生心中无数。数学考研自 1987 年统一命题以来，已经经历了 18 年，积累了一千多道题，这些试题完全覆盖了考试大纲的方方面面。我们经过长期跟踪研究发现，近年来考研试题中有相当

一部分与往届试题完全类似，解题思路几乎完全一样。考研试题凝聚了命题专家的智慧，充分体现了考试的要求。所以，实际上往年的试题就是复习的重点。以至于有人指出：数学复习归纳成一句话，就是反复琢磨历年真题！下表是各章命题重要性和命题频度统计表，可以提醒考生增强复习的针对性，时刻牢记把握重点！

第一部分　高 等 数 学（共8章）		
第一章	函数 极限 连续	共考过约 22 题，约 89 分
★★★第二章	一元函数微分学（一级重点章）	共考过约 48 题，约 229 分
★★第三章	一元函数积分学（二级重点章）	共考过约 33 题，约 148 分
★★第四章	常微分方程（二级重点章）	共考过约 26 题，约 147 分
第五章	向量代数与空间解析几何（非重点章）	共考过约 9 题，约 32 分
★★第六章	多元函数微分学（二级重点章）	共考过约 33 题，约 148 分
★★★第七章	多元函数积分学（一级重点章）	共考过约 48 题，约 286 分
★★第八章	级数（二级重点章）	共考过约 36 题，约 91 分

第二部分　线 性 代 数（共6章）		
第一章	行列式（非重点章）	共考过约 9 题，约 37 分
★★★第二章	矩阵（一级重点章）	共考过约 23 题，约 99 分
★第三章	向量（二级重点章）	共考过约 15 题，约 65 分
★★★第四章	线性方程组（一级重点章）	共考过约 15 题，约 82 分
★★★第五章	特征值与特征向量（一级重点章）	共考过约 14 题，约 99 分
第六章	二次型	共考过约 8 题，约 52 分

第三部分　概 率 论 与 数 理 统 计（共7章）		
第一章	随机事件和概率	共考过约 17 题，约 44 分
★★第二章	随机变量及其概率分布（二级重点章）	共考过约 12 题，约 49 分
★★★第三章	二维随机变量及其概率分布（一级重点章）	共考过约 17 题，约 91 分
★★第四章	随机变量的数字特征（二级重点章）	共考过约 11 题，约 47 分
第五章	大数定律的中心极限定理（非重点章）	共考过 1 题，3 分
第六章	数理统计的基本概念（非重点章）	共考过 1 题，4 分
★★★第七章	参数估计与假设检验（一级重点章）	共考过约 10 题，约 60 分

3. **一题多解，全面评注，技巧分析。**本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础

上，每题都给出了注释，而且对所有试题均给出了详细解答，不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析，而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结，并尽量做到一题多解，使考研同学能够举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，对考生常犯的错误进行了分析，使考生引以为戒；另外针对考生普遍感到很多考研试题拿到后往往难以下手的问题，对于这样的试题在解答之前都有一个分析，通过分析解题思路和解题方法，以提高读者的破题能力。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。

4. **惊人地发现其命题内在的规律性及重复性**。提示考研数学命题内在的规律性是本书的一大特点，本书所选题目主要采用历年试题，其出发点是“黑箱原理”：考研题库好比一个黑箱，它的内容我们无法尽知，但它使用得越多，它的内容暴露得越多，也越能反映出它的真实内容。实际上，分析 1990～2005 年的历年考研试题，透过各种繁多的甚至是让人摸不着头脑的变换的题目表面，可以惊人地发现其命题内在的规律性及重复性。在本书每一个大类的“考点破译与解题定式思路”部分，就提示了考研数学命题内在的规律。我们另一项研究发现对考生也是极有参考价值的，也是一个公开的“秘密”：考研数学虽然分为理工类（数学一、二）和经济类（数学三、四），但在近几年的试卷中不难发现，数学一、二、三、四试卷之间有不少借鉴和参考。特别是有这种现象，例如，前几年数学一考过的题，今年数学三、四可能拿来考了，或有完全类似的题；也可能前几年考的是客观题，今年改为非客观题了。所以，对于往届试题中的客观题，除了掌握解客观题的技巧外，还应该掌握常规的解法，也许下一次就用上了；还有，工学类考生也要做经济类的试题，经济类考生也要做工学类的试题，考试就会更有把握。

5. **大胆预测重点题目和重点题型**。经过深入分析历年试题、考研大纲、当年的考试政策等多方因素，我们发现一些有价值的结论：前二三年内的考点基本不重复出，而是出同一大类的其余考点；而四五年后，重复的概率则相当大，甚至有的原样稍作变化即重复出现。故本书预测的原则就是综观 1990～2005 年历年考题，以近三年定考试趋向，以近 4～7 年甚至更远（同时结合近三年）定重复概率，同时将各年各类题型以不同的加权值代入，计算出各类题型最可能的出现概率，再根据今明两年的考试政策等多方因素加以调整，对新大纲的增补要求，按增补重点单独考虑，得出 2006 年的预测（可参见黑博士《数学成功指导》、《数学典型 1000 题》）。可以说，在全国各类考研辅导中，本书首次将科学的预测方法引入到数学考研辅导中；对各考点，从编者总结出一系列相关题型的应试解题定式思路。因此，完全可以负责任地说：只要掌握 80%的定式思路，你的数学成绩可以轻松突破 105 分。

6. **一条重要经验，一定记住**：模棱两可与纯熟掌握在实际考试中将会是天壤之别，这是总结历届考研成功者与失败者关键差异之所在。在此，编者以十二分的苦心忠告欲考研的同学们，对本书提到的基本考点、基本题型、常用公式（如微分方程通解公式等），一定要达到纯熟掌握的程度；要熟练做题，重点做典型 1000 题和历年真题，不能一看全会，一做全错；公式要提前记住，决不可在考前才突击记忆。

需要说明的是，从考研数学复习的技术方面来说，考研数学复习是有规律可循的。组织编写“考研历年真题详解与命题研究”系列丛书（共七册），最首要的目的就是“研究过去，找出规律；认识现在，掌握重点；预测未来，轻取高分”，要把我们对考研命题规律的把握，对答题的方法和技巧的总结，以及多年亲自辅导学生所得的第一手资料和全部经验带给考生。更重要的是，研究生数学入学考试历年真题无疑凝结着广大参加命题的数学教师及命题专家的智慧和心血，是教育部《数学考试大纲》的精神和要求的具体体现，每一套试题既反映了《考研数学大纲》对考生数学的基础知识，综合运用能力以及实际水平的要求，又蕴涵了命题的基本原则和规律。因此，历年真题就是最好的模拟试题，是广大考生了解考研试题特点、把握命题思路和趋势的第一手资料。

需要特别强调的是，最近几年的考试一再表明，每年新编制的考题都是历年来真题出题思路的沿袭，事实上，近几年的考题与往年的试题有相当的部分相类似的。

编者建议考生注意：

1. 刚开始复习时，不要急着去做套题，而应该首先明确《黑博士数学考点·重点·难点复习指导及预测》或新《数学大纲》考试的有关要求，接着结合较系统、权威的辅导教材《黑博士考研数学成功指导》及本书按章节进行系统、全面复习，掌握考试大纲中的基本概念、公式和方法，然后做较经典、权威的数学典型题《黑博士数学典型 1000 题》，最后强化做模拟套题《黑博士数学最后 30 天冲刺卷》及本书，这样才会有最佳的复习效果。

2. 在做题时，考生应严格要求自己在考试规定的时间内做完每一套题，在做题过程中，千万不要去看后面的答案及解析，等做完题后再对照答案对自己进行查漏补缺。通过对照来分析试题规律和自己的不足，以确定和调整自己后阶段的复习方向和重点。

3. 考生不要就题做题，而要通过历年真题的比较以及对本书详尽解析中解题方法指导的把握，发现一些规律性的东西，全面领会考试的精髓和命题趋势，使这些稀却珍贵的资料和素材“为我所用、为我所有”，从而从本质上提高自身数学水平，并轻松应对考试获取高分。

值得一提并需要说明的是，编写本书的作者均具有辅导考研数学的丰富经验，能够抓住数学考试的共性，同时还知道考研数学的独特性。我们相信，经过编者的精心打造，并辅以考生认真的态度，一定会让使用本书的考研人在数学上得到突破，轻松攻克考研堡垒，取得实现人生目标的宏伟成就！衷心希望本书能切实帮助考生在考试中充分发挥自己的真正水平，复习顺利，考研成功！

考研命题研究工作室

目　录

数学一历年真题详解·考点点拨与命题研究

（命题专家解析常考知识点与重点）

一、1990 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 …………………… (1)

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………… (1)

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………… (4)

二、1991 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (15)

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (15)

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (18)

三、1992 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (29)

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (29)

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (32)

四、1993 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (43)

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (43)

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (46)

五、1994 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (57)

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (57)

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (60)

六、1995 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (72)

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (72)

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (75)

七、1996 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………… (85)

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题………………………………… (85)

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注………………… (88)

八、1997 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ……………… (102)

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ……………………………… (102)

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ……………… (106)

九、1998 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ……………… (118)

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ……………………………… (118)

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ……………… (122)

十、1999 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ……………… (135)

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（135）
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（139）
十一、2000 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（152）
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（152）
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（156）
十二、2001 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（171）
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（171）
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（174）
十三、2002 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（187）
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（187）
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（191）
十四、2003 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（205）
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（205）
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（209）
十五、2004 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（225）
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（225）
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（229）
十六、2005 年研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究 ………………（245）
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………………（245）
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解与分析评注 ………………（249）

数学历年真题详解·考点点拨与命题研究

(命题专家解析常考知识点与重点)

☞ 研究生入学考试数学一试题详解·考点点拨与命题研究

1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1)过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$,垂直的平面方程是________.

(2) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

(4) 积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于________.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于 【 】

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. (B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. (D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 【 】

(A) $n![f(x)]^{n+1}$. (B) $n[f(x)]^{n+1}$. (C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n![f(x)]^{2n}$.

(3) 设 α 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 【 】

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性与 α 的取值有关.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

【 】

(A) 不可导.　　(B) 可导,且$f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

(5) 已知$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$是对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,$k_1,k_2$为任意常数,则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解(一般解)必是　【　】

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

三、(本题满分15分,每小题5分.)

(1) 求$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设$z=f(2x-y,y\sin x)$,其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程$y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$的通解(一般解).

四、(本题满分6分.)

求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分8分.)

求曲面积分

$$I=\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=4$外侧在$z\geqslant 0$的部分.

六、(本题满分7分.)

设不恒为常数的函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$.证明在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$f'(\xi)>0$.

七、(本题满分6分.)

设四阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵,$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵,将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

八、(本题满分 8 分.)

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

九、(本题满分 8 分.)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图90-1). $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.

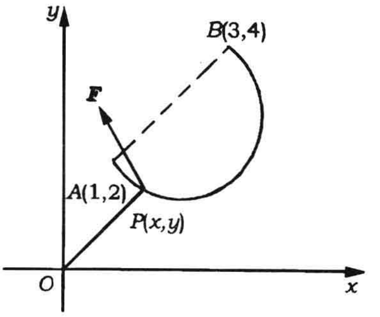

图 90 - 1

十、填空题(本题满分 6 分,每小题 2 分.)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty,$$

则 X 的概率分布函数 $F(x)=$ ________.

(2) 设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是0.4、0.3和0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $\boldsymbol{P}(A\overline{B})=$ ________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布,即

$$\boldsymbol{P}\{X=k\}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-2}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $\boldsymbol{E}(Z)=$ ________.

十一、(本题满分 6 分.)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $\boldsymbol{D}(Z)$.

1990年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 试题详解与分析评注

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) $\underline{x-3y-z+4=0}$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:直线,平面方程.

【思路分析】根据题设,直线的方向向量即为待求平面的法向量,而将参数式直线方程改写为标准式方程即可得直线的方向向量.

【详解】将直线 L 的参数方程改写为对称式方程

$$L:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1},$$

其方向向量为 $s=\{-1,3,1\}$,根据题设即可作为待求平面的法向量,故所求平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)+(z+1)=0,$$

即

$$x-3y-z+4=0.$$

【评注】直线的参数式、对称式和一般式方程之间的相互转换应熟练掌握.对称式方程便于确定直线的方向向量.

(2) $\underline{e^{2a}}$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:求 1^∞ 型未定式极限.

【思路分析】对于 1^∞ 型,直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解】

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}(-a)}}=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}.$$

【评注】在应用基本极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 时,应注意以下结论:若 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$,且 $\lim[f(x)-1]g(x)=A$,则 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{(f(x)-1)}}\}^{[f(x)-1]g(x)}=e^A$.

(3) $\underline{1}$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:分段函数的复合.

【思路分析】直接按复合函数的定义计算即可.注意 $|f(x)|\leqslant 1$.

【详解】由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x>1\end{cases}$ 知,对一切的 x 有 $|f(x)|\leqslant 1$,则 $f[f(x)]=1$.

【评注】注意,要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$. 而这里的关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

(4) $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:二重积分的计算.
【思路分析】由于 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示,故应改变积分次序再积分.

【详解】交换积分次序,有

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^2 e^{-y^2}ydy=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

【评注】题设条件为累次积分的形式,一般都应考虑交换积分次序,对应积分区域为 $D:0\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2$,可先画出草图,再转换为 $D:0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant y$.

(5) 2.

【考点点拨】本题考查的知识点是:向量组的秩的求法.
【思路分析】本题为常规题,通过初等变换求解即可.

【详解】经初等变换向量组的秩不变. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{A})=2$.

【评注】单纯求秩时,既可用行初等变换又可用列初等变换,但若要求进一步求极大线性无关组,则强调只用初等行变换,这样便于确定极大线性无关组,并可将其余向量用极大线性无关组线性表示.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 选(A).

【考点点拨】本题考查的知识点是:变上限积分求导.
【思路分析】根据公式 $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$ 计算即可.

【详解】$F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)x'=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.

【评注】本题也可用取特殊值法求解:取 $f(x)=1$,则 $F(x)=e^{-x}-x$,于是

$F'(x)=-e^{-x}-1$. 代入四个选项中,只有(A)符合要求.

(2) 选(A).

【考点点拨】本题考查的知识点是:复合函数求导.
【思路分析】可先求出一阶导数,二阶导数,……,等等,再找出一般性的规律.

【详解】由 $f'(x)=[f(x)]^2$ 知,$f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3$.

$f'''(x)=2\times 3f^2(x)f'(x)=1\times 2\times 3f^4(x)=3![f(x)]^4,\cdots,f^{(n)}(x)=n!\cdot[f(x)]^{n+1}$.

【评注】本题也可先找出满足 $f'(x)=[f(x)]^2$ 的 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$(解微分方程),再求导:

$$f^{(n)}(x)=n!(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}}=n!f^{n+1}(x).$$

从而得到正确答案为(A)

(3) 选(C).

【考点点拨】本题考查的知识点是:级数的运算性质.
【思路分析】若一般项中一项收敛,另一项发散,则相加减后一定发散.

【详解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^2}$ 收敛$\left(\left|\dfrac{\sin na}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin na}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散.

因此,应选(C).

【评注】除了熟练掌握正项级数,交错级数和一般项级数的判敛方法外,对于级数的运算性质和收敛的必要条件等也不应忽视.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必发散,反过来,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必发散.

(4) 选(D).

【考点点拨】本题考查的知识点是:函数的连续性,极值.
【思路分析】在一点是否可导,一般应根据定义进行分析,而是否取极值,除了两个判别定理外,若不满足判别定理的条件,往往也要求回到定义进行讨论.

【详解】**方法一:**由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$,由极限的保号性可知存在 $x=0$ 的某个去心邻域,在此去心邻域内 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$,又 $1-\cos x>0$ 则 $f(x)>0$,又 $f(0)=0$,则 $f(x)>f(0)$,由极值定义可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

方法二:取 $f(x)=x^2$,显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$. 又 $f(0)=0$,$f(x)$ 连续,即 $f(x)$ 符合原题设条件,显然(A),(B),(C) 均不能选,故应选(D).

【评注】若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=B$,则有 $f(x_0)=0$,$f'(x_0)=AB$. 可见,本题条件 $f(0)=0$ 是多余的,根据 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,即可推导出来.

(5) 选(B).

【考点点拨】本题考查的知识点是:线性方程组解的判定、性质和结构.
【思路分析】本题考查解的性质与结构:非齐次方程组的通解应为对应齐次方程组的通解加上非齐次方程的特解,因此重点在于判断四个答案中前后两部分是否符合要求.

【详解】根据解的性质知,$\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$不是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解,排除(A),(C)两个选项;而$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$尽管为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解,但$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$是否线性无关是未知的,因此$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$并不一定构成$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,排除(D);故正确选项为(B).

事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,因此$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解,而
$\boldsymbol{A}(\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A\beta}_1+\boldsymbol{A\beta}_2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$,说明$\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解,

故$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

【评注】本题是常考题型,应当熟练掌握克莱姆法则和齐次线性方程组、非齐次线性方程组解的判定、性质和结构.

三、(本题满分 15 分,每小题 5 分.)

(1)

【考点点拨】本题考查的知识点是:分部积分法的应用.
【思路分析】被积函数为两个不同类型函数的乘积,可考虑用分部积分法.

【详解】由$\frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=-(2-x)^{-2}\mathrm{d}(2-x)=\mathrm{d}(\frac{1}{2-x})$,有

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(\frac{1}{2-x})\\
&\xlongequal{(\text{分部法})}\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\\
&\xlongequal{(\text{分项})}\ln2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x\\
&=\ln2-\frac{1}{3}[-\ln(2-x)\big|_0^1+\ln(1+x)\big|_0^1]=\frac{1}{3}\ln2.
\end{aligned}
$$

【评注】用分部积分公式$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$时,一般对数函数、反三角函数应保留下来作为$u$,而其余部分可考虑与$\mathrm{d}x$"凑"成$\mathrm{d}v$的形式.

(2)

【考点点拨】本题考查的知识点是:复合函数求偏导.
【思路分析】本题为常规题型,应用复合函数求偏导公式即可.

【详解】这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数.

先求$\frac{\partial z}{\partial x}$,由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f'_2\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x)=2f'_1+y\cos xf'_2.$$

再求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f'_1+y\cos xf'_2)$

$$\begin{aligned}&=2\left(f''_{11}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{12}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)+\cos xf'_2\\&\quad+\left(f''_{21}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{22}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)y\cos x\\&=2(-f''_{11}+\sin xf''_{12})+\cos xf'_2+(-f''_{21}+\sin xf''_{22})y\cos x\\&=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+y\sin x\cos xf''_{22}+\cos xf'_2.\end{aligned}$$

【评注】注意f'_1,f'_2仍为两个中间变量的函数,对其求偏导时,仍应用复合函数求偏导的公式.

(3)

【考点点拨】本题考查的知识点是:线性常微分方程的解法.

【思路分析】特征方程为$\lambda^2+4\lambda+4=0$,其根为$\lambda_1=\lambda_2=-2$,故对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

【详解】因为$a=-2$是特征方程的二重根,故原方程特解可设为$y^*=Ax^2e^{-2x}$

代入原方程得$A=\frac{1}{2}$,故原方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

其中C_1,C_2为任意常数,

【评注】右端项为指数函数、多项式函数、三角函数以及这些函数相加、相乘后的所得函数,如何用待定系数法确定特解,应当熟练掌握.

四、(本题满分6分.)

【考点点拨】本题考查的知识点是:幂级数的敛散性.

【思路分析】注意收敛域应考虑端点的情形,而收敛区间指开区间,其和函数可通过逐项求导得到.

【详解】因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1$,所以收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}=1$,

因此当$-1<x<1$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$收敛;当$x=\pm1$时,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$显然发散.故此幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$,则