少年数学竞赛备赛宝典

组合计数十讲

周春荔　编 著

计数问题趣意浓
分类分步要厘清
容斥递推算法妙
排列组合见真功

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

少年数学竞赛备赛宝典

组合计数十讲

周春荔　编著
刘育涛　赵璞铮　韩　涛　助编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

少年数学竞赛是指从小学三年级到初中二年级前的各种少年学生参加的数学竞赛．其中最著名的有《华罗庚金杯少年数学邀请赛》、《全国希望杯数学邀请赛》等．

本书对几类常见的组合计数试题进行了分类讲解．例题新颖，解法巧妙，对数学思维训练有良好的启迪作用．各讲都配有适量的练习题（有提示和解答），供读者独立研习．本书既是少年朋友学习组合计数常识的良师益友，也是参加数学竞赛同学的备赛宝典．还为少年数学竞赛的教练员提供了教学、培训等丰富的参考资料．

图书在版编目（CIP）数据

组合计数十讲／周春荔编著．—北京：电子工业出版社，2015.1
（少年数学竞赛备赛宝典）
ISBN 978-7-121-24980-8

Ⅰ．①组…　Ⅱ．①周…　Ⅲ．①代数课—初中—教学参考资料　Ⅳ．①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 276210 号

策划编辑：贾　贺　　徐云鹏
责任编辑：徐云鹏
印　　刷：中国电影出版社印刷厂
装　　订：中国电影出版社印刷厂
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：13　字数：159 千字
版　　次：2015 年 1 月第 1 版
印　　次：2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序 言

在贯彻全面素质教育的实践中，学校和社会为青少年学生生动活泼主动地发展，探索了许多新的途径. 其中各种科普讲座、各种培训班、夏令营和学科竞赛，学生可根据爱好自主选择参加. 这些活动对早期发现人才、培养人才是极为有益的. 其中人们关注的各类少年数学竞赛也很能说明问题. 比如自 1986 年创办的华罗庚金杯少年数学邀请赛的早期竞赛优胜者，不少人今天已成为所从事业界的知名人士，华杯赛的优胜，成为开启他们成功之路的起点. 再如自 1991 年创办的“希望杯”全国数学邀请赛，为不少教育条件后进地区的孩子们带来了希望！我国数学普及工作的经验证实了数学家王元院士的题词“数学竞赛好”！我国青少年数学竞赛活动的成果，证明了 1956 年以华罗庚教授为代表作出的在我国开展数学竞赛活动的决定是极有远见的！

数学竞赛当今已经成为世界数学教育的潮流，它是青少年数学教育的重要组成部分. 著名数学教育家弗赖登塔尔说：“数学是智力的磨刀石，对于所有信奉教育的人而言，是一种不可缺少的思维训练”. 菲尔兹奖获得者陶哲轩(Terence Tao) 教授对此深有体会，他说：“数学问题或智力题，对于现实中的数学（即解决实际生活问题的数学）是十分重要的，就如同寓言、童话和奇闻轶事对年轻人理解现实生活的重要性一样”. “如果把学

习数学比做勘探金矿，那么解决一个好的数学问题就近似于为寻找金矿而上的一堂‘捉迷藏’课：你要去寻找一块金子……，是在你的能力所及的范围内，同时适当地给了你去挖掘它的合适工具（例如已知条件）. 因为金子隐藏在一个不易发现的地方，要找到它，比随意挖掘更重要的是正确的思路和技巧.”可见，数学对开发智力、锻炼思维的重要作用.

多年来各种少年杯赛，积累了不少有实际背景、具有一定挑战性的趣味问题，对发展数学爱好者的数学思维十分有益，为今后的少年数学培训和智力开发提供了有效的途径和大量的资料. 因此，对这些问题的分类整理研究的时机已经成熟，条件已经具备.《组合计数十讲》就是其中的一项. 其内容主要以小学高年级与初一的知识为主，介绍组合计数的基本思想. 它是一套以数学竞赛问题为载体的锻炼思维的健美操. 涉及的只是初步的排列、组合知识，期望广大少年数学爱好者能从本书受益，也期望本书能对数学教练员的培训和数学普及工作提供有益的资料和启示.

此外，侯瑞兰、周晓光、周冬梅、胡战鸽以及刘育涛、赵璞铮和韩涛等老师对本书的写作提供了直接有效的支持与帮助，作者在此对他们表示诚挚的感谢.

首都师范大学数学科学学院

周春荔

作者简介

周春荔　教授　男　1941 年生　汉族　北京市人　中共党员　中国数学会会员、中国数学奥林匹克首批高级教练员.《中学生数学》常务编委. 退休前是首都师范大学数学系数学教育教研室主任.

周春荔教授一直从事数学与数学教育、数学方法论与奥林匹克数学的综合研究与教学. **2001 年退休后已出版的主要著作有**：

《数学方法概论》(2007.广西教育出版社)、《数学思维概论》(2012.北京师范大学出版社)；

翻译出版（哈尔滨工业大学出版社）:《俄罗斯平面几何问题集》(2009)、《斐波那契数》(2010)、《俄罗斯立体几何问题集》(2014)等;

青少年数学竞赛方面: **2004 中国物资出版社出版丛书**:《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》;

《二十世纪北京市中学生数学竞赛试题解析（1956—2000）》(2011.科学普及出版社)、《初中数学奥林匹克原题解法》(2012.山西教育出版社)。**电子工业出版社出版套书**:《美丽的数学—与青少年交流数学学习》(2013)、《几何问题十讲》(2014)、《整数问题十讲》、《组合计数十讲》、《应用问题十讲》、《团体口试十讲》.

自 1978 年至今一直从事数学普及工作. 历任北京数学会理事，副秘书长，北京数学会普及工作委员会副主任. 是北京数学奥林匹克学校创始人之一，第一任副校长. 是全国波利亚数学思想研究会、全国初等数学学术论文交流会的发起人之一、协调组成员. 曾任数学科学方法论研究交流中心副主任.《数学教育学报》编委. 参加过 2001—2005 年北京市五年高考（春季、夏季）10 次的数学命题工作，发表过多篇相关的文章.

从 1980 年至今，一直从事北京市中学生数学竞赛的组织和命题工作，从 1991 年起任华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会委员，全国“希望杯”数学邀请赛组织委员会常务委员、命题委员会副主任，是上述赛事的资深命题专家. 有丰富的培训竞赛选手与教练员的经验，授课深入浅出，富有启发性，所写的数学普及读物和生动有趣的课堂教学很受青少年数学爱好者的欢迎.

目 录

第一讲

筛选枚举树形图

要知道一个班的人数，我们可以一个人、一个人地去数，这就是枚举法. 只要不数重，不漏掉就可以了. 这是最原始、最简单的也是最基本的计数方法. 枚举者，一一列举也，也称穷举. 应用此法时，要注意有规律地数，而不能乱数. 否则就会产生乱、漏、重复. 我们把这种不重不漏进行列举的方法叫做枚举法.

1. 筛选枚举法

例 1. 小于 50 的质数有多少个?

答： 15 个.

解： 将小于 50 的质数一一列举出来，它们是:

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47 共计 15 个.

说明： 上面的一一列举，叫做**枚举**，由于我们已经知道了 50 以内有哪些数是质数，只要依次列举出来就可以了. 其实省略了对质数判定的筛选过程.

早在古希腊时期，人们是用下面的方法求不超过自然数 n 的所有质数的.

将 $1 \sim n$ 的自然数自小到大排成一列 1，2，3，4，…，n.

划去 1，保留 2 划去 2 的倍数，保留 3 划去 3 的倍数，保留 5 划去 5 的倍数，……，直到对不大于 $\sqrt{n}$ 的质数都完成了上述操作，剩下的数，就是不超过 n 的所有质数. 据说这个方法是由古希腊数学家挨拉托斯特尼（Eratosthenes，约公元前 274—公元前 194 年）发明的. 挨拉

托斯特尼将自然数列写在一块涂了一层蜡的板上，在写合数的地方刺个小洞，因此这块充满小孔的板很像一个筛子，用它筛去不超过 n 的一切合数，剩下的是不超过 n 的全部质数. 这个方法就是著名的**筛法**，又称**挨拉托斯特尼筛子**. 下面是用筛法确定不超过 50 的质数的图式.

①	2	3	④	5	⑥	7	⑧	⑨	⑩
11	⑫	13	⑭	⑮	⑯	17	⑱	19	⑳
㉑	㉒	23	㉔	㉕	㉖	㉗	㉘	29	㉚
31	㉜	㉝	㉞	㉟	㊱	37	㊳	㊴	㊵
41	㊷	43	㊹	㊺	㊻	47	㊽	㊾	㊿

用上述筛法，原则上已经解决了若 $n>1$，求不超过 n 的全部质数的方法.

这种方法，充分体现了**筛选、枚举**的计数过程.

其中，**筛选应遵循的原则是：确定范围，逐个试验，淘汰非解，寻求解答.**

例 2. 方程 $x+y=10$ 有多少组正整数解?

答： 9 组.

解： 方程的正整数解列表枚举如下:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

共 9 组正整数解.

例 3. 在 1～100 这一百个自然数中，任取两个数使其和大于 100，有多少种取法?

答： 1275 种取法.

解：与 1 搭配只有（1，100）；1 种；

与 2 搭配有（2，100），（2，99）；2 种；

与 3 搭配有（3，100），（3，99），（3，98）；3 种；

与 4 搭配有（4，100），（4，99），（4，98），（4，97）；4 种；

……

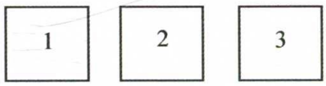
与 48 搭配有（48，100），（48，99），……，（48，53）；48 种；

与 49 搭配有（49，100），（49，99），……，（49，52）；49 种；

与 50 搭配有（50，100），（50，99），……，（50，51）；50 种.

总计有 $1+2+3+\cdots+49+50=1275$ 种取法.

例 4. 有三张卡片，在它上面各写有一个数字（见右图），从中抽出一张、两张、三张，按任意顺序排起来，可以得到不同的一位数、两位数、三位数，请你将其中的质数都写出来.



（第二届华杯赛复赛试题 2）

答：2，3，13，23，31.

解：如果一个数的各位数字之和能被 3 整除，那么这个数也能被 3 整除. 因为三张卡片上的数字分别为 1，2，3. 这三个数字的和为 6，能被 3 整除，所以用这三个数字任意排成的三位数都能被 3 整除，因此不可能是质数.

再看二张卡片的情形. 因为 $1+2=3$，根据同样的道理，用 1，2 组成的二位数也能被 3 整除，因此也不是质数. 这样剩下要讨论的二位数只有 13，31，23，32 这四个了. 其中 13，31 和 23 都是质数，而 32 不是质数.

最后，一位数有三个：1，2，3. 其中 1 不是质数. 2 和 3 都是质数.

总之，本题中的质数共有五个：2，3，13，23，31.

说明：枚举数数，也不就是一个劲地“死数”，也要注意巧数.如本题根据被 3 整除的特点，判定，用 1，2，3 排成的所有三位数都不是质数，所以，我们直接列举从两位数开始. 当然，如果将三张卡片组成的

所有数都写出来，再一个一个地分析，也可以做出来，但这样做是不可取的.

例 5. 在所有的两位数中，十位数字比个位数字大的两位数有多少个？

（第三届华杯赛初赛试题）

答： 45 个.

解： 适合要求的两位数我们枚举出来，有：

10，（1 个）

20，21 （2 个）

30，31，32 （3 个）

……

90，91，92，…，98 （9 个），

共有： $1+2+3+\cdots+9=\dfrac{(1+9)\times 9}{2}=45$（个）.

故这样的两位数共有 45 个.

例 6. 105 的约数共有几个？

答： 8 个.

解： 分解 $105=1\times 3\times 5\times 7$，依次列举出 105 的约数：1，3，5，7，15，21，35 和 105，所以，105 正的约数有 8 个.

例 7. 编号从 1 到 10 的十个白球排成一行，现按照如下方法涂红色：1）涂 2 个球；2）被涂色的 2 个球的编号之差大于 2. 那么不同的涂色方法有多少种？

（第 18 届华杯赛小中决赛 A 卷试题 12）

答： 28 种.

解： 设被染色的每两个球中的小号码为 k，则 k 取值 1，2，3，4，5，

6，7.

另一个被染色的球的号码可能是$k+3$, $k+4$, …, 10.

采用列举法:

k=1 时，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(1，7)，(1，8)，(1，9)，(1，10)，　共 7 种;

k=2 时，(2，5)，(2，6)，(2，7)，(2，8)，(2，9)，(2，10)，　共 6 种;

k=3 时，(3，6)，(3，7)，(3，8)，(3，9)，(3，10)，　共 5 种;

k=4 时，(4，7)，(4，8)，(4，9)，(4，10)，　共 4 种;

k=5 时，(5，8)，(5，9)，(5，10)，　共 3 种;

k=6 时，(6，9)，(6，10)，　共 2 种;

k=7 时，(7，10)，　共 1 种.

不同的染法数为 1+2+3+4+5+6+7=28 种.

例 8. 1995 的数字和是 1+9+9+5=24.问：小于 2000 的四位数中数字和等于 24 的数共有多少个?

（第 5 届华杯赛口试题）

答：15 个.

解：小于 2000 的四位数中千位数字是 1，要它的数字和为 24，只需其余三位数字和为 23，因为十位、个位数字之和最多是 9+9=18，因此百位数字至少是 5. 于是，

百位为 5 时，只有 1599 这 1 个;

百位为 6 时，只有 1689，1698 共 2 个;

百位为 7 时，只有 1779，1788，1797 共 3 个;

百位为 8 时，只有 1869，1878，1887，1896 共 4 个;

百位为 9 时，只有 1959，1968，1977，1986，1995 共 5 个.

所以，小于 2000 的四位数中数字和等于 24 的数总计有 1+2+3+4+5=15 个.

思维链接

问：小于2000的自然数中数字和等于24的数共有多少个？

显然，一位、两位的自然数中没有数字和等于24的数. 在三位数中，由于十位、个位数字之和最多是9+9=18，因此百位数字至少是6.下面分情况计算：

百位为6时，只有699这1个；

百位为7时，只有789，798共2个；

百位为8时，只有888，879，897共3个；

百位为9时，只有969，996，978，987共4个.

以上1～999中数字和等于24的数共计10个；又如例8已计算，1000～1999中数字和等于24的数共计15个，所以小于2000的自然数中数字和等于24的数共有25个.

例9. 若两位数的平方只有十位上的数字是0，那么这样的两位数共有多少个？

答： 9个.

解： 设符合条件的两位数是$\overline{ab}$. 所以

$$\overline{ab}=10a+b,\ \left(\overline{ab}\right)^2=\left(10a+b\right)^2=100a^2+10\times 2ab+b^2$$

两位数$\overline{ab}$的平方的十位上的数字等于$2ab$个位上的数与b^2的十位上的数字之和的个位数字，为0. 因为$\overline{ab}$的平方只有十位上的数字为0，所以$b\neq 0$.

当b取1～9时，	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2的十位上的数字分别为	**0**、	**0**、	**0**、	**1**、	**2**、	**3**、	**4**、	**6**、	**8**.

$2ab$个位上的数字如下：

当a为1时，分别为	2、	4、	6、	8、	0、	2、	4、	6、	8;
当a为2时，分别为	4、	8、	2、	6、	0、	4、	8、	2、	6;
当a为3时，分别为	3、	6、	9、	2、	5、	8、	1、	4、	7;

当 a 为 4 时，分别为　8、6、4、2、0、8、6、4、2；
当 a 为 5 时，分别为　0、0、0、1、2、3、4、6、8；
当 a 为 6 时，分别为　2、4、6、8、0、2、4、6、8；
当 a 为 7 时，分别为　4、8、2、6、0、4、8、2、6；
当 a 为 8 时，分别为　6、2、8、4、0、6、2、8、4；
当 a 为 9 时，分别为　8、6、4、2、0、8、6、4、2.

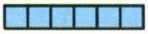
所以这样的两位数有 47，48，49，51，52，53，97，98，99，共 9 个.

例 10. 用若干个边长为 1 的正方形和长为 2、宽为 1 的小长方形，不重叠地拼成一个长为 6、宽为 1 的大长方形. 共有___种不同的拼法.

（第 18 届华杯赛总决赛小中二试试题 2）

答： 13.

解： 列举的方法.

如果全用正方形，1 种方法；

如果用一个小长方形，余下的 4 格用正方形，5 种方法；

如果用两个小长方形，余下的 2 格用正方形，6 种方法；

如果用三个小长方形，1 种方法；

共计 13 种方法.

2. 树形图枚举法

例 11. 华杯赛口试，每个代表队要从小学、初一、初二年级各两名选手中选派 3 人. 规定小学生至少出 1 人，初二学生至多派一名. 问一个口试队按年级的组成方式有多少种?

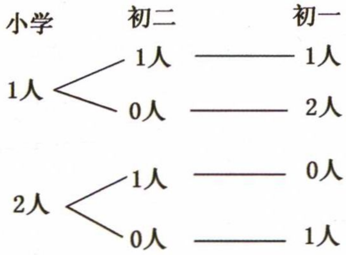
答： 4 种.

解： 由所派 3 名选手中，“初二学生至多派一人”：初二学生可派 1 人或 0 人.

“小学生至少出 1 人”：

小学生可出 1 人，2 人.

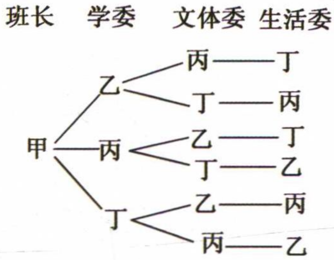
派人方案可利用树形图表示，如右图所示. 一个口试队按年级的组成有 4 种方式.



例 12. 甲、乙、丙、丁 4 个人组成班委会，其中一人任班长，一人任学习委员，一人任文体委员，一人任生活委员. 问：有多少种组成班委会的方案?

答： 24 种.

解： 右图是甲做班长时，班委会组成的 6 种方案. 同理，乙，丙，丁做班长时，班委会组成也各有 6 种不同的方案.



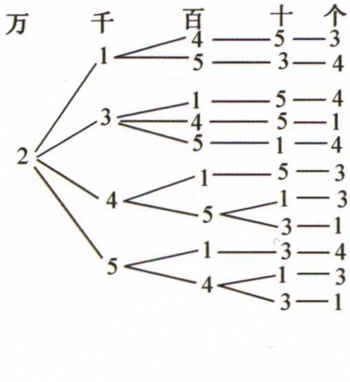
所以，甲、乙、丙、丁 4 个人组成班委会，其中一人任班长，一人任学习委员，一人任文体委员，一人任生活委员，

共有 6×4=24 种组成班委会的方案.

例 13. 用 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，要求 1 不在万位，2 不在千位，3 不在百位，4 不在十位，5 不在个位.问：这样的五位数共有多少个?

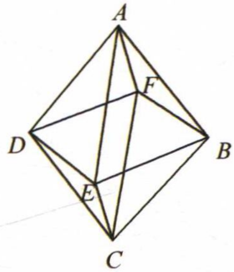
答： **44 个.**

解： 先设万位是 2，千位只能是 1，3，4，5，画一个树形图：



所以，万位是 2 的符合题意的五位数有 11 个. 同样地，万位分别是 3，4，5 的符合题意的五位数也各有 11 个. 因此，符合题意的五位数共有 $11\times4=44$ 个.

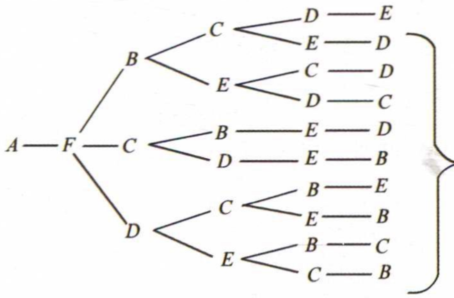
说明： 如果把 1，2，3，4，5 看成是 5 封不同的信，把万位、千位、百位、十位、个位看成是 5 个不同的信封，这个问题就变成错装信笺的问题：有一个人写了五封信，相应写有五个信封. 问：把五封信都错装信封的方法数有多少种？答案也是 44 种.



例 14. 如图所示，八面体有 12 条棱，6 个顶点. 一个甲虫从顶点 A 出发沿着棱爬行，要经过每个顶点一次，且只经过一次. 问有多少种不同的走法？

答： 40 种.

解： 首先我们注意到，顶点 D，F，B，E 的位置是对称的，因此，从 A 出发经 F 和从 A 出发先经 D、E、B 的走法一样多. 从 $A\to F\to\cdots$ 的走法如图有 10 种走法.



将 F 与 D，B，E 分别对换，各有 10 种走法. 所以共有 $4\times10=40$ 种走法.

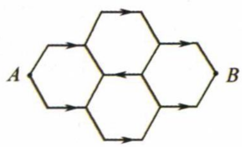


图 a

例 15. 一只小虫沿图 a 中的线路从 A 爬到 B. 规定：图中标示箭头的边只能沿箭头方向行进，

而且每条边在同一路线中至多通过一次. 那么小虫从 A 到 B 的不同路线有_______条.

答：10.

解：见图 b，小虫的爬行路线经过 C 的有以下 5 条：

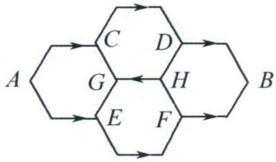


图 b

$A\to C\to D\to B$，

$A\to C\to D\to H\to F\to B$，

$A\to C\to D\to H\to G\to E\to F\to B$，

$A\to C\to G\to E\to F\to B$，

$A\to C\to G\to E\to F\to H\to D\to B$.

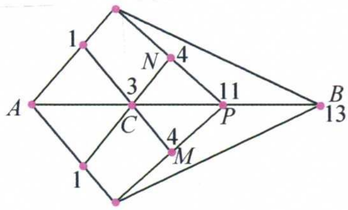
由对称性，可知小虫的爬行路线经过 E 的也有 5 条. 所以总的不同路线有 10 条.

3. 标数法计数

例 16. 如图由西向东走，从 A 处到 B 处有几种走法？

答：13 种.

解：可以按照一定规律，用枚举法找出所有路线.我们在交叉路上有顺序地标上不同走法的数目，例如从 A 到 C 有三种走法，在 C 处标上 3，从 A 到 M（N）有 $3+1=4$ 种，从 A 到 P 有 $3+4+4=11$ 种，这样逐步累计到 B，可得 $1+1+11=13$（种走法）.



说明：此类标数枚举法解几何题，对于情况比较少或者规律性较强的图形比较适用.

例 17. 见图，一只青蛙开始在正六边形 $ABCDEF$ 顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两个顶点之一. 在 D 点处有只飞虫，若青蛙在 5