

第4版

高等数学 习题集

上海理工大学数学系 编著

高等数学习题集

(第四版)

上海理工大学数学系 编著



上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/上海理工大学数学系编著. —4版. —上海:上海财经大学出版社, 2011. 8

ISBN 978-7-5642-1148-6/F · 1148

I. ①高… II. ①上… III. ①高等数学-高等学校-习题集
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 150519 号

☐ 责任编辑 袁 敏

☐ 封面设计 张克瑶

☐ 责任校对 胡 芸 卓 妍

GAODENGSHUXUE XITIJI

高等数学习题集

(第四版)

上海理工大学数学系 编著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海惠顿实业公司印刷装订

2011 年 8 月第 4 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 16.5 印张 250 千字

印数: 31 371—35 370 定价: 31.00 元

第四版前言

《高等数学习题集》自 2000 年出版以来,先后经过两次修订并再版。结合多年来我们的教学经验和《高等数学习题集》(第三版)出现的一些不足,贯彻因材施教和与时俱进的思想,此次,我们对该书进行了较大幅度的修订。

《高等数学习题集》(第四版)在保持原有特色和风格的基础上,增减和修改了部分习题,加强了相关内容的基本概念、基本理论和基本技能的训练,每个章节的习题搭配上更注意“坡度”,且题型及内容也更趋于合理。

本习题集是参照同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第六版)内容顺序编排的;在能力提高部分,我们精选了部分历年考研题,供学有余力的学生选做;在附录中,我们增加了三角函数基本公式,供学生学习时查阅。

《高等数学习题集》的修订是在教研室集体讨论的基础上进行的,参加的老师有(按姓氏笔画排列):

王新利 叶亚盛 朱祎莉 华志勇 刘 凌 刘国华 刘昌良 刘晓俊 李 英
杨 进 余志先 汪文军 张天四 张 菁 陆志雯 陈爱华 苟列红 范莹菁
赵佃立 胡恒春 查富宝 施月萍 秦 梅 贾 高 贾 梅 蔡康盛 魏公明

修订工作始终得到学校和学院各级领导的大力支持,我校数学系教师和部分高年级同学在使用后提出了许多宝贵的意见和建议,我们在此表示诚挚的谢意。

我们虽然尽了最大努力,完成本书的最后修订、校对等工作,但因水平有限,书中仍可能存有差错,敬请广大专家、同行和读者提出批评意见或建议。

《高等数学习题集》编写组

2011 年 7 月

目 录

第四版前言/1

第一篇 基础练习题

- 第一章 函数与极限/3
- 第二章 导数与微分/19
- 第三章 微分中值定理与导数的应用/33
- 第四章 不定积分/49
- 第五章 定积分/63
- 第六章 定积分的应用/73
- 第七章 微分方程/83
- 第八章 空间解析几何与向量代数/97
- 第九章 多元函数微分法及其应用/111
- 第十章 重积分/127
- 第十一章 曲线积分与曲面积分/141
- 第十二章 无穷级数/159

第二篇 能力提高题

- 第一章 函数与极限/175
- 第二章 导数与微分/180
- 第三章 微分中值定理与导数的应用/184
- 第四章 不定积分/189

第五章	定积分/192
第六章	定积分的应用/197
第七章	微分方程/201
第八章	空间解析几何与向量代数/206
第九章	多元函数微分法及其应用/209
第十章	重积分/213
第十一章	曲线积分与曲面积分/217
第十二章	无穷级数/221
附录一	三角函数基本公式/225
附录二	习题答案与提示/227

第一篇 基础练习题



第一章 函数与极限

习题 1-1 映射与函数

1. 设集合 $A = (-\infty, 0] \cup (5, 10]$,
 $B = (-1, 1] \cup (8, +\infty)$, 试写出 $A \cup B$,
 $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

2. 填空题:

- (1) 函数 $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为_____.

- (2) 函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数为_____; 分段函数

$$y = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$$

的反函数为_____.

- (3) 已知 $f(x) = e^x$, 则:

$$F(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$G(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = \underline{\hspace{2cm}};$$

$F(x), G(x)$ 中为偶函数的是_____,
 为奇函数的是_____. 而 $f(x)$ 与
 $F(x), G(x)$ 三者之间的关系是

_____.

- (4) 函数 $y = \arcsin(x-3)$ 的定义域为

_____;

函数 $y = 2 \tan \frac{1}{x-2}$ 的定义域为

_____.

- (5) 函数 $y = e^{\sin x}$ 是由函数_____和_____复合而成; 函数
 $y = \arctan \sqrt{1+x^2}$ 是由函数_____,
 _____和_____复合而成.

- (6) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 则函数

$f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$, 其定义域为_____.

- (7) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则
 函数 $f(3x+2)$ 的定义域为_____;
 函数 $f(x^2+1)$ 的定义域为_____;
 函数 $f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域为

_____.

- (8) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$ 且
 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设下面考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

- (1) 两个偶函数的乘积是偶函数;
- (2) 两个奇函数的乘积是偶函数;
- (3) 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

4. 已知函数 $y = \ln(1+x)$, 求 δ 的取值范围, 使得当 $x \in U(0, \delta)$ 时, 对应的函数值 $y \in U(0, \ln 2)$.

5. 下列函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

(2) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = \frac{x}{|x|}$.

6. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$,

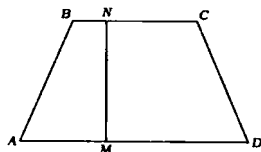
$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{求 } f[g(x)].$$

7. 设常数 $c \neq 0$ 且对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+c) = -f(x)$, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是周期函数.

8. 设函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 试求

$$f\{f[f(x)]\}.$$

9. 等腰梯形 $ABCD$ (如图所示), 两底分别是 $AD=a, BC=b (a > b)$, 高为 h . 现引直线 MN 与两底垂直. 设 $AM=x (0 \leq x \leq a)$. 试将梯形 $ABMN$ 的面积 S 表示成 x 的函数.



习题 1-2 数列的极限

1. 观察下列数列的极限, 将极限值填在空格内.

(1) $x_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$, 极限为_____.

(2) $x_n = 3^{\frac{1}{n}}$, 极限为_____.

(3) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, 极限为_____.

(4) $a_n = (-1)^n e^{-n}$, 极限为_____.

2. 用数列极限的定义证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$, 并举例说明其逆命题未必成立.

习题 1-3 函数的极限

1. 利用函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = 4;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x} = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 3} = 3.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} a-x, & 0 \leq x < 1, \\ 2a+x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 问 a 取何值时 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在?

习题 1-4 无穷小与无穷大

1. 下列极限是否存在? 若存在, 求出极限值:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$.

2. 利用极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界? 此函数当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否为无穷大? 为什么?

4. 求下列函数的水平和垂直渐近线:

(1) $y = e^x + 2$;

(2) $y = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1}, & x > 0, \\ \tan x, & x \leq 0. \end{cases}$

5. 根据函数极限或无穷大定义,填写下表:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	任给 $\epsilon > 0$, 总 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $ f(x) - A < \epsilon$.			
$x \rightarrow x_0^+$				
$x \rightarrow x_0^-$				
$x \rightarrow \infty$			任给 $M > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $ x > X$ 时, 有 $f(x) > M$.	
$x \rightarrow +\infty$				
$x \rightarrow -\infty$				

习题 1-5 极限运算法则

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 1}{(n+2)^3}; \quad 3.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} - 3^{n+1}};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n^2+3} \cdot \sin n!; \quad 0$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \quad (x > 0). \quad 1$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}; \quad \frac{2x}{1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}; \quad \frac{2}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^{10}(2x-5)^{20}}{(6x+1)^{30}}; \quad \frac{1}{2^{10}3^{20}} = \frac{1}{18^{10}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}; \quad 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+5x^2+x}{bx^3+2x^2-1}; \quad \frac{a}{b} \text{ 对 } a, b \text{ 均非零}$$