有限群表示论中的G-代数

黄文林 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

有限群表示论中的G-代数

黄文林 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限群表示论中的 G-代数/黄文林著.—武汉:武汉大学出版社,2016.3
ISBN 978-7-307-17683-6

Ⅰ.有… Ⅱ.黄… Ⅲ.有限群—群表示 Ⅳ.O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 050412 号

责任编辑:胡 艳　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马 佳

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司
开本:850×1168 1/32 印张:4.5 字数:76 千字 插页:1
版次:2016 年 3 月第 1 版　　2016 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-17683-6　　定价:26.00 元

前　　言

表示论是最朴素的线性研究方法。有限群表示论是关于有限群的线性投射的理论，它对单群分类的完成贡献巨大。发端于20世纪约30年代，由Brauer创立的有限群模表示论，标志着有限群表示论研究的一个新时代的到来，人们对它的研究糅合了模论、环论、代数表示论、同调方法等各种工具，而有限群模表示论则为这研究对象提供了珍贵的研究思路和方法，G-代数理论就是在这种背景下诞生的。

从Green的研究开始（文献[26]），许多建立在G-代数上的研究结论不断被发现，例如，有限群的块论和群代数上的模论都可以统一到G-代数中。Puig引入内G-代数的概念，并创立了点群形式下的局部分析方法，推广了关于p-幂零群的判定条件和控制条件，并最终得到了幂零块和它的源代数的结构，有限群表示论中的局部表示论取得了辉煌的成就。

本书主要著述作者所提出的G-代数的点上的相伴

关系、局部内 G-代数上的覆盖关系、广义膨胀 G-代数、G-代数上的广义 Brauer 构造函子等概念，以及它们在有限群表示论中的应用。

有限群表示论是现代数学前沿研究领域之一，本著作希望为有限群表示论中的 G-代数的研究起到一点抛砖引玉的作用。

作者

2016 年 1 月 16 日

目　　录

引　　言

自 20 世纪约 30 年代有限群的模表示论创立以来，关于它的研究就一直蓬勃发展，一方面在于它为研究群结构和群代数的结构提供了一种可行的线性方法，并且不断地取得研究成果，比如，群上的特征标理论对单群分类的巨大贡献；另一方面在于在模表示的发展过程中，人们对它的研究糅合了模论、环论、代数表示论、同调方法等各种工具，从而所得到的结论或多或少地可以联系到其他研究领域，也就为其他研究对象提供了源源不断的研究思路的方法.

在模表示论发展到第三阶段时，特征标理论、块理论、不可分解模理论、局部表示理论已经是该领域的研究基础比较成熟的分支，同时，这些理论在发展的过程中不断交叉和糅合，催生了不少新的研究观点，G- 代数理论就是在这种背景下诞生的，从 Green 的文献[26]中的研究开始，许多建立在 G- 代数上的结论不断被发现.

推广和统一群的相关结论以及群代数上的关于块

论和模论的结论,一直是 G- 代数的重要的研究思路和方法,通过这种方法,越来越多的关于群和群代数的重要结论被发现具有一般形式,由此人们发现这些结论也是代数的普遍的结论在群和群代数上的特殊表现.本书正是在已有的研究结论的基础上,较好地在 G- 代数上实现了许多研究结论的一般化.

本书中,笔者的研究工作主要集中在第2、3、4、5章.

在第 2 章,我们首先设 A 是一个 H- 代数,B 是一个 G- 代数,并且 $f:A\to \mathrm{Res}_H^G B$ 是一个酉 H- 代数同态,这里

$$N_G(P)\leqslant H\leqslant G,$$

P 是 G 的一个 p- 子群.我们研究:

$$A\xrightarrow{f}\mathrm{Res}_H^G B\xrightarrow{\text{Green correspondence for points}}B.$$

那么,对于 B^G 的在 G 中亏群为 P 的点 α,如果 $m_\alpha=1$,我们首先得到它在 $(\mathrm{Res}_H^G B)^H$ 中的 Green 对应点,它也是重数为1的,再通过 f,我们唯一地决定了 A^H 的一个重数为 1 的点,我们称 A^H 中的这个点为 α 的 H- 相伴点.

其次,我们设 A 是一个 G- 代数,B 是一个内 H- 代数,并且 $f:A\to \mathrm{Ind}_H^G B$ 是一个 G- 代数同态,这里 $N_G(P)\leqslant H\leqslant G$,$P$ 是 G 的一个 p- 子群.我们研究:

$$A\xrightarrow{f}\mathrm{Ind}_H^G B\xrightarrow{\text{Green correspondence for points}}B.$$

那么,对于 B^H 的在 H 中亏群为 P 的点 β,如果 $m_\beta=1$,则由与上面类似的工作过程,我们唯一地决定了 β 的在 A^G

中的 G- 相伴点.

通过保持点的重数和比较相对应的点的亏群，我们刻画了上面的相伴关系，我们还证明了上述相伴关系满足块的 Brauer 对应，并用该相伴关系刻画了扩张 Green 对应.

我们发现，上述相伴关系可以合理地应用到内 G-代数 A 的 G- 不动点子代数的中心化子代数 $C_A(A^G)$ 上面，相应地得到了 $C_A(A^G)$ 的块上的相伴关系，从而我们的结论适当地推广了文献[9] 中的双自同态代数的点上的相伴关系，本章得到了下面的主要结论：

定理 2.1.1 (1) 设 A 是一个 H- 代数，B 是一个 G-代数. 假定

$$f:A \to \mathrm{Res}_H^G B$$

是一个酉 H- 代数同态，那么对于 B^G 的每个在 G 中的亏群是 P 的点 α，如果 $m_\alpha = 1$，则 α 唯一地决定了 A^H 的一个点 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$，并且

$$P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^B(\alpha)}(\mathrm{Br}_P^B(f(\mathrm{ass}_H(\alpha)))) \geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_H}(\alpha) = 1.$$

(2) 设 A 是一个 G- 代数，B 是一个内 H- 代数. 假定

$$f:A \to \mathrm{Ind}_H^G B$$

是一个酉 G- 代数同态，那么对于 B^H 的每个在 H 中的亏群是 P 的点 β，如果 $m_\beta = 1$，则 β 唯一地决定了 A^G 的一

个点 $\mathrm{ass}_G(\beta)$，并且

$$P \leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)),$$

$$m_{\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(1_G \otimes_{\mathcal{O}H} \beta \otimes_{\mathcal{O}H} 1_G)}(\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G B}(f(\mathrm{ass}_G(\beta)))) \geqslant 1,$$

$$m_{\mathrm{ass}_G(\beta)} = 1.$$

注 2.1.2　对应于文献[9]中的结论，我们称 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 是 α 的 H-相伴点，并称 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 是 β 的 G-相伴点，显然，我们提出的相伴关系包含了重数为 1 的点上的 Green 对应关系，从而是 Green 对应关系的延伸.

定理 2.1.3　(1) 在定理 2.1.1(1) 中，假设 (A,ρ_A) 是一个内 H-代数，并且 (B,ρ_B) 是一个内 G-代数. 如果 α，$\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

(2) 在定理 2.1.1(2) 中，假设 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数. 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta)$，β 分别属于 G 的块 e' 和 H 的块 f'，那么 e' 和 f' 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.4　设 A 是一个局部内 G-代数，B 是一个局部内 H-代数，并且 B 是 A 的在文献[32]意义下的针对亏群 P 的扩张 Green 对应. 那么

(1) B 是 $\mathrm{ass}_H(1_A) \cdot A \cdot \mathrm{ass}_H(1_A)$ 的嵌入局部内 H-代数；

(2) A 是 $\mathrm{ass}_G(1_B)(\mathrm{Ind}_H^G B)\mathrm{ass}_G(1_B)$ 的嵌入局部内 G-代数.

定理 2.1.5　(1) 设 (A,ρ_A) 是一个内 G-代数，α 是

$C_A(A^G)$ 的亏群为 P 的块. 那么存在 $C_{\mathrm{Res}_H^G A}((\mathrm{Res}_H^G A)^H)$ 的唯一的块 $\mathrm{ass}_H(\alpha)$ 使得

$$\mathrm{Br}_P^{C_A(A^G)}(\mathrm{ass}_H(\alpha)\alpha) \neq 0, P \leqslant_H D(\mathrm{ass}_H(\alpha));$$

(2) 设 (B,ρ_B) 是一个内 H- 代数, β 是 $C_B(B^H)$ 的一个亏群为 P 的块. 那么存在 $C_{\mathrm{Ind}_H^G B}((\mathrm{Ind}_H^G B)^G)$ 的唯一的块 $\mathrm{ass}_G(\beta)$ 使得

$$\mathrm{Br}_P^{\mathrm{Ind}_H^G C_B(B^H)}(\mathrm{ass}_G(\beta)\beta) \neq 0, P \leqslant_G D(\mathrm{ass}_G(\beta)).$$

定理 2.1.6 (A,ρ_A) 是一个内 G- 代数, 并且 (B,ρ_B) 是一个内 H- 代数. 设 α,β 分别是 $C_A(A^G)$ 和 $C_B(B^H)$ 的块, 并且它们有相同的亏群 P.

(1) 如果 $\alpha, \mathrm{ass}_H(\alpha)$ 分别属于 G,H 的块 e,f, 那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

(2) 如果 $\mathrm{ass}_G(\beta), \beta$ 分别属于 G,H 的块 e,f, 那么 e 和 f 是 Brauer 对应下的块.

定理 2.1.7 设 H_i 是 G_i 的子群, P_i 是 G_i 的 p- 子群, 并且

$$N_i := N_{G_i}(P_i) \leqslant H_i, \quad i = 1,2.$$

又设 $(A_i,\rho A_i)$ 是一个有限秩 $\mathcal{O}$- 自由的内 G_i- 代数, α_i 是 $C_{A_i}(A_i^{G_i})$ 的块, 并且 (B_i,ρ_{B_i}) 是一个内 H_i- 代数, β_i 是 $C_{B_i}(B_i^{H_i})$ 的块, $i = 1,2$. 那么 $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ 和 $\beta_1 \otimes \beta_2$ 分别是 $C_{A_1\otimes A_2}((A_1 \otimes A_2)^{G_1\times G_2})$ 和 $C_{B_1\otimes B_2}((B_1 \otimes B_2)^{H_1\times H_2})$ 的块, 而且我们有

(1) $\mathrm{ass}_{H_1\times H_2}(\alpha_1\otimes\alpha_2)=\mathrm{ass}_{H_1}(\alpha_1)\otimes\mathrm{ass}_{H_2}(\alpha_2)$;

(2) $\mathrm{ass}_{G_1\times G_2}(\beta_1\otimes\beta_2)=\mathrm{ass}_{G_1}(\beta_1)\otimes\mathrm{ass}_{G_2}(\beta_2)$.

在第3章,我们研究局部内G-代数上的覆盖关系,在文献[5]、[7]、[20]中对块覆盖和文献[6]中对模覆盖的研究基础上,我们提出了局部内G-代数上的覆盖关系,首先给出了下面的定义:

定义 3.2.1 设$H\lhd G$,A是一个局部内G-代数,C是一个局部内H-代数;我们称局部内G-代数A覆盖局部内H-代数C,如果C是A的嵌入内H-代数并且$D(C)=_G H\cap D(A)$.

显然,该定义包含模覆盖的情形,并且我们发现当限定在块代数的情形下,上面的局部内G-代数上的覆盖关系不弱于文献[5]、[7]、[20]中块覆盖的概念,同时该定义也符合它的群论痛景.

但同时,我们得到了与块覆盖一致的一个结论:

推论 3.2.7 设B是G的块,b是H的块,这里$H\trianglelefteq G$;那么在定义3.2.1的意义下,如果B覆盖b,那么B恰好覆盖b的全部G-共轭.

我们得到下面的两个结论,它们说明我们的定义是合理的:

定理 3.3.3 设A是局部内G-代数,并且C是A的嵌入局部内H-代数,这里$D(A)\leqslant K\leqslant H\leqslant G$,以及$K\trianglelefteq G$;那么$D(A)=_G D(C)$.特别地,如果$D(A)\leqslant H\trianglelefteq G$,

那么 A 覆盖它的每个嵌入局部内 H- 代数.

定理 3.3.4　设 C 是一个亏群为 D 的局部内 H- 代数,这里 D 是 G 的正规子群,如果 $H \trianglelefteq G$,那么 D 也是 $\mathrm{Ind}_H^G C$ 的每个嵌入局部内 G- 代数 A 的亏群,由此 A 覆盖 C.

然后借用扩张 Green 对应,将文献[30]中的块覆盖和文献[6]中的模覆盖的结论推广到局部内 G- 代数上去,得到了局部内 G- 代数上的覆盖关系与扩张 Green 对应之间的一种相容性,结论如下:

定理 3.3.6　扩张 Green 对应提供了一个覆盖 A 的局部内 G- 代数同构类和覆盖 C 的局部内 L- 代数同构类之间的一一对应.

在第 4 章,我们研究 G- 代数上的膨胀方法,在文献[46]、[39]、[50]、[53]、[54]关于模和 G- 代数的膨胀的研究的基础上,我们提出了 G- 代数上的广义膨胀的概念,推广了关于模和 G- 代数的膨胀的相应的结论.

在这一章,我们首先得到了下面的广义膨胀 G- 代数是局部 G- 代数的充要条件:

定理 4.2.1　设 A 是一个 G- 代数,并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数,那么 G/N- 代数 C 的广义膨胀 G- 代数 $A \otimes_k \inf(C)$ 是一个局部 G- 代数当且仅当 C 是一个局部 G/N- 代数.

这个结论推广了下面的事实:

(1) G/N- 代数 C 是局部 G/N- 代数当且仅当 C 的膨胀 G- 代数 $\inf(C)$ 是局部 G- 代数.

(2) $A \otimes_k C$ 是一个局部代数当且仅当 A 和 C 都是局部代数.

再应用块和局部内 G- 代数之间的属于关系，我们得到下面的关于广义膨胀 G- 代数与块覆盖的关系：

性质 4.2.2　设 A 是一个内 G- 代数并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个属于 N 的块 b 的局部内 N- 代数，又设 C 是一个局部内 G/N- 代数. 如果广义膨胀内 G- 代数 $A \otimes_k \inf(C)$ 属于 G 的块 B，那么 B 覆盖 b.

以及下面的关于广义膨胀 G- 代数与块控制的结论：

推论 4.2.3　设 C 是一个属于 G/N 的块 $\bar{b} = (k(G/N)e_{\bar{b}})$ 的局部内 G/N- 代数，并且膨胀内 G- 代数 $\inf(C)$ 属于 G 的块 $B(=kGe_B)$. 那么 B 覆盖 N 的主块并且控制 $\bar{b}$，特别地，G 的主块覆盖 N 的主块并且控制 G/N 的主块.

定理 4.2.4　设 A 是属于 G 的块 B 的内 G- 代数，并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部内 N- 代数. 那么存在平凡内 N- 代数 k 的诱导内 G- 代数 $\mathrm{Ind}_N^G k$ 作为 G/N- 代数的某个嵌入局部内 G/N- 代数 C 的广义膨胀内 G- 代数 $A \otimes_k \inf(C)$ 属于 B.

定理 4.2.4 推广了事实：G 的主块总是控制 G/N 的

某个块，以及总存在平凡 kN- 模 k 的诱导 kG- 模的某个不可分解直因子属于 G 的主块. 换句话说，G 的主块总是覆盖 N 的主块.

我们还得到了下面的刻画广义膨胀 G- 代数的亏群的定理 4.2.5，推广了事实：如果 D 是膨胀局部 G- 代数 $\mathrm{inf}(C)$ 的一个亏群，那么 DN/N 是局部 G/N- 代数 C 的一个亏群. 由此定理 4.2.5 给出了文献[48] (Theorem 2.6.2) 的一个广义的反方向的结论：

定理 4.2.5　*设 A 是一个 G- 代数，并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数，又设 C 是一个局部 G/N- 代数，如果 D 是广义膨胀 G- 代数 $A \otimes_k \mathrm{inf}(C)$ 的一个亏群，那么 DN/N 是 C 的一个亏群.*

推论 4.2.6　*设 A 是一个 G- 代数，D 是 A 的一个亏群，并且 $\mathrm{Res}_N^G(A)$ 是一个局部 N- 代数. 那么 DN/N 是 G/N 的一个 Sylow p- 子群.*

最后，在第 5 章，我们研究 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子. 广义 Brauer 构造函子的研究 p-monomial 模和 monomial Dade 代数时十分有用，在文献[4]、[11]、[12]、[28]、[64] 研究 Brauer 构造（函子）的（内、外）张量积的基础上，我们进一步讨论 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子的张量积，本章的主要结论证实了 G- 模和 G- 代数上的广义 Brauer 构造函子分别与 G- 模和 G- 代数的（外）张量积相容. 结论如下：

定理 5.1.1　V_i 是一个 G_i-模，$H_i \leqslant G_i$，(H_i,ψ_i) 属于 $M_{\mathcal{O}}(H_i)$，$i=1,2$. 那么我们有下面的 $kN_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)$-模同构：

$$V_1(H_1,\psi_1)\otimes_k V_1(H_2,\psi_2)\cong(V_1\otimes_{\mathcal{O}}V_2)(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2),$$

以及 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{V_1}_{(H_1,\psi_1)}\otimes_k\mathrm{Br}^{V_2}_{(H_2,\psi_2)}=\mathrm{Br}^{V_1\otimes_{\mathcal{O}}V_2}_{(H_1\times H_2,\psi_1\times\psi_2)}.$$

定理 5.1.2　A_i 是一个 G_i-代数，$H_i\leqslant G_i$，$\hat{H}_i$ 是 $\mathrm{Hom}(G_i,\mathcal{O}^*)$ 的一个 $N_{G_i}(H_i)$-子群，$i=1,2$. 那么下面是一个$(N_{G_1\times G_2}(H_1\times H_2)/(H_1\times H_2))$-代数同构：

$$A_1(\hat{H}_1)\otimes_k A_2(\hat{H}_2)\cong(A_1\otimes_{\mathcal{O}}A_2)(\hat{H}_1\times\hat{H}_2),$$

以及 Brauer 态射的等同：

$$\mathrm{Br}^{A_1}_{\hat{H}_1}\otimes_k\mathrm{Br}^{A_2}_{\hat{H}_2}=\mathrm{Br}^{A_1\otimes_{\mathcal{O}}A_2}_{(\hat{H}_1\times\hat{H}_2)}.$$

定理 5.1.1 提供了 G-模上的广义 Brauer 构造函子的张量积的一种新的情形，定理 5.1.2 推广了文献[4](Theorem 2.6).