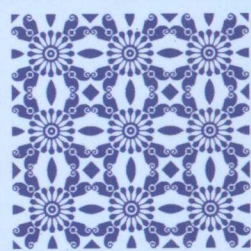


SOLUTION AND ANALYSIS OF PROBLEMS
IN DISCRETE MATHEMATICS

离散数学习题与解析

檀凤琴 何自强 编著



中华女子学院



0409708

院图书馆

44



机械工业出版社
China Machine Press

0.5-44
2

高等院校计算机教材系列

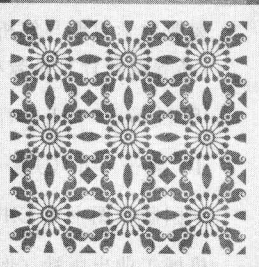
S

OLUTION AND ANALYSIS OF PROBLEMS
IN DISCRETE MATHEMATICS

离散数学习题与解析

檀凤琴 何自强 编著

中华女子学院
图书馆
藏书章



中华女子学院



0409708



机械工业出版社
China Machine Press

本书是与《离散数学》相配套的辅导教材，内容按照主教材对应章节的先后次序安排，每章的内容概述概括了知识点、重点和难点，范例解析对典型题、难题给出了解题思路，提供了解题方法和技巧，习题解答对主教材中的每一道习题都给出了详细的解题过程和答案。此外，附录部分包含3套综合练习与参考答案。

本书不仅可以作为高等院校计算机专业离散数学课程的辅导教材，也可以作为高等院校离散数学课程的参考书以及广大离散数学读者的学习参考资料。

封底无防伪标均为盗版

版权所有，侵权必究

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目 (CIP) 数据

离散数学习题与解析 / 檀凤琴, 何自强编著. —北京: 机械工业出版社, 2011.12
(高等院校计算机教材系列)

ISBN 978-7-111-36750-5

I. 离… II. ①檀… ②何… III. 离散数学—高等学校—题解 IV. O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 259812 号

机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 李荣

北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷

2012 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

185mm×260mm·11 印张

标准书号: ISBN 978-7-111-36750-5

定价: 25.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991; 88361066

购书热线: (010) 68326294; 88379649; 68995259

投稿热线: (010) 88379604

读者信箱: hzjsj@hzbook.com

前言

离散数学作为高等学校计算机专业的重要专业基础课,要求学生系统地掌握基本概念、理论、算法,以及逻辑推理的形式描述、基本的证明和验证方法,并能灵活地运用这些知识,处理一些简单的实际问题。由于离散数学内容丰富,涉及数学的多个学科,研究对象及研究方法都不同于高等数学,而且概念多,内容抽象,使得相当多的初学者感到学好它很困难,特别是在解题时常感到无从下手。因此,要学好这门课程,除了课堂教学外,课后还必须做适量的习题来帮助深入理解和掌握有关内容,以便巩固所学的知识。为了给读者提供学习和解题方法的指导,我们编写了这本书。

本书是与《离散数学》相配套的辅导教材,内容也是按照主教材对应章节先后次序安排的。每章分为三部分。第一部分是本章内容概述,其中包括知识点、重点、难点和内容提要。这部分是相应章节的概括,是对教学大纲所要求掌握和解答习题所涉及的概念、理论、算法、方法的总结,也可以说是一个复习提纲,便于读者在学习中提纲挈领地掌握所学内容。第二部分是范例解析,为一些典型题、难题提供了解题思路和方法。每一例都有分析和详细解答,有的是一题多解。我们希望在解题技巧、拓广思路方面对读者有所帮助,以使读者逐步提高分析问题和解决问题的能力。第三部分是习题解答,对主教材中的每一道习题都给出了详细的解题过程和答案,以便自学者在做完习题后对照检验。本书最后的附录中包含3套综合练习与参考答案,供读者检测其所学内容的深入程度及运用基本概念、基本原理、基本方法以及技巧分析和解决问题的能力。

值得指出的是,很多习题的解答不是唯一的,我们的解答虽然力图详尽、正确、精练,但不一定是最好的,希望广大读者能给出更精巧的解法。

本书中的第1、2、5、6章由何自强撰写,第3、4、7、8、9章和综合练习与参考答案由檀凤琴撰写。由于水平所限,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者批评指正。

编者

2012年1月

华章高等院校计算机教材系列

书 名	书号 (ISBN)	作 者	出版年	定价
16/32位微机原理、汇编语言及接口技术教程	7-111-35593-9	钱晓捷	2011	39.00
计算机组成原理与系统设计	7-111-35102-3	马礼 等	2011	32.00
网络编程与分层协议设计:基于Linux平台实现	7-111-35052-1	刘飏 等	2011	29.00
多媒体技术教程(第2版)	7-111-34077-5	朱洁 等	2011	33.00
软件测试技术:基于案例的测试	7-111-33697-6	赵翀 孙宁	2011	36.00
数据库原理与应用 第2版	7-111-32501-7	何玉洁 梁琦 等	2011	35.00
数据结构及应用: C语言描述	7-111-32155-2	沈华 等	2011	30.00
C++程序设计教程: 基于案例与实验驱动	7-111-30794-5	邬延辉 王小权 等	2010	29.00
计算机网络	7-111-31137-9	张杰 甘勇 等	2010	29.00
大学计算机网络基础 第2版	7-111-31383-0	陈庆章 王子仁	2010	28.00
ASP.NET基础及应用教程	7-111-31057-0	明安龙 宋桂岭 等	2010	29.00
计算机网络技术与应用	7-111-30519-4	张建忠 徐敬东	2010	29.00
离散数学 张清华	7-111-30238-4	张清华 蒲兴成 等	2010	25.00
ARM嵌入式Linux系统设计与开发	7-111-30004-5	俞辉 李永 等	2010	30.00
计算机网络技术教程例题解析与同步练习	7-111-27675-3	吴英	2010	25.00
计算机网络考研习题解析	7-111-28309-6	朱晓玲	2010	26.00
多媒体技术实验与习题指导	7-111-27676-0	赵淑芬 康宇光	2010	25.00
多媒体技术教程	7-111-27678-4	赵淑芬 周斌 等	2010	28.00
软件工程-基于项目的面向对象研究方法	7-111-26683-9	贾可荣、何智勇	2009	32.00
操作系统原理与设计	7-111-25795-0	张红光 李福才	2009	35.00
C语言程序设计习题解析与上机指导	7-111-12132-9	罗晓芳 李慧 等	2009	17.00
汇编语言程序设计	7-111-25841-4	程学先 林珊 等	2009	36.00
计算机网络安全原理与实现	7-111-24531-5	刘海燕	2009	34.00
并行计算应用及实战	7-111-24022-8	王鹏 吕爽 等	2009	32.00
计算机科学与技术导论	7-111-24893-4	陈庆章 叶蕾	2008	30.00
多媒体技术基础与实验教程	7-111-24724-1	陈永强 张聪	2008	36.00
大学计算机网络基础	7-111-24476-9	陈庆章 王子仁	2008	22.00
算法与数据结构(C语言版) 第2版	7-111-14620-9	陈守孔 孟佳娜 等	2008	28.00
面向对象程序设计C++语言编程	7-111-22664-2	张冰	2008	32.00
C++面向对象编程基础	7-111-22474-7	刁成嘉 刁奕	2008	30.00
编译原理	7-111-22278-1	苏运霖	2008	33.00
微型计算机原理及其接口技术	7-111-22277-4	原菊梅	2007	36.00
计算机网络	7-111-22191-3	肖明	2007	30.00
微机系统与汇编语言	7-111-22279-8	颜志英	2007	30.00
C#程序设计大学教程	7-111-21721-3	罗兵 刘艺 等	2007	30.00
算法与数据结构考研试题精析 第2版	7-111-15159-3	陈守孔 胡潇琨 等	2007	42.00
面向对象程序设计C++版	7-111-21296-6	钱丽萍 郝莹 等	2007	25.00
C++语言程序设计	7-111-21211-9	管建和	2007	29.00
面向对象技术与UML	7-111-20912-6	刘振安 董兰芳 等	2007	22.00
C/C++ 程序设计实验教程	7-111-20610-1	秦维佳 侯春光 等	2007	18.00
C/C++ 程序设计教程	7-111-20609-5	秦维佳 伞宏力 等	2007	29.00
C语言程序设计	7-111-20078-0	刘振安	2007	29.00
Java 程序设计教程 第2版	7-111-19971-5	施霞萍 张欢欢 等	2006	30.00
计算机文化基础	7-111-19745-3	刘景春 刁树民	2006	29.00

教师服务登记表

尊敬的老师：

您好！感谢您购买我们出版的_____教材。

机械工业出版社华章公司为了进一步加强与高校教师的联系与沟通，更好地为高校教师服务，特制此表，请您填妥后发回给我们，我们将定期向您寄送华章公司最新的图书出版信息！感谢合作！

个人资料（请用正楷完整填写）

教师姓名	☐ 先生 ☐ 女士	出生年月	职务	职称： ☐ 教授 ☐ 副教授 ☐ 讲师 ☐ 助教 ☐ 其他	
学校	学院		系别		
联系电话	办公：		联系地址及邮编		
	宅电：				
	移动：		E-mail		
学历	毕业院校	国外进修及讲学经历			
研究领域					
主讲课程		现用教材名	作者及出版社	共同授课教师	教材满意度
课程： ☐ 专 ☐ 本 ☐ 研 人数： 学期： ☐ 春 ☐ 秋					☐ 满意 ☐ 一般 ☐ 不满意 ☐ 希望更换
课程： ☐ 专 ☐ 本 ☐ 研 人数： 学期： ☐ 春 ☐ 秋					☐ 满意 ☐ 一般 ☐ 不满意 ☐ 希望更换
样书申请					
已出版著作			已出版译作		
是否愿意从事翻译/著作工作 ☐ 是 ☐ 否			方向		
意见和建议					

填妥后请选择以下任何一种方式将此表返回：（如方便请赐名片）

地址：北京市西城区百万庄南街1号 华章公司营销中心 邮编：100037

电话：(010) 68353079 88378995 传真：(010) 68995260

E-mail:hzedu@hzbook.com marketing@hzbook.com 图书详情可登录<http://www.hzbook.com>网站查询

第1章 命题逻辑

1.1 本章内容概述

【知识点】

- (1) 命题与联结词。
- (2) 命题公式与赋值。
- (3) 等值演算。
- (4) 联结词的全功能集。
- (5) 主析取范式与主合取范式。
- (6) 命题逻辑的推理理论。

【重点】

命题和联结词，常用联结词的真值表，命题符号化。

公式和赋值的定义，永真式、永假式、可满足式的定义，列公式的真值表，用真值表求公式的成真赋值和成假赋值。

两个公式等值的定义，常用等值式，用等值演算证明两个公式等值，用等值演算解决实际问题。

联结词的全功能集和极小全功能集的定义。

析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式的定义，用等值演算和真值表求公式的主析取范式、主合取范式。

判断公式的类型（用真值表、等值演算、主析取范式或主合取范式判断公式是不是永真式、永假式或可满足式）。

逻辑推论的定义，判断推理的正确性，构造推理的证明。

【难点】

正确地进行命题符号化，尤其是正确地使用蕴涵联结词“ $\rightarrow$ ”以及两个表达“或”的联结词“ $\vee$ ”和“ $\veebar$ ”。

判断公式的类型，判断等值式是否成立，判断逻辑推论关系是否成立。

求公式的主析取范式和主合取范式。

构造推理的证明（包括使用附加前提证明法、归谬法）。

【内容提要】

命题 自然语言将命题表达为具有确定真假意义的陈述句。若该语句表达的意义符合事实，就称其为真命题。若该语句表达的意义不符合事实，就称其为假命题。我们用 0 表示假命题，用 1 表示真命题。

真值集合 称 $\{0, 1\}$ 为真值集合，并称 0 和 1 为真值，称假命题的真值为 0，真命题的真值

为 1。

简单命题 简单陈述句表达的命题称为简单命题或原子命题。命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构,用小写英文字母 p, q, r, s, t 等表示简单命题。

联结词 真值函数,即自变量是真值,函数值也是真值的函数,称为联结词。

复合命题 由命题和联结词构成的命题称为复合命题,其中的命题称为该复合命题的支命题。复合命题的真值由支命题的真值和联结词共同决定。

真值表 把真值函数在自变量一切可能取值下的函数值列成的表称为该真值函数(联结词)的真值表。 n 元联结词的真值表有 2^n 行,有 2^{2^n} 个不同的 n 元联结词。

引进六个特定的符号来表示六个常用联结词,它们是 $\neg$ (否定), $\vee$ (析取), $\wedge$ (合取), $\overline{\vee}$ (异或), $\rightarrow$ (蕴涵), $\leftrightarrow$ (等价)。这六个联结词的真值表如表 1-1 和表 1-2 所示。

表 1-1 一元联结词 $\neg$ 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

表 1-2 二元联结词 $\wedge, \vee, \overline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \overline{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

命题变元 取真值,即 0 和 1 为值的变元称为命题变元。命题变元也称为命题变项,用带或不带下标的小写英文字母 p, q, r, s 等表示。表示假命题的 0 和真命题的 1 称为命题常元。

命题公式 命题公式定义如下:

(1) 命题变元和命题常元是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式,则 $(\neg A)$ 是命题公式。

(3) 如果 A 和 B 是命题公式,则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \overline{\vee} B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 是命题公式。

(4) 只有有限次使用上面三条规则能够得到的符号串才是命题公式。

在第 1 章中,将命题公式简称为公式。若公式 B 是公式 A 的子串,则 B 称为 A 的子公式。

赋值 设 $p_1, \dots, p_n$ 是公式 A 中出现的所有命题变元,为 $p_1, \dots, p_n$ 指定的一组真值称为对 A 的赋值。

成真赋值 若指定的一组真值使 A 成为真命题,则称这组值为 A 的成真赋值。

成假赋值 若指定的一组真值使 A 成为假命题,则称这组值为 A 的成假赋值。

永真式 如果公式 A 的每个赋值都是成真赋值,则称 A 为永真式,也称为重言式。

永假式 如果公式 A 的每个赋值都是成假赋值,则称 A 为永假式,也称为矛盾式。

可满足式 如果公式 A 的赋值中至少有一个是成真赋值,则称 A 为可满足式。

可以通过公式 A 的真值表判断 A 是不是永真式、永假式或可满足式。如果 A 的真值表的最后一列都是 1,则 A 是永真式;如果 A 的真值表的最后一列都是 0,则 A 是永假式;如果 A 的真值表的最后一列中既有 1 又有 0,则 A 是非永真的可满足式。

等值 如果公式 $A \leftrightarrow B$ 是永真式,则称公式 A 和 B 等值,也称 A 和 B 逻辑等价,记为 $A \Leftrightarrow B$ 。

双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg \neg A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$ $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \overline{\vee} B \Leftrightarrow B \overline{\vee} A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$(A \overline{\vee} B) \overline{\vee} C \Leftrightarrow A \overline{\vee} (B \overline{\vee} C)$

分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
德·摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
零律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
同一律	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$ $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
等价等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
异或等值式	$A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
假言易位	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

置换规则 设公式 B 是公式 A 的子公式, C 是与 B 等值的公式, 则用 C 置换 B 在 A 中的出现得到的公式与公式 A 等值。

可以用真值表或等值演算判断两个公式是否等值。

可以用真值表或等值演算判断一个公式是不是永真式或永假式。公式 A 是永真式的充分必要条件是 $A \Leftrightarrow 1$, 公式 A 是永假式的充分必要条件是 $A \Leftrightarrow 0$ 。

设 F 是 n 元联结词, $p_1, \dots, p_n$ 是不同的命题变元。如果公式 A 中不出现除 $p_1, \dots, p_n$ 之外的命题变元, 并且 $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow A$, 则称公式 A 定义联结词 F 。设 S 是由联结词组成的集合, F 是联结词。如果存在仅出现 S 中联结词的公式定义 F , 则称 F 可由 S 定义。

全功能集 如果每个联结词都可由联结词集合 S 定义, 则称 S 为全功能集。

文字 命题变元及其否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定, 则称它们为相反的文字。

简单析取式 如果 $A_1, \dots, A_n$ 都是文字, 则称 $A_1 \vee \dots \vee A_n$ 为简单析取式。

简单合取式 如果 $A_1, \dots, A_n$ 都是文字, 则称 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ 为简单合取式。

析取范式 如果 $A_1, \dots, A_n$ 都是简单合取式, 则称 $A_1 \vee \dots \vee A_n$ 为析取范式。

合取范式 如果 $A_1, \dots, A_n$ 都是简单析取式, 则称 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ 为合取范式。

极大项 设 $p_1, \dots, p_n$ 是不同的命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是文字。如果每个 A_i 是 p_i 或 $\neg p_i$, 则称简单析取式 $A_1 \vee \dots \vee A_n$ 为关于 $p_1, \dots, p_n$ 的极大项。

极小项 设 $p_1, \dots, p_n$ 是不同的命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是文字。如果每个 A_i 是 p_i 或 $\neg p_i$, 则称简单合取式 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ 为关于 $p_1, \dots, p_n$ 的极小项。

主析取范式 如果 $A_1, \dots, A_m$ 是关于 $p_1, \dots, p_n$ 的不同极小项, 则称 $A_1 \vee \dots \vee A_m$ 为关于 $p_1, \dots, p_n$ 的主析取范式。

主合取范式 如果 $A_1, \dots, A_m$ 是关于 $p_1, \dots, p_n$ 的不同极大项, 则称 $A_1 \wedge \dots \wedge A_m$ 为关于 $p_1, \dots, p_n$ 的主合取范式。

主析取范式和主合取范式统称为主范式。设公式 A 中出现的命题变元是 $p_1, \dots, p_n$ 。如果关于 $p_1, \dots, p_n$ 的主析取范式 B 等值于 A , 则称 B 是 A 的主析取范式。如果关于 $p_1, \dots, p_n$ 的主合取范式 B 等值于 A , 则称 B 是 A 的主合取范式。

逻辑推论 设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是公式, 如果 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ 是永真式, 则称从前提 $A_1, \dots, A_n$ 推出结论 B 推理正确, 并称 B 是 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑推论, 记为 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 。

证明 证明是公式的序列, 其中的每个公式都是按照事先规定的规则得到的, 并且该序列的最后一个公式正是所要证明的结论。

证明中用到的推理规则如下。在以下推理规则中,横线上面的公式是该推理规则的前提,横线下面的公式是该推理规则的结论。

(1) 前提引入规则 在证明的任何步骤,都可以引入前提。

(2) 置换规则 $\frac{A}{B}$

其中公式 B 与公式 A 等值。

(3) 假言推理规则 $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$

(4) 附加规则 $\frac{A}{A \vee B}$

(5) 化简规则 $\frac{A \wedge B}{A}$

(6) 拒取式规则 $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\neg A}$

(7) 假言三段论规则 $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$

(8) 析取三段论规则 $\frac{A \vee B, \neg B}{A}$

(9) 构造性二难规则 $\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D}$

(10) 合取引入规则 $\frac{A, B}{A \wedge B}$

定理 1.1 设 A, B, C 是任意公式。

(1) $A \Leftrightarrow A$;

(2) 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$;

(3) 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$ 。

定理 1.2 联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是全功能集。

定理 1.3 联结词集合 $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$ 都是全功能集。

定理 1.4 对于每个公式都存在与其等值的析取范式和合取范式。

定理 1.5 每个公式都有唯一的主析取范式和主合取范式。

定理 1.6 设公式 A 中出现 n 个命题变元, A 的主析取范式中包含 k 个极小项, A 的主合取范式中包含 m 个极大项, 则 $k+m=2^n$, 并且以下结论成立:

(1) A 是永真式当且仅当 $k=2^n$ 且 $m=0$ 。

(2) A 是永假式当且仅当 $k=0$ 且 $m=2^n$ 。

(3) A 是非永真的可满足式当且仅当 $0 < k < 2^n$ 且 $0 < m < 2^n$ 。

1.2 范例解析

例 1.1 求公式 $(p \vee q) \vee r$ 的所有成真赋值和成假赋值。

分析 可以用两种方法求公式的成真赋值和成假赋值。一种是真值表法, 另一种是主范式法。在公式的主析取范式中包含多少极小项, 该公式就有多少成真赋值, 其中的每个极小项的成真赋值即为公式的成真赋值。在公式的主合取范式中包含多少极大项, 该公式就有多少成假赋值, 其中的每个极大项的成假赋值即为公式的成假赋值。

解法 1 公式 $(p \vee q) \vee r$ 的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3 公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 的真值表

p	q	r	$p\bar{v}q$	$(p\bar{v}q)\bar{v}r$	p	q	r	$p\bar{v}q$	$(p\bar{v}q)\bar{v}r$
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1

由真值表可以看出, 公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 有四个成真赋值, 它们是 001, 010, 100, 111, 当对 p, q, r 的赋值中有奇数个 1 时, 该赋值是成真赋值。公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 有四个成假赋值, 它们是 000, 011, 101, 110, 当对 p, q, r 的赋值中有偶数个 1 时, 该赋值是成假赋值。

解法 2 求公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 的主析取范式如下。

$$(p\bar{v}q)\bar{v}r$$

$$\Leftrightarrow ((p\bar{v}q) \wedge \neg r) \vee (\neg(p\bar{v}q) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg r) \vee (\neg((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg q)) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

极小项 $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, \neg p \wedge q \wedge \neg r, p \wedge \neg q \wedge \neg r, p \wedge q \wedge \neg r$ 的成真赋值分别为 001, 010, 100, 111, 它们即为公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 的所有成真赋值, 其余赋值 000, 011, 101, 110 即为公式 $(p\bar{v}q)\bar{v}r$ 的成假赋值。也可以通过主合取范式求成假赋值和成真赋值。

例 1.2 判断以下公式的类型。

(1) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$

(2) $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$

(3) $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

分析 可以用三种方法判断公式的类型。第一种方法是真值表法。若真值表的最后一列全是 1, 则该公式是永真式。若真值表的最后一列全是 0, 则该公式是永假式。若真值表的最后一列既有 1 又有 0, 则该公式是非永真的可满足式。第二种方法是等值演算法。若该公式等值于 1, 则它是永真式。若该公式等值于 0, 则它是永假式。第三种方法是主范式法。设在公式中共出现 n 个命题变元。将该公式化为主析取范式。若主析取范式中包含了所有的 2^n 个极小项, 则该公式是永真式。若主析取范式中不包含任何极小项, 则该公式是永假式。若主析取范式中包含的极小项的数目是小于 2^n 的正整数, 则该公式是非永真的可满足式。也可通过该公式的主合取范式判断它的类型。若主合取范式中包含了所有的 2^n 个极大项, 则该公式是永假式。若主合取范式中不包含任何极大项, 则该公式是永真式。若主合取范式中包含的极大项的数目是小于 2^n 的正整数, 则该公式是非永真的可满足式。

解法 1 公式的真值表如表 1-4~表 1-6 所示。

表 1-4 公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1-5 公式 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 的真值表

p	q	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$\neg(q \rightarrow p) \wedge p$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

表 1-6 公式 $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

在公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 的真值表的最后一列中既有 1 又有 0, 因此 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 是非永真的可满足式。公式 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 的真值表的最后一列全为 0, 因此 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 是永假式。公式 $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 的真值表的最后一列全为 1, 因此它是永真式。

解法 2

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \\
 & \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \\
 & \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \\
 & \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \\
 & \Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\
 & \Leftrightarrow p \wedge q
 \end{aligned}$$

显然 $p \wedge q$ 是非永真的可满足式, 因为它有成真赋值 11 和成假赋值 00。因此, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 也是非永真的可满足式。

$$\neg(q \rightarrow p) \wedge p \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge p \Leftrightarrow 0$$

因此, $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 是永假式。

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg p \vee r \\
 & \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
 & \Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r) \\
 & \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

因此, $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 是永真式。

解法 3 因为 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow p \wedge q$, 并且 $p \wedge q$ 是关于 p, q 的极小项, 可看做一个极小项的析取, 因此是关于 p, q 的主析取范式, 所以 $p \wedge q$ 是 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 的主析取范式。因此 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$ 是非永真的可满足式。

$$\begin{aligned}
 & \neg(q \rightarrow p) \wedge p \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge p \Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge p \\
 & \Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q)) \\
 & \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)
 \end{aligned}$$

因为 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 的主合取范式包含了所有的 4 个极大项, 所以 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 是永假式。 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 的主析取范式是 0, 不包含任何极小项。

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg p \vee r \\
 & \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)) \\
 & \quad \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

因为 $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 的主析取范式包含了所有的 8 个极小项, 所以它是永真式。 $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 的主合取范式是 1, 不包含任何极大项。

例 1.3 判断以下等值式是否成立。

$$(1) (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$$

$$(2) p \vee q \rightarrow p \Leftrightarrow p \vee r \rightarrow p$$

分析 有三种方法可以用来判断两个公式是否等值。第一种是真值表法, 列出两个公式的真值表加以比较即可, 若两个公式中出现的命题变元不完全相同, 则在列真值表时需要考虑在两个公式中出现的命题变元。第二种是等值演算法, 若能将一个公式通过等值演算化为另一个公式, 或者将两个公式通过等值演算化为同一个公式, 则这两个公式等值。第三种是主范式法, 将两个公式同时化为主析取范式 (或主合取范式), 若它们的主析取范式 (或主合取范式) 相同, 则它们等值, 否则它们不等值。需要注意的是, 若两个公式中出现的命题变元不完全相同, 则在化主范式时需要考虑在两个公式中出现的命题变元。

解法 1 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 和 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 的真值表如表 1-7 所示。

以下将 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 记为 A , 将 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 记为 B 。

表 1-7 公式 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 和 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$r \vee p$	A	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$r \wedge p$	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表可以看出, $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 。

$p \vee q \rightarrow p$ 和 $p \vee r \rightarrow p$ 的真值表如表 1-8 所示, 因为在这两个公式中出现的命题变元是 p, q, r , 所以真值表有 8 行。

表 1-8 公式 $p \vee q \rightarrow p$ 和 $p \vee r \rightarrow p$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$p \vee r$	$p \vee r \rightarrow p$	p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$p \vee r$	$p \vee r \rightarrow p$
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1

由真值表可以看出, 在赋值 001 下, $p \vee q \rightarrow p$ 为真, 而 $p \vee r \rightarrow p$ 为假, 所以它们不等值。

解法 2 通过等值演算将 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 化为 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 。

$$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge r \wedge p) \vee (p \wedge r \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$$

解法 3 通过等值演算将 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 和 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 分别化为主析取范式或主合取范式, 然后比较它们的主析取范式或主合取范式。

我们求它们的主析取范式, 也可同样地求主合取范式。

先求 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 的主合取范式, 再求它的主析取范式。

$$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee q \vee r) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

公式 $\neg((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p))$ 的主合取范式为其余 4 个极大项的合取, 即

$$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

因此, 可求公式 $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 的主析取范式如下。

$$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

再求 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 的主析取范式。

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q \vee q) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ 和 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ 的主析取范式相同, 所以它们等值。

例 1.4 某勘探队取回一块矿样, 三人判断如下。

甲说: “矿样不含铁, 也不含铜。”

乙说: “矿样不含铁, 含锡。”

丙说: “矿样不含锡, 含铁。”

已经知道, 这三人中有一个是专家, 一个是老队员, 一个是实习队员。化验结果表明: 这块矿样只含一种金属, 专家的两个判断皆对, 老队员的判断一对一错, 实习队员的两个判断皆错。问: 这三人的身份各是什么?

分析 本题比主教材中的例 1.16 难解得多。在例 1.16 中, 已经知道每个人说的话一半对一半错, 而在本题中并不知道他们说的话有多少部分是对的。用字母表示命题如下:

p : 矿样含铁, q : 矿样含铜, r : 矿样含锡。

甲说的两句话为: $\neg p, \neg q$ 。

乙说的两句话为: $\neg p, r$ 。

丙说的两句话为: $\neg r, p$ 。

如果用一个公式表达出这三人中有一个是专家, 一个是老队员, 一个是实习队员, 公式会非常复杂。其实我们不必完全写出这样的公式。因为矿样只含一种金属, 所以 $p \wedge q = 0$, $q \wedge r = 0$, $r \wedge p = 0$ 。甲是实习队员, 即甲说的两句话都是错的, 可表示为: $p \wedge q$ 。乙是实习队员, 即乙说的两句话都是错的, 可表示为: $p \wedge \neg r$ 。丙是实习队员, 即丙说的两句话都是错的, 可表示为: $r \wedge \neg p$ 。甲、乙、丙三人中至少有一个是实习队员, 可表示为:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) = 1$$

因为 $p \wedge q = 0$, 所以 $(p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) = 1$, 即 $p \vee r = 1$, p 和 r 中恰好有一个为 1, 因此 $q = 0$ 。

甲是老队员, 即甲说的话一半对一半错, 可表示为: $\neg p \vee \neg q$ 。乙是老队员, 即乙说的话一半对一半错, 可表示为: $\neg p \vee r$ 。丙是老队员, 即丙说的话一半对一半错, 可表示为: $\neg r \vee p$ 。甲、乙、丙三人中有奇数个老队员, 可表示为:

公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的成真赋值为 000, 001, 010, 011, 100, 111, 它们对应的极小项分别是 $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$, $\neg p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg p \wedge q \wedge \neg r$, $\neg p \wedge q \wedge r$, $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, $p \wedge q \wedge r$, 因此公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的主析取范式是这 6 个极小项的析取, 即

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的成假赋值为 101 和 110, 它们对应的极大项分别为 $\neg p \vee q \vee \neg r$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r$, 因此公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的主合取范式是这两个极大项的合取, 即 $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 。

解法 2 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

因此, 公式 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 的主合取范式是 $\neg p \vee \neg q \vee r$ 。而 $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ 的主合取范式是其余 7 个极大项的合取, 即

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

因此, $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg \neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r))$$

$$\wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

因此, 公式 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 的主析取范式是

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

因此, 公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的主合取范式是 $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$ 。

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge q) \vee (r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee 0 \vee 0 \vee (r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

$$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

因此, 公式 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的主析取范式是

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

1.3 习题解答

1. 下列语句中哪些表达命题? 若表达命题, 表达的是真命题还是假命题?

(1) 2 是素数。

(2) 下午有会吗?

(3) 请把门关上!

- (4) $x+5>6$ 。
 (5) 太阳从西边升起。
 (6) 明天是晴天。
 (7) 前进!
 (8) 如果 $8+7>20$, 则三角形有四条边。
 (9) 请勿吸烟!
 (10) 你喜欢鲁迅的作品吗?
 (11) 如果太阳从西方升起, 你就可以长生不老。
 (12) 如果太阳从东方升起, 你就可以长生不老。
 (13) 请勿随地吐痰!
 (14) 如果 $2+5=2$, 则雪是黑的。

解 (1), (5), (6), (8), (11), (12), (14) 表达命题, 其中 (1), (8), (11), (14) 表达真命题, (5), (12) 表达假命题, (6) 表达的命题的真值要到明天才知道。

2. 将下列命题符号化:

- (1) 张三既爱好音乐又爱好体育。
 (2) 张三爱好音乐但不爱好体育。
 (3) 逻辑不是枯燥无味的。
 (4) 我既没有看见小张又没有看见老李。
 (5) 只有不怕困难, 才能战胜困难。
 (6) 只要天不下雨且我有时间, 我就进城。
 (7) 他生于 1963 年或 1964 年。
 (8) 我进城的必要条件是我有时间。
 (9) 三角形三条边相等是三个角相等的充分必要条件。
 (10) 小王总是在图书馆看书, 除非他病了或者图书馆不开门。

解 (1) p : 张三爱好音乐。 q : 张三爱好体育。

“张三既爱好音乐又爱好体育” 符号化为 $p \wedge q$ 。

- (2) p : 张三爱好音乐。 q : 张三爱好体育。

“张三爱好音乐但不爱好体育” 符号化为 $p \wedge \neg q$ 。

- (3) p : 逻辑是枯燥无味的。“逻辑不是枯燥无味的” 符号化为 $\neg p$ 。

- (4) p : 我看见小张。 q : 我看见老李。

“我既没有看见小张又没有看见老李” 符号化为 $\neg p \wedge \neg q$ 。

- (5) p : 怕困难。 q : 战胜困难。“只有不怕困难, 才能战胜困难” 符号化为 $q \rightarrow \neg p$ 。

- (6) p : 天下雨。 q : 我有时间。 r : 我进城。

“只要天不下雨且我有时间, 我就进城” 符号化为 $\neg p \wedge q \rightarrow r$ 。

- (7) p : 他生于 1963 年。 q : 他生于 1964 年。

“他生于 1963 年或 1964 年” 符号化为 $p \vee q$ 。

- (8) p : 我进城。 q : 我有时间。

“我进城的必要条件是我有时间” 符号化为 $p \rightarrow q$ 。

- (9) p : 三角形三条边相等。 q : 三角形三个角相等。

“三角形三条边相等是三个角相等的充分必要条件” 符号化为 $p \leftrightarrow q$ 。

- (10) p : 小王在图书馆看书。 q : 小王病了。 r : 图书馆不开门。

“小王总是在图书馆看书, 除非他病了或者图书馆不开门” 符号化为 $\neg(q \vee \neg r) \rightarrow p$ 。