

灰色系统丛书

刘思峰 主编

离散灰色预测模型 及其应用

—— 谢乃明 张可 著 ——



科学出版社

灰色系统丛书

刘思峰 主编

离散灰色预测模型 及其应用

—— 谢乃明 张 可 著 ——

国家自然科学基金(71171113、71401052)

航空科学基金(2014ZG52077)

中央高校基本科研业务费专项资金(NR2014068、NS2015083) 联合资助

南京航空航天大学经济与管理学院出版基金

江苏高校“青蓝工程”中青年学术带头人基金

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍离散灰色预测模型的基本原理、构建思路及实际应用,是作者最近 10 年从事灰色系统理论研究成果的系统总结,反映离散灰色预测模型研究和应用的前沿动态。

全书核心内容共 12 章,包括灰色预测模型的基本原理、灰数及其运算法则、符合灰指数特征的单变量离散灰色预测模型、近似非齐次指数特征的单变量离散灰色预测模型、近似多项式序列特征的单变量离散灰色模型、多变量离散灰色预测模型及性质、考虑时滞特征的多变量离散灰色模型、考虑信息集结方式的多变量离散灰色模型、考虑驱动控制影响的多变量离散灰色模型、基于区间灰数序列的离散灰色预测模型、基于 Mont-Caro 模拟的离散灰色预测模型检验方法及研究展望。书稿撰写过程中,作者力求理论深度和实际应用相结合,理论上力求原理清晰、深入浅出、简明扼要、易于理解,应用上强调案例详尽而不累赘。

本书既可作为高等院校和科研院所研究生、教师和研究人員作为研究参考,也可供政府部门、企业决策部门和工程技术相关部门人员应用参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散灰色预测模型及其应用/谢乃明,张可著. —北京:科学出版社,2016
(灰色系统丛书)

ISBN 978-7-03-048901-2

I. ①离… II. ①谢… ②张… III. ①灰色预测模型—研究 IV. ①N949

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 136496 号

责任编辑:李静科/责任校对:邹慧卿

责任印制:肖 兴/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016 年 6 月第一次印刷 印张:11 1/2

字数:217 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书总序

灰色系统理论是 1982 年中国学者邓聚龙教授创立的一门以“小数据, 贫信息”不确定性系统为研究对象的新学说. 新生事物往往对年轻人有较大吸引力, 在灰色系统研究者中, 青年学者所占比例较大. 虽然随着这一新理论日益被社会广泛接受, 一大批灰色系统研究者获得了国家和省部级科研基金的资助, 但在各个时期仍有不少对灰色系统研究有兴趣的新人暂时缺乏经费支持. 因此, 中国高等科学技术中心 (China Center of Advanced Science and Technology, CCAST) 对其学术活动的长期持续支持对于一门成长中的新学科无疑是雪中送炭. 学术因争辩而产生共鸣. 热烈的交流、研讨碰撞出思想的火花, 促进灰色系统研究工作不断取得新的进展和突破.

由科学出版社推出的这套“灰色系统丛书”, 包括了灰色系统的理论、方法研究及其在医学、水文、人口、资源、环境、经济预测、作物栽培、复杂装备研制、电子信息装备试验、空管系统安全监测与预警、冰凌灾害预测分析、宏观经济投入产出分析、农村经济系统分析、粮食生产与粮食安全、食品安全风险评估及预警、创新管理、能源政策、联网审计等众多领域的成功应用, 是近 10 年来灰色系统理论研究和应用创新成果的集中展示.

灰色系统研究成果在很大程度上得益于 CCAST 的持续支持. CCAST 是著名科学家李政道先生在世界实验室、中国科学院和国家自然科学基金委员会等部门支持下创办的学术机构, 旨在为中国学者创造一个具有世界水平的宽松环境, 促进国内外研究机构和科学家之间的交流与合作; 支持国内科学家不受干扰地进行前沿性的基础研究和探索, 让他们能够在国内做出具有世界水平的研究成果. 近 30 年来, CCAST 每年都支持数十次学术活动, 参加活动的科学家数以万计, 用很少的钱办成了促进中国创新发展的大事. CCAST 对灰色系统学术会议的持续支持, 极大地促进了灰色系统理论这门中国原创新兴学科的快速成长. 经过 30 多年的发展, 灰色系统理论已被全球学术界所认识、所接受. 多种不同语种的灰色系统理论学术著作相继出版, 全世界有数千种学术期刊接受、刊登灰色系统论文, 其中包括各个科学领域的国际顶级期刊.

2005 年, 经中国科协和国家民政部批准, 中国优选法统筹法与经济数学研究会成立了灰色系统专业委员会, 挂靠南京航空航天大学. 国家自然科学基金委员会、CCAST、南京航空航天大学和上海浦东教育学会对灰色系统学术活动给予大力支持. 2007 年, 全球最大的学术组织 IEEE 总部批准成立 IEEE SMC 灰色系统委员会, 在南京航空航天大学举办了首届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议. 2009

年和 2011 年, 南京航空航天大学承办了第二届、第三届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议。2013 年, 在澳门大学召开的第四届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议得到澳门特区政府资助。2015 年 7 月, 第五届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议将在英国 De Montfort 大学举办。

在南京航空航天大学, 灰色系统理论已成为本科生、硕士生、博士生的一门重要课程, 并为全校各专业学生开设了选修课。2008 年, 灰色系统理论入选国家精品课程; 2013 年, 又被遴选为国家精品资源共享课程, 成为向所有灰色系统爱好者免费开放的学习资源。

2013 年, 笔者与英国 De Montfort 大学杨英杰教授合作, 向欧盟委员会提交的题为“Grey Systems and Its Application to Data Mining and Decision Support”的研究计划, 以优等评价入选欧盟第 7 研究框架玛丽·居里国际人才引进计划 (Marie Curie International Incoming Fellowships, PIIF-GA-2013-629051)。2014 年, 由英国、中国、美国、加拿大等国学者联合申报的英国 Leverhulme Trust 项目以及 15 个欧盟成员国与中国学者联合申报的欧盟 Horizon 2020 研究框架计划项目相继获得资助。

灰色系统理论作为一门新兴学科已以其强大的生命力自立于科学之林。

这套“灰色系统丛书”将成为灰色系统理论发展史上的一座里程碑。她的出版必将有力地推动灰色系统理论这门新学科的发展和传播, 促进其在重大工程领域的实际应用, 促进我国相关科学领域的发展。

刘思峰

南京航空航天大学和英国 De Montfort 大学特聘教授

欧盟玛丽·居里国际人才引进计划 Fellow

2014 年 7 月

前 言

作为中国原创学科的灰色系统理论,经过 30 多年的发展,已成为不确定性理论和系统科学领域的重要学科,据不完全统计,有 50 多个国家和地区的学者参与到灰色系统理论的研究和应用中。灰色预测模型是灰色系统理论中应用最为广泛的内容,取得了大量创新研究成果,但是仍有许多问题处于探索和完善过程中。作者自 2005 年发表第一篇灰色预测模型方面的论文起,经过十年的思考和凝练,形成了离散灰色模型系列性研究成果。正所谓“十年磨一剑”,本书是作者在离散灰色预测模型方法研究方面的深刻体会和感悟的集中体现,系统展示离散灰色模型的基本原理、构建思路及实际应用,以期与有志于参与灰色系统理论研究的学者们分享和共同思考。作者的主要考虑如下。

(1) 考虑灰信息的内涵,将灰信息解读为“少数据”和“灰元信息”两种形式,分别从“少数据”序列和“灰元”序列两种信息表征形式构建灰色预测模型。

(2) 考虑系统预测过程中变量个数和系统演化特征的不同,分别构建系列单变量离散灰色预测模型和系列多变量离散灰色预测模型。

(3) 突出模型构建机理、算法步骤和案例应用,详细解读和总结灰色预测模型构建的基本原理,尽可能给出模型的详细算法步骤,并用案例展示模型的计算过程。

(4) 尽可能展示离散灰色预测模型的前沿发展动态和思考,科学评价已有模型取得的成果,并对可能进一步研究的方向进行思考和指引。

本书由谢乃明总体策划、主要编写和统一定稿,其中谢乃明执笔完成第 1—4, 6, 10, 12 章,张可执笔完成第 7, 9, 11 章,谢乃明和研究生朱超余共同编写第 5, 8 章。

本书的写作和出版得到了 *The Journal of Grey System*(SCI) 及 *Grey System: Theory and Application* 主编和国际灰色系统与不确定分析联合会 (International Association of Grey System and Uncertain Analysis(GSUA)) 主席刘思峰教授、中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长王文平教授、副理事长张岐山教授、肖新平教授、英国利兹大学 Alan Pearman 教授、英国德蒙福特大学 Yang Yingjie 教授、美国宾西法尼亚州州立 SR 大学 Jeffery Forrest 教授、罗马尼亚布加勒斯特经济大学 Emil Scarlat 教授等的支持和指导,在此致以衷心的感谢!

本书出版得到了国家自然科学基金(项目编号:71171113,71401052)、航空科学基金(项目编号:2014ZG52077)、中央高校基本科研业务费专项资金(项目编

号: NR2014068, NS2015083)、南京航空航天大学经济与管理学院出版基金、江苏高校“青蓝工程”中青年学术带头人基金等项目的资助!

由于作者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请读者批评指正!

谢乃明 张 可

2015 年 12 月 12 日

目 录

丛书总序

前言

第 1 章	灰色预测模型的基本原理	1
1.1	灰色系统理论发展现状	1
1.2	灰色预测模型构建原理	2
1.3	GM(1, 1) 模型构建原理	3
1.4	GM(1, N) 模型构建原理	5
1.5	灰色预测模型研究进展综述	8
1.5.1	灰色预测模型算法研究进展	8
1.5.2	新型灰色预测模型构建研究进展	9
1.5.3	灰色预测模型应用研究进展	10
1.6	本书写作思路和内容安排	11
第 2 章	灰数及其运算法则	12
2.1	引言	12
2.2	灰数的定义及内涵	12
2.2.1	灰数的定义	12
2.2.2	灰数的信息提取	13
2.2.3	灰数的白化	15
2.3	简单灰数的运算规则	16
2.4	合成灰数的运算规则	19
2.4.1	灰数的复合覆盖运算	19
2.4.2	灰数的自差与自除	22
2.4.3	灰数线性空间的定义	23
2.5	灰距离	23
2.5.1	离散灰数的灰距离	23
2.5.2	连续灰数的灰距离	24
2.6	灰矩阵、灰函数及灰方程	25
2.6.1	灰矩阵	25
2.6.2	灰函数	26
2.6.3	灰方程及灰方程组	27

第 3 章 符合灰指数特征的单变量离散灰色预测模型	28
3.1 引言	28
3.2 离散灰色模型的构建	28
3.2.1 离散灰色模型的构造	28
3.2.2 DGM(1,1) 模型与 GM(1,1) 模型关系研究	31
3.2.3 纯指数增长序列预测分析	33
3.3 DGM(1, 1) 模型的拓展与优化	34
3.3.1 DGM(1, 1) 模型的三种形式	34
3.3.2 迭代初始值的影响	35
3.3.3 优化离散灰色模型	37
3.3.4 优化离散灰色模型参数求解	37
3.3.5 优化离散灰色模型的递推函数	39
3.4 离散灰色模型的仿射特性	40
3.4.1 离散灰色模型的参数包定义	40
3.4.2 离散灰色模型的参数特征	42
3.5 算例分析	45
第 4 章 近似非齐次指数特征的单变量离散灰色预测模型	48
4.1 引言	48
4.2 近似非齐次指数特征的单变量离散灰色预测模型构建	48
4.3 NDGM 模型求解算法步骤	51
4.4 NDGM 模型性质	52
4.5 NDGM 模型应用	54
第 5 章 近似多项式序列特征的单变量离散灰色模型	56
5.1 引言	56
5.2 离散灰色模型的灰信息原理	56
5.3 近似多项式序列的单变量离散灰色模型构建	58
5.4 DGM(1, 1, m) 模型求解算法步骤	61
5.5 DGM(1, 1, m) 模型的拟合性质分析	63
5.6 算例分析	69
第 6 章 多变量离散灰色预测模型及性质	72
6.1 引言	72
6.2 GM(n, h) 模型构建	72
6.2.1 对 GM(n, h) 模型的理解	72
6.3 GM(n, h) 模型数乘变换特性	74
6.3.1 模型模拟结果分析	84

6.4	多变量离散灰色模型构建	86
6.4.1	模型的定义与比较	86
6.5	多变量离散灰色模型性质	89
第 7 章	考虑时滞特征的多变量离散灰色模型	100
7.1	引言	100
7.2	时滞多变量离散灰色模型构建	100
7.3	驱动项识别方法与建模步骤	104
7.3.1	驱动项识别方法	104
7.3.2	DDGM(1, N) 建模步骤	105
7.4	实例分析	106
7.4.1	农村面源污染的影响因素集	106
7.4.2	驱动因素及其滞后效应分析	108
第 8 章	考虑信息集结方式的多变量离散灰色模型	113
8.1	引言	113
8.2	FDGM(1, h) 模型的控制反馈模式	113
8.2.1	多变量离散灰色模型与 GM(n, h) 模型	113
8.2.2	DGM(1, h) 模型的控制反馈模式	114
8.2.3	多因素信息集结的控制反馈模式	115
8.3	FDGM(1, h) 模型及其参数辨识	116
8.4	FDGM(1, h) 模型的性质	119
8.5	算例研究	122
8.5.1	NDGM 模型的拟合和预测效果分析	123
8.5.2	GM(1, 5) 模型的拟合和预测效果分析	124
8.5.3	FDGM(1, 5) 模型的拟合和预测效果分析	125
第 9 章	考虑驱动控制影响的多变量离散灰色模型	127
9.1	引言	127
9.2	基于驱动控制的多变量离散灰色模型构建	127
9.3	驱动控制项识别方法与建模步骤	132
9.3.1	驱动控制函数识别方法	132
9.3.2	DCDGM(1, N) 建模步骤	134
9.4	案例应用	134
第 10 章	基于区间灰数序列的离散灰色预测模型	138
10.1	引言	138
10.2	基于区间灰数序列的 DGM(1, 1) 模型	138
10.3	基于区间灰数序列的 NDGM 模型	145

10.3.1	基于区间灰数序列的 NDGM 模型定义	145
10.3.2	基于区间灰数序列的 NDGM 模型求解原理	145
10.3.3	基于区间灰数序列的 NDGM 模型算法步骤	147
10.3.4	算例分析	148
第 11 章	基于 Mont-Caro 模拟的离散灰色预测模型检验方法	150
11.1	引言	150
11.2	灰色模型建模精度随机化仿真方法构造	150
11.2.1	研究方法	150
11.2.2	样本序列生成	151
11.2.3	样本序列建模精度统计	151
11.2.4	总体建模精度推断与建模精度比较	152
11.3	预测模型建模精度仿真试验	152
11.3.1	GM(1, 1) 仿真实验	152
11.3.2	三类灰色系统模型建模精度的比较	155
11.3.3	线性回归与灰色模型精度比较	156
第 12 章	研究展望	158
12.1	灰色预测模型建模序列条件分析	158
12.2	适合新系统规律的灰色预测模型构建	158
12.3	灰色预测模型的特征分析	160
12.4	不同灰色预测模型的比较研究	161
12.5	基于灰信息的灰色预测模型构建及应用	161
	参考文献	162

第1章 灰色预测模型的基本原理

1.1 灰色系统理论发展现状

随着科学技术的发展和人类社会的进步,人们对各类系统认识不断深化.然而由于系统内外扰动的客观存在和人们认识水平和能力的局限,人们所获取到的信息往往带有某种不确定性^[1]. 20 世纪后半叶,包括模糊数学^[2]、粗糙集^[3-4]、灰色系统理论^[5]在内的各种系统科学新理论、新方法不断涌现,为人们解决各类不确定性评价、预测和决策问题提供了方法支持.

灰色系统理论由中国学者首创,1982 年邓聚龙教授在北荷兰出版公司出版的《系统与控制通讯》(*System & Control Letter*) 期刊上发表了题为“灰色系统的控制问题”(*The control problem of grey systems*),标志着灰色系统理论的诞生^[5]. 该理论以“部分信息已知、部分信息未知”的“少数据”“灰元信息”等贫信息不确定问题为研究对象,通过对部分已知贫信息的挖掘、生成和建模,使得系统演化特征得以涌现,进而能够实现对系统进行科学评价、预测和决策. Wang John 等学者在国际知名期刊撰文评论,认为灰色系统理论是近年来中国人在管理科学方法领域的突出贡献之一,解决了大量现实世界的贫信息不确定性问题^[6]. 经过 30 多年的发展,灰色系统理论已经基本形成了其理论体系框架,其主要内容包括以灰色朦胧集为基础的数学运算体系,以灰色序列生成为基础的信息表征体系,以灰色关联空间为核心的分析体系,以灰色模型为中心的模型体系,以系统评估、预测、决策、控制和优化为主体的方法体系. 作为一门方法为主体的学科,该理论被广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术的各个领域. 自灰色系统提出以来,全世界相继有数千种学术期刊接收和刊登灰色系统论文. 1989 年由灰色系统理论创始人邓聚龙教授在英国创办的英文国际期刊 *The Journal of Grey System* 已成为《科学引文索引》(SCI)、《英国科学文摘》(SA)、《美国数学评论》(MR) 等重要文摘机构的核心期刊. 2011 年,南京航空航天大学刘思峰教授在英国著名出版商 Emerald 出版集团创办了新的期刊 *Grey System: Theory and Application*, 这两个期刊专门刊登灰色系统理论及其应用研究的优秀论文,是全世界灰色系统理论研究者公认的灰色系统理论方面的顶级期刊^[7].

灰色预测模型是灰色系统理论的一个重要研究领域,通过特有的累加生成变换进行序列数据建模,把原始数据序列不明显的变化趋势通过累加变换后呈现明显的

增长趋势,并用灰色差分方程和灰色微分方程对变换后的数据进行建模,最后用累减生成进行数据模拟和预测.大量实践应用案例表明灰色预测模型能够符合应用需求,取得较高的预测精度.然而,有时候也存在难以解释的现象,即也可能出现预测误差很大的情况,这个问题长期困扰着灰色系统理论研究的学者们,虽然提出了大量的改进和优化模型,但依然没能从根源上解决和解释存在的预测精度不稳定现象^[8-16].我们通过对灰色预测模型建模机理的研究,发现问题存在的根本原因在于尽管累加生成建模能够有效地发现数据变化趋势,但是由于灰色微分方程和灰色差分方程之间的变换存在着微小的近似误差,当所收集的数据增长率变化较小时,微分方程和差分方程互换所带来的模型误差往往比较小,并不显著影响预测模型的精度;反之,当所收集的数据增长率变化较大时,微分方程和差分方程互换所带来的模型误差就比较大,会影响到模型的预测效果,严重时甚至导致模型不可用.2005年,作者针对灰色预测模型存在的以上问题进行深入分析,在继承累加生成变换的基础上通过构建离散形式的灰色预测模型来解决误差问题^[17].在此基础上,相继形成近似非齐次指数序列离散灰色模型、多变量离散灰色模型、灰数序列离散灰色模型等^[18-25],这些内容将在本书后续章节介绍.为便于后续章节讨论和比较,本章将简单介绍灰色预测模型构建的基本原理,给出 GM(1, 1) 模型和 GM(1, N) 模型 2 个最经典灰色预测模型算法步骤,并给出本书的写作思路.

1.2 灰色预测模型构建原理

灰色预测模型通常被构造成一个连续的灰色微分方程和离散的灰色微分方程.通过分析和挖掘差异信息,可以得出系统主变量的演化趋势,并对其加以预测和控制.灰色预测模型的一般分析过程如图 1.1 所示.在确定恰当的模型形式之前,应当

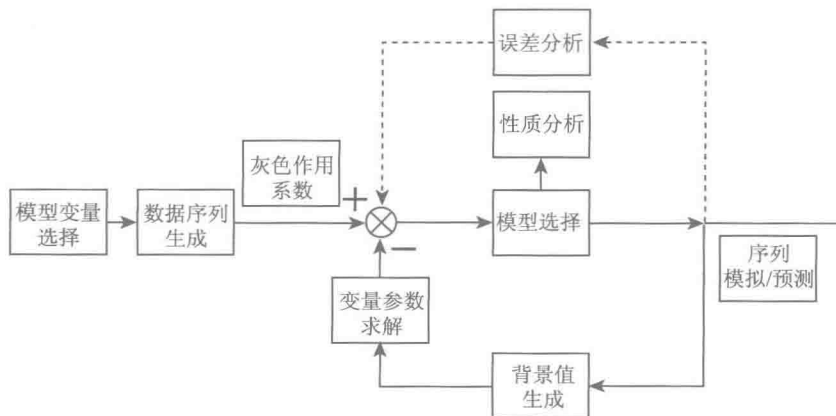


图 1.1 灰色预测模型构建的一般过程

首先进行模型的变量筛选, 以更好地符合所需要解释的变量关系及对系统主变量的有效预测. 其次是根据所确定的变量进行数据收集和处理, 通常来说所收集的数据是符合等时间间隔的. 如果原始数据序列不适用于构建模型, 则可以用序列生成、数据压缩变换或其他数据变换方法来处理数据以便生成符合建模需要的数据序列. 然后在构造背景值的基础上构建合适的灰色预测模型, 如 GM(1, 1) 模型和 GM(1, N) 模型. 进而采用最小二乘法或其他参数求解方法获得所有变量的系数值. 最后可以通过分析模型的性质和误差确定所构建模型的适用范围及是否适用于模拟和预测. 如果模拟精度较高, 则可以将模型应用于实际问题预测中.

1.3 GM(1, 1) 模型构建原理

1984 年, 邓聚龙教授首次提出了 GM(1, 1) 模型和 GM(1, N) 模型, GM(1, 1) 模型主要是针对系统主变量自身的演化特征所构建, 通过构建一阶微分方程和一阶差分方程来分析系统主变量的演化趋势, 称之为“一阶单变量灰色预测模型”^[26]. 而 GM(1, N) 模型不仅考虑了系统主变量, 还考虑若干影响主变量的影响因素, 即通过构建多因素作用的灰色预测模型, 同样是通过构建微分方程和差分方程而得, 被称为“一阶多变量灰色预测模型”. 迄今, 这两个模型应用最为广泛, 下面介绍这两个模型构建的基本算法过程.

设系统主变量原始数据序列为

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(m)) \quad (1.3.1)$$

其一次累加生成 (Accumulating Generate Operator) 序列为

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(m)) \quad (1.3.2)$$

其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.3.3)$$

序列

$$Z^{(1)} = (-, z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(m)) \quad (1.3.4)$$

被称为 $X^{(1)}$ 的均值生成序列或系统的背景值, 其中

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (1.3.5)$$

则称方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (1.3.6)$$

为一阶单变量灰色预测模型 (One Order Single Variable Grey Model, GM(1, 1) 模型). 其中参数 a 是主变量参数或系统发展系数, b 是 GM(1, 1) 模型的灰作用系数或背景值. $\hat{a} = (a, b)^T$ 通过最小二乘方法求得, 即设

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(m) \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(m) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

则

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (1.3.9)$$

方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (1.3.10)$$

被称为 GM(1, 1) 模型的白化方程, 也叫影子方程. 结合式 (1.3.9) 所求解的 a, b 参数值, 代入式 (1.3.10), 可得 GM(1, 1) 模型的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (1.3.11)$$

通过式 (1.3.11) 可以求解一次累加生成序列 $X^{(1)}$ 的模拟值 $\hat{X}^{(1)}$,

$$\hat{X}^{(1)} = (\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \dots, \hat{x}^{(1)}(m)) \quad (1.3.12)$$

运用方程

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (1.3.13)$$

可分别求解原始序列的模拟值和预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$, 排列所有 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 值可得原始序列的模拟值序列

$$\hat{X}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(m)) \quad (1.3.14)$$

结合式 (1.3.1) 和式 (1.3.14) 计算平均绝对误差 (Mean Absolute Percent Error, MAPE) 可得出模型仿真效果, MAPE 被定义为

$$\text{MAPE}(\%) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \quad (1.3.15)$$

对应图 1.1 所述灰色预测模型构建的一般分析过程, 图 1.2 给出了 GM(1, 1) 模型的构建原理. 通常来说, 如果输出数据 $x^{(0)}(k)$ 适用于 GM(1, 1) 模型, 那么可以用 MAPE 来分析原始数据序列 $X^{(0)}(k)$ 和模拟数据序列 $\hat{X}^{(0)}(k)$ 之间的误差. 事实上, GM(1, 1) 模型之所以是一个特殊灰色预测模型, 只有主变量序列被考虑在模型的构建过程中, 而不考虑任何其他影响因素. 因此, GM(1, 1) 模型通常被用来研究系统主变量的自回归演化. 从输入信息和输出结果来看, GM(1, 1) 模型的建模过程与其他时变预测模型相似. 模拟序列的数据随着时间的变化而变化. 不同的是, GM(1, 1) 模型构建是基于累加生成数据而其他时变预测模型构建基于原始序列. 建模过程中, 原始数据的随机扰动经过累加生成过程被大大减弱, 使得系统增长规律得以涌现, 即使当数据较少时, GM(1, 1) 模型仍然能够取得较好的模拟和预测效果.

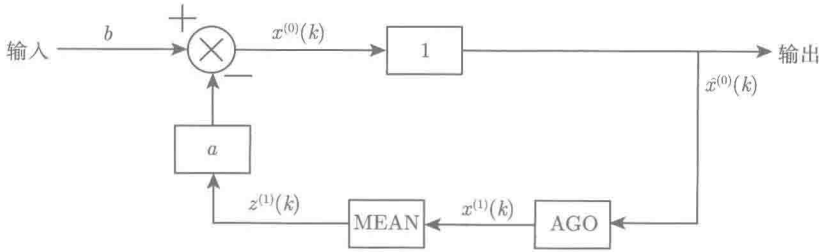


图 1.2 GM(1, 1) 模型的构建原理图

1.4 GM(1, N) 模型构建原理

设系统主变量原始数据序列为

$$X_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(m)) \quad (1.4.1)$$

相关影响因素序列

$$X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(m)), \quad i = 2, \dots, N \quad (1.4.2)$$

序列

$$X_i^{(1)} = (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(m)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4.3)$$

被称为 $X_i^{(0)} (i = 1, 2, \dots, N)$ 的一次累加生成序列, 其中

$$x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j) \quad (1.4.4)$$

序列

$$Z_1^{(1)} = (-, z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \dots, z_1^{(1)}(m)) \quad (1.4.5)$$

被称为 $X_1^{(1)}$ 的均值生成序列或系统的背景值, 其中

$$z_1^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x_1^{(1)}(k) + x_1^{(1)}(k-1)), \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (1.4.6)$$

则称方程

$$x_1^{(0)}(k) + ax_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k) \quad (1.4.7)$$

为一阶多变量灰色预测模型 (One Order Multiple Variable Grey Model, GM(1, N) 模型). 其中参数 a 是主变量参数或系统发展系数, $b_2, b_3, \dots, b_N$ 是 GM(1, N) 模型的灰作用系数或背景值. 类似地, 参数值 $\hat{a} = [a, b_2, b_3, \dots, b_N]^T$ 可以通过最小二乘法求得, 即设

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(m) \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z_1^{(1)}(m) & x_2^{(1)}(m) & \cdots & x_N^{(1)}(m) \end{bmatrix} \quad (1.4.9)$$

则

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (1.4.10)$$

方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = b_2 x_2^{(1)} + b_3 x_3^{(1)} + \cdots + b_N x_N^{(1)} \quad (1.4.11)$$

被称为 GM(1, N) 模型的白化方程, 也叫影子方程. 结合式 (1.4.10) 所求解的参数值, 代入式 (1.4.11), 可得

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= e^{-at} \left[\sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(t) e^{at} dt + x^{(1)}(0) - \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(0) dt \right] \\ &= e^{-at} \left[x_1^{(1)}(0) - t \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(0) + \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(t) e^{at} dt \right] \end{aligned} \quad (1.4.12)$$