

数独领域的两个棘手问题

SHUDU LINGYU DE
LIANGGE JISHOU WENTI

严德人 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位

数独领域的两个棘手问题

严德人 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位

图书在版编目 (CIP) 数据

数独领域的两个棘手问题 / 严德人著. -- 北京 : 知识产权出版社, 2016.1
ISBN 978-7-5130-3883-6

I. ①数… II. ①严… III. ①智力游戏 IV. ①G898.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 278012 号

内容提要

作为数独理论研究的经典之作, 本书不仅给出了数字魔方的计算模型, 还建立了 17 个给定数的数独库的模型, 旨在帮助读者高屋建瓴地建立完整的数独知识体系, 为今后更好地解析数独题目和编撰数独题目奠定良好的理论基础。全书分为两个部分共九章, 第一章到第六章介绍了数字魔方个数计算, 第七章到第九章的主题为 17 个数字数独的建库查库问题。此外, 附录中给出 720 个展开向量与展开向量整数对照表等内容。本书内容丰富, 概念清晰, 阐述精辟, 并配有光盘, 对于数独爱好者来说是一本不可或缺的参考书。

责任编辑: 许 波

数独领域的两个棘手问题

SHUDU LINGYU DE LIANGE JISHOU WENTI

严德人 著

出版发行: 知识产权出版社有限责任公司

电 话: 010-82004826

社 址: 北京市海淀区马甸南村 1 号

责编电话: 010-82000860 转 8380

发行电话: 010-82000860 转 8101 / 8539

印 刷: 三河市国英印务有限公司

开 本: 720mm×1000mm 1/16

版 次: 2016 年 1 月第 1 版

字 数: 138 千字

ISBN 978-7-5130-3883-6

网 址: <http://www.ipph.cn>

<http://www.laichushu.com>

邮 编: 100088

责编邮箱: xbsun@163.com

发行传真: 010-82000893 / 82003279

经 销: 各大网上书店、新华书店及相关专业书店

印 张: 8.5

印 次: 2016 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 28.00 元

出版权专有 侵权必究

如有印装质量问题, 本社负责调换。

序

数独(Sudoku)活动风靡全球!由于其规则简单,知识起点低,正在被越来越多的人所接受。其基本要求是,在81(9×9)个格子上,填上9个数字,使行、列、宫不重复。这样简单的规则,使得不同年龄、不同层次的人可以在一个相对公平的平台上竞技,全民数独正在成为发展趋势。无论是飞机上、餐桌旁、休闲间,我们都可以看到各种形式的数独题供大家填写,手机制造商也抓住商机预装了数独游戏软件供大家使用,一些公司的招聘也采用了数独试题。

自2006年德国举行第一届世界数独锦标赛以来,竞技数独如火如荼地在世界各地开展起来。中国于2007年第一次派出选手参加第二届世界数独锦标赛,从零起步,水平逐步提高,从最初的垫底成绩到问鼎世界冠军,走过了一段不寻常的历程,这也是众多数独工作者无私奉献、共同努力的结果。目前,中国已跨入数独强国行列,成功地举行了一次世界数独锦标赛及多次国际数独大奖赛。数独从娃娃抓起,不断培养新人是我们的一个特色,我们始终保持着竞技数独少年组的绝对优势。

与蓬勃发展的竞技数独相比,数独理论的研究却微乎其微。近年来,在数独方面国内已有了很多出版物,但都止步于竞技数独上。换句话说,其只是出题和解题。在数独方面还有很多基本问题需要讨论和研究,如数独的标准定义及规范、数独建模研究、等价数独研究、算法复杂性研究、结果验证研究等。2012年,三位爱尔兰数学家借助计算机验证了标准数独的最少给出数为17个,这是数独史上的一个里程碑。

严德人先生《数独领域的两个棘手问题》一书的工作令人惊喜,在国内率先给出了数独理论方面的研究成果。他于2006年开始潜心研究数独理论,在数独解

题技巧和数独的理论研究方面默默做了非常多的工作,为推动中国数独的发展做出了很大的贡献。在本书中,他给出了数字魔方的计算模型,并建立了17个给定数的数独库的模型。这一创造性工作将极大地推动数独理论的广泛研究,并将吸引更多的研究者加入。

在本书中,作者创造性地引进展开向量、共轭组的概念,把计算不同数字魔方个数问题变成寻找18个展开向量的全部可能组合问题;科学地证明了全部共轭组个数就是固定第1九宫展开第4和第7九宫,保证3列和第4、7九宫不出现重复数字的全部可能的组合个数,再通过引进数字魔方通用衍生和特殊衍生概念和数字魔方的两个等值定律,让计数全部不同数字魔方个数的计算量压缩到308万分之一,作者还将共轭组用一个4字节的整数表示,解决了程序设计中道道难关,在个人电脑上用半天时间就计算出了全部不同数字魔方的个数。

同样,作者通过采用展开向量和衍生的概念,对一个数独题目通过衍生能够得到 1.2×10^{12} 个不同的数独题目,让人们开阔了眼界,他将数独的衍生进行分析归纳,找出了有代表性的衍生方法,并且用两个9位的整数将数独的衍生进行量化表达,据此设计了17个数字数独题目的建库和查库问题,所采用的方法也是经过精心推敲才获得的成果。

中国的经济腾飞令世界瞩目,在竞技数独的国际大赛上也取得了非常好的成绩。在此,我们希望有更多的像严德人先生的工作成果面世,实现数独理论研究上大的跨越,做出大国应有的贡献。

常维宝

于中国科学院数学与系统科学研究院

前言

九字标准“数独”已经是很多朋友离不开的爱好。我们把九字标准数独完成的结果称为九字标准数字魔方,简称数字魔方。大家知道,数字魔方是数独游戏的基础和最终归宿,那么如何生成一般的数字魔方,全部不同的数字魔方到底有多少,相信你一定很感兴趣。本书将告诉你如何生成最一般的数字魔方,以及全部不同的数字魔方的个数有多少。

几年前,本人的拙著《奇妙的数字魔方》也曾经介绍过全部不同数字魔方个数及其计算的问题,但是没有给出数字魔方等值定律的证明,因此,根据这些等值定律所计算出来的结果,在理论上,可信度受到影响。本书把数字魔方的等值定律简化成两个,并且给出了证明,还将 141 个大共轭组族扩大为 61 个超大共轭组族,大幅度地节省了计算量。最重要的是,本书在引进共轭向量,第一类共轭向量,第二类共轭向量,共轭组,进而对平行的三个九宫的三行和三列的三个展开向量构成共轭组,以及三个展开向量构成共轭组是展开得到两个九宫内数字不重复的充分必要条件等方面,讲得更通俗,更容易理解了。

一个数独题目,含自身在内可以衍生出 1 218 998 108 160 个不同的数独题目来,而且对衍生所得到的每一个题目与原题目的演变关系只需要用两个 9 位的整数来描述,这是怎么做的?本书会告诉你。

任意的两个数独之间的关系有无关和相关两种。相关的情况下,又分同族、同胎和同母三种,这是怎么区分的?读了本书,你就会知道。

前不久,爱尔兰都柏林大学的三位学者已经用电脑软件证明了要使数独题目有唯一解(当然,能称为数独题目,就应该只有唯一解),最少需要保留 17 个数字。目前已经发现彼此无关或者同母的 17 个数字的数独题目有 4 万多个,几乎每个题

目(只有4个例外)都可以衍生出1 218 998 108 160个不同的数独题目,那么总共有 4.9×10^{16} 个不同的17个数字的数独题目,要为这么庞大数目的数独题目建库,并且放在不到3TB的移动磁盘内,这是如何做到的?此外,任意给出一个17个数字的数独题目,要在30min内检查出所给出的题目是否在这个庞大的库中。如果检查发现不在库中,将把它加入库中;如果在库中,还要给出用4万个数独题目中的哪一个题目,用哪两个整数可以衍生得到所给的数独题目?这些又是怎么实现的?读了本书,你也会知道。

随书附送一张光盘,此光盘中,分两部分,每部分都有三个软件包:第一部分为“数字魔方个数”,包括数字魔方生成程序、数字魔方衍生程序和不同数字魔方个数计算程序。这三个软件都是界面非常友好的交互式的程序,并且附有使用说明,希望用户能够满意。第二部分是“数独17衍生族库”,包括数独相关性检查程序、数独17查库增容程序和数独的衍生程序。数独相关性检查程序可以用来判别任意两个数独题目的四种不同的关系;数独17查库增容程序自带有14个题目的17个数字数独库和若干个演示题目,演示查库增容过程,其包括与库中无关或者同母,将其加入库中,若与库中题目同族,则不加到库中,对于同族和同母两种情况,还给出库中的题目及两个9位整数,将其衍生到给出数独的同母数字魔方;数独的衍生程序,介绍数字变换和有代表性的9种通用衍生,此程序既可以用来验证前两个程序的结论,也可以单独使用。

非常感谢中国数独专家、中国数独联盟和北京数独协会顾问、数独联盟培训师指导教师、中国科学院数学与系统科学研究院研究员常维宝先生能够为本书作序。

由于本人的水平有限,加之匆忙脱稿,书中难免有错漏之处,欢迎广大读者朋友批评指正。

严德人

目录

第一部分 数字魔方个数计算	001
第一章 什么是数字魔方	001
第二章 数字魔方的衍生特性	003
第一节 数字魔方的通用衍生	003
第二节 数字魔方中的相似元素	009
第三节 数字魔方的特殊衍生	018
第三章 数字魔方与展开向量	022
第一节 展开向量	022
第二节 向量组和向量族	026
第三节 共轭向量和共轭组	032
第四章 一般数字魔方的生成方法	047
第五章 不同数字魔方个数计算	061
第一节 数字魔方的两个等值定律	063
第二节 超大共轭组族个数及分布	072
第三节 数字魔方生成程序和不同数字魔方总数	073
第六章 程序设计	077
第一节 展开向量和共轭组按序生成	077
第二节 超大共轭组族按序生成	078
第三节 数字魔方个数 G_4 的计算	079
第四节 全部不同数字魔方个数	080
第五节 计算数字魔方个数软件	080
第二部分 17个数字数独的建库查库问题	081
第七章 数字魔方衍生的数字表示和数字魔方分族	081

第一节	数字魔方衍生的数字表示	081
第二节	数字魔方分族和魔方族库的生成	087
第三节	异构魔方族库	093
第四节	数字魔方同族性检测	095
第八章	数独的衍生	098
第一节	数独的衍生及与数字魔方衍生的关系	098
第二节	同族数独和同母数独	099
第九章	数独17衍生族库	102
第一节	为17个数字数独建库	102
第二节	数独17查库增容方法	104
第三节	任意两个数独相关性检查	105
第四节	相关软件	106
编 后		107
附录1	720个展开向量与展开向量整数对照表	109
附录2	61个超大共轭组族中的共轭组个数	114
附录3	第一个超大共轭组族中的共轭组	117
附录4	各超大共轭组族生成的不同数字魔方个数	123
参考文献		128

第一部分

数字魔方个数计算

第一章 什么是数字魔方

数独游戏,大家都耳熟能详,通常大家玩的就是九字标准数独游戏,它的答案称为“九字标准数字魔方”,简称“数字魔方”,如图1-1和图1-2所示。数字魔方有81个格子,我们来给它的各部分一个名称,它的81个“格子”(grid)包含9个用粗线分隔的 3×3 的区域,称为“九宫”或“小方”(mini-square),它纵向一列9个格子称为“列”(column)、横向一行9个格子称为“行”(row)。行从上到下依次编号为A~I行或者1~9行、列从左到右依次编号为1~9列,数字魔方中的9个九宫先从左到右再从上到下依次编号为第1九宫到第9九宫。它的每行、每列和每个九宫内1~9的九个数字不重复,自然也不能有1个数字缺席。数字魔方内格子用它所在的行号(大写)字母和列号数字联合表示。例如,第4行的格子从左到右依次称为D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,D9。

把数字魔方中第1九宫的9个数字按照先左到右、再从上到下的次序“排列”,称它为该数字魔方的“位型”(pattern),用符号 P_1 来表示。图1-1所示的数字魔方的“位型”为: $P_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$,图1-2的数字魔方的位型是 $P_1 = (7, 3, 5, 6, 2, 1, 9, 8, 4)$ 。根据位型的定义,位型中的数字都在 $[1, 9]$ 中,1~9的9个数字没有一个重复。根据排列组合知识可知,数字魔方的“位型”共有 $9! = 362880$ 种。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	4	5	6	7	8	9	1	2	3
C	7	8	9	1	2	3	4	5	6
D	2	3	1	5	6	4	8	9	7
E	5	6	4	8	9	7	2	3	1
F	8	9	7	2	3	1	5	6	4
G	3	1	2	6	4	5	9	7	8
H	6	4	5	9	7	8	3	1	2
I	9	7	8	3	1	2	6	4	5

图 1-1 一个很规则的数字魔方

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	3	5	1	9	4	2	6	8
B	6	2	1	8	5	3	7	4	9
C	9	8	4	7	6	2	5	3	1
D	1	9	7	5	4	6	3	8	2
E	3	5	6	2	8	9	1	7	4
F	8	4	2	3	1	7	9	5	6
G	2	6	3	9	7	8	4	1	5
H	5	7	8	4	2	1	6	9	3
I	4	1	9	6	3	5	8	2	7

图 1-2 一个一般的数字魔方

把每个九宫内部的行和列分别称为“小行”和“小列”。

把纵向相邻的三个九宫放在一起称为“纵向九宫族”。其中，第1,4,7三个九宫是第1纵向九宫族，第2,5,8三个九宫是第2纵向九宫族，第3,6,9三个九宫是第3纵向九宫族。

把纵向九宫族内的三个列放在一起称为“同族列”。其中，第1,2,3列是第1同族列，第4,5,6列是第2同族列，第7,8,9列是第3同族列。

把“同族列”内的9个小行称为“同族小行”。

把横向相邻的三个九宫放在一起称为“横向九宫族”。其中，第1,2,3三个九宫是第1横向九宫族，第4,5,6三个九宫是第2横向九宫族，第7,8,9三个九宫是第3横向九宫族。

把横向九宫族内的三个行放在一起称为“同族行”。第1,2,3行是第1同族行，第4,5,6行是第2同族行，第7,8,9行是第3同族行。

把“同族行”内的9个小列称为“同族小列”。

第二章 数字魔方的衍生特性

所谓数字魔方的衍生,是指将一个数字魔方中的数字做一种变换,或者若干数字互相交换位置,或者几个数字循环交换位置,所得到的仍然是一个数字魔方,根据数字魔方的定义,即它的每行、每列和每个九宫内的9个数字仍然不重复(自然也没有1个数字缺席)。所以讨论数字魔方的衍生,就要保证在完成演变之后没有改变这个基本性质,这是进行数字魔方衍生时必须遵循的唯一原则。

在讲述具体的衍生方法之前,需要先确认如下的一些事实:数字魔方某一行的数字在该行的内部任意交换位置不会改变该行的数字组成;数字魔方某一列的数字在该列的内部任意交换位置不会改变该列的数字组成;数字魔方某一九宫的数字在该九宫内部任意交换位置不会改变该九宫的数字组成。如果对数字魔方做出了某种演变,这种演变肯定涉及一些行、列和九宫中的数字的改变,但是如果这些改变都能归结为只是有关行、列、九宫的内部数字的位置交换,并不改变任何行、列、九宫中的数字组成,那么对数字魔方进行这种演变后,所得到的就仍然是一个数字魔方!

任何数字魔方都具有衍生特性。数字魔方的衍生可以分为对任何数字魔方都能够进行的通用衍生和只对特定数字魔方进行的特殊衍生两种。

第一节 数字魔方的通用衍生

所谓数字魔方的通用衍生,就是对任何一个数字魔方用这些方法改变数字魔方里的数字位置所得到的仍然是一个数字魔方。下面所说的11种通用的衍生法,都属于数字魔方的通用衍生。

(1)改变位型。将数字魔方的“位型”的1~9的数字重新排列,相当于1~9的数字到另一组1~9的数字进行一一对应的变换,然后对数字魔方中其他的数字也作同样的变换,所得到的仍然是一个数字魔方。这种变换称为“改变位型”,如

图 2-1 和图 2-2 所示。此位型变换函数是 1,2,3,4,5,6,7,8,9 → 9,8,7,6,5,4,3,2,1,其被称为“十补位型”——意指对应位置上两个数字的和都是 10。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图 2-1 原数字魔方

4	5	2	3	1	9	8	6	7
6	3	8	7	5	2	1	4	9
9	7	1	8	4	6	5	2	3
5	8	3	9	6	7	2	1	4
7	6	4	1	2	8	9	3	5
2	1	9	4	3	5	6	7	8
8	4	6	2	9	3	7	5	1
1	9	5	6	7	4	3	8	2
3	2	7	5	8	1	4	9	6

图 2-2 改变位型后的数字魔方

(2)旋转。将一个数字魔方沿中心点 E5 按照逆时针方向或者顺时针方向旋转 90°、180°或 270°之后,所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“旋转”。逆时针旋转 90°例子如图 2-3 和图 2-4 所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图 2-3 原数字魔方

3	1	7	6	5	2	9	8	4
4	6	8	9	7	3	5	2	1
2	9	5	8	1	4	3	7	6
1	8	4	3	2	5	7	6	9
9	5	6	4	8	7	1	3	2
7	3	2	1	9	6	8	4	5
8	2	9	7	6	1	4	5	3
5	7	3	2	4	9	6	1	8
6	4	1	5	3	8	2	9	7

图 2-4 逆时针旋转 90° 后的数字魔方

(3)同族行交换。在一个数字魔方中,任何“同族行”中的任意两行互相交换、或者三行循环交换所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“同族行交换”,如图2-5和图2-6所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-5 原数字魔方

1	3	9	2	6	4	5	8	7
4	7	2	3	5	8	9	6	1
6	5	8	7	9	1	2	4	3
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-6 1,3行交换后的数字魔方

(4)同族列交换。在一个数字魔方中,任何“同族列”中的任意两列互相交换或者三列循环交换所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“同族列交换”,如图2-7和图2-8所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-7 原数字魔方

6	5	8	1	7	9	2	4	3
4	7	2	8	3	5	9	6	1
1	3	9	4	2	6	5	8	7
5	2	7	3	1	4	8	9	6
3	4	6	2	9	8	1	7	5
8	9	1	5	6	7	4	3	2
2	6	4	7	8	1	3	5	9
9	1	5	6	4	3	7	2	8
7	8	3	9	5	2	6	1	4

图2-8 4,5,6列循环交换后的数字魔方

(5)纵向九宫族交换。在一个数字魔方中,任何一个“纵向九宫族”与另一个“纵向九宫族”整体(左右)互换或者三个“纵向九宫族”整体循环交换所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“纵向九宫族交换”,如图2-9和图2-10所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-9 原数字魔方

2	4	3	7	9	1	6	5	8
9	6	1	3	5	8	4	7	2
5	8	7	2	6	4	1	3	9
8	9	6	1	4	3	5	2	7
1	7	5	9	8	2	3	4	6
4	3	2	6	7	5	8	9	1
3	5	9	8	1	7	2	6	4
7	2	8	4	3	6	9	1	5
6	1	4	5	2	9	7	8	3

图2-10 纵向九宫族(1与3)交换后的数字魔方

(6)横向九宫族交换。在一个数字魔方中,任何一个“横向九宫族”与另一个“横向九宫族”整体(上下)互换或者三个“横向九宫族”整体循环交换所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“横向九宫族交换”,如图2-11和图2-12所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-11 原数字魔方

2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4
6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2

图2-12 横向九宫族循环交换后的数字魔方

(7)中心对称交换。数字魔方中,以中心点E5为对称点,将中心对称的格子中的数字都交换之后,所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“中心对称交换”。中心对称交换的例子如图2-13和图2-14所示,它与旋转 180° 是等价的。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-13 原数字魔方

4	1	6	9	2	5	3	8	7
8	2	7	6	3	4	5	1	9
9	5	3	7	1	8	4	6	2
2	3	4	5	7	6	1	9	8
5	7	1	2	8	9	6	4	3
6	9	8	3	4	1	7	2	5
7	8	5	4	6	2	9	3	1
1	6	9	8	5	3	2	7	4
3	4	2	1	9	7	8	5	6

图2-14 中心对称交换后的数字魔方

(8)水平轴对称交换。数字魔方中,以水平中心线为对称轴,将与此轴对称的格子中的数字都交换之后,所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“水平轴对称交换”。水平轴对称交换的例子如图2-15和图2-16所示,它可以用上下两个横向九宫族交换加三对(1,3),(4,6),(7,9)同族行交换来等价实现。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-15 原数字魔方

7	8	3	5	2	9	6	1	4
9	1	5	4	3	6	7	2	8
2	6	4	8	1	7	3	5	9
8	9	1	6	7	5	4	3	2
3	4	6	9	8	2	1	7	5
5	2	7	1	4	3	8	9	6
1	3	9	2	6	4	5	8	7
4	7	2	3	5	8	9	6	1
6	5	8	7	9	1	2	4	3

图2-16 水平轴对称交换后的数字魔方

(9)垂直轴对称交换。数字魔方中,以垂直中心线为对称轴,将与此轴对称的格子里的数字进行交换之后,所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“垂直轴对称交换”。垂直轴对称交换的例子如图2-17和图2-18所示,它可以用左右两个纵向九宫族交换加三对(1,3),(4,6),(7,9)同族列交换来等价实现。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-17 原数字魔方

3	4	2	1	9	7	8	5	6
1	6	9	8	5	3	2	7	4
7	8	5	4	6	2	9	3	1
6	9	8	3	4	1	7	2	5
5	7	1	2	8	9	6	4	3
2	3	4	5	7	6	1	9	8
9	5	3	7	1	8	4	6	2
8	2	7	6	3	4	5	1	9
4	1	6	9	2	5	3	8	7

图2-18 垂直轴对称交换后的数字魔方

(10)第一对角线轴对称交换。数字魔方中,以右下对角线为对称轴,将与此轴对称的格子里的数字进行交换之后,所得到的仍然是一个数字魔方,其被称为“第一对角线轴对称交换”。第一对角线轴对称轴交换的例子如图2-19和图2-20所示。

6	5	8	7	9	1	2	4	3
4	7	2	3	5	8	9	6	1
1	3	9	2	6	4	5	8	7
5	2	7	1	4	3	8	9	6
3	4	6	9	8	2	1	7	5
8	9	1	6	7	5	4	3	2
2	6	4	8	1	7	3	5	9
9	1	5	4	3	6	7	2	8
7	8	3	5	2	9	6	1	4

图2-19 原数字魔方

6	4	1	5	3	8	2	9	7
5	7	3	2	4	9	6	1	8
8	2	9	7	6	1	4	5	3
7	3	2	1	9	6	8	4	5
9	5	6	4	8	7	1	3	2
1	8	4	3	2	5	7	6	9
2	9	5	8	1	4	3	7	6
4	6	8	9	7	3	5	2	1
3	1	7	6	5	2	9	8	4

图2-20 第一对角线轴对称交换后的数字魔方