◎ 主编　李大治　丁　勇

医用高等数学习题与解答

YIYONG GAODENG SHUXUE XITI YU JIEDA

东南大学出版社

医用高等数学
习题与解答

主　编　李大治　丁　勇

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书和东南大学出版社出版的《医用高等数学》一书所配套的习题及解答。对其中的每一道题，我们仅给出了一种解题方法。希望读者能多动脑筋，一题多解。

本书可作为医学院校本科各专业、研究生和进修生课后复习及考前的辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学习题与解答/李大治，丁勇主编．—南京：东南大学出版社，2001.8

ISBN 7-81050-805-9

Ⅰ.医... Ⅱ.①李...②丁... Ⅲ.医用数学：高等数学-医学院校-解题 Ⅳ.R311-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 054446 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人 宋增民

江苏省新华书店经销 江苏省地质测绘院印刷厂印刷

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:5.25 字数:136 千字

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数:1～8000 册 总定价:24.00 元(全套两册)

前　　言

本书是由南京医科大学、东南大学医学院和南通医学院的数学同仁联合撰写的。

本书的内容包括一元函数和多元函数的微积分学、微分方程、概率论、数理统计、线性代数初步和模糊数学等章节的习题及详细解答。本书可作为医学院校本科各专业、研究生和进修生课后复习及考前的辅导用书。

参加本书撰写工作的，除主编、副主编外，还有陈净词、郑宇、张晖等老师。在本书的撰写过程中，得到很多有关方面同志的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中的缺点甚至错误在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者

2001 年 3 月

目　　录

函数、极限与连续 （习题一）

1. 下列各题中的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y = x, y = \sqrt{x^2}$

【分析】 由于函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素,所以只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时,才能说它们是相同的(或相等的).

解 因为 $y = \sqrt{x^2} = |x|$,与 $y = x$ 的对应规律不相同,所以 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 不相同.

(2) $y = \lg x^2, y = 2\lg x$

【分析】 分析同第(1)小题.

解 因为 $y = \lg x^2$ 的定义域为 $x \neq 0$ 的一切实数,而 $y = 2\lg x$ 的定义域为 $x > 0$ 的实数,所以 $y = \lg x^2$ 与 $y = 2\lg x$ 不相同.

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}, x^2 + y^2 = 1$.

【分析】 分析同第(1)小题.

解 因为 $x^2 + y^2 = 1$ 可以写成 $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$,所以 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 是不相同的.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$

解 由 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ 得函数 y 的定义域为

$$D = \{x \mid -1 \leqslant x < 0, 且\ 0 < x \leqslant 1\}$$

(2) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$

解 由于 $|x|-x\neq 0$,所以 $x<0$,于是 y 的定义域为

$$D=\{x\mid x<0\}$$

(3) $y=\dfrac{1}{\lg x}$

解 由$\begin{cases}x>0\\ \lg x\neq 0\end{cases}$得 y 的定义域为

$$D=\{x\mid 0<x<1,\text{且 }1<x<+\infty\}$$

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解 由于 $x+\sqrt{x^2+1}>0$,得 y 的定义域为

$$D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$$

(5) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

解 由$\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$得 y 的定义域为

$$D=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,\text{且 }-4\leqslant x\leqslant-\pi\}$$

(6) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5-x}$

解 由$\left|\dfrac{x-2}{5-x}\right|\leqslant 1$,得

$$D=\left\{x\mid -\infty<x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$$

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问 $f(x^2)$,$f(\sin x)$,$f(x+a)(a>0)$ 的定义域各是什么?

解 对于 $f(x^2)$,由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,所以 x^2 必须满足 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,于是 x 只能在 $[-1,1]$ 中取值,$f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

同理,对于 $f(\sin x)$,由于 $\sin x$ 必须满足 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

对于 $f(x+a)$,由于 $0\leqslant x+a\leqslant 1$,即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,所以其定义域为 $[-a,1-a]$.

4. 设 $f(x)=\ln x$,证明:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

证明　由 $f(x)=\ln x$ 得 $f(x+h)=\ln(x+h)$

于是
$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\ln(x+h)-\ln x\\&=\ln\frac{x+h}{x}=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\end{aligned}$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x>0\end{cases}$$

求:$f(-2)$,$f(0)$,$f(2)$,并作函数的图形.

解　由于 $x=-2<0$,

所以 $f(-2)=-1$.

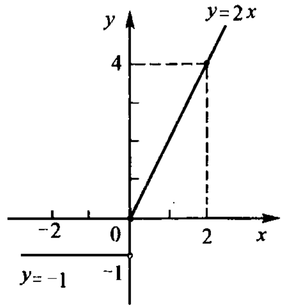
由于当 $x=0$ 时,$f(x)=0$,

所以 $f(0)=0$.

由于 $x=2>0$,

所以 $f(2)=2\times 2=4$.

函数图形见图习题 1 - 1.



图习题 1 - 1

6. 设婴儿出生时的体重平均为 3 000 g,从出生起至 6 个月,每月长 600 g,6 个月后至 12 个月,每月长 500 g,试写出婴儿从出生至 1 岁其体重与月龄的关系式,若一婴儿刚满 10 个月,试估计

其体重.

解　在出生起至6个月期间,体重 W 与月龄 m 的关系式是

$$W = 3\,000 + 600m$$

在出生6个月至12个月期间,体重 W 与月龄 m 的关系式是

$$W = 3\,000 + 600 \times 6 + 500 \times (m - 6) = 3\,600 + 500m$$

所以,婴儿从出生至1岁其体重 W 与月龄 m 的关系式是

$$W = \begin{cases} 3\,000 + 600m & 0 \leqslant m \leqslant 6 \\ 3\,600 + 500m & 6 < m \leqslant 12 \end{cases}$$

刚满10个月时的体重为 $W(10) = 3\,600 + 500 \times 10 = 8\,600(\mathrm{g})$

7. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数:

(1) $y = u^2, u = \sin x$

解　$y = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

(2) $y = \sin u, u = x^2$

解　$y = \sin x^2$

(3) $y = \mathrm{e}^u, u = x^2$

解　$y = \mathrm{e}^{x^2}$

(4) $y = u^2, u = \mathrm{e}^x$

解　$y = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$

8. 将下列复合函数分解成基本初等函数,或基本初等函数的和、差、积、商:

(1) $y = \sin 2x$

解　$y = \sin u, u = 2x$

(2) $y = \cos^2 x$

解　$y = u^2, u = \cos x$

(3) $y = \sin^3 \dfrac{x}{2}$

解　$y = u^3, u = \sin v, v = \dfrac{x}{2}$

(4) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$

解　$y=u^{2/3}, u=1+x$

(5) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$

解　$y=\ln u, u=\tan v, v=\frac{x}{2}$

(6) $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$

解　$y=\mathrm{e}^u, u=\tan v, v=\frac{1}{x}$

(7) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$

解　$y=\arcsin u, u=\frac{1-x}{1+x}$

(8) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

解　因为 $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,所以

$$y=\frac{1}{2}\ln u, u=\frac{1-x}{1+x}$$

或

$$y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=\frac{1-x}{1+x}$$

(9) $y=\sqrt{\ln\frac{1-x}{1+x}}$

解　$y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\frac{1-x}{1+x}$

(10) $y=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

解　$y=\frac{u}{1-u}, u=\mathrm{e}^v, v=-x$

或将函数变形为:

$$y=\frac{1}{e^x-1}$$

然后根据 $y=\frac{1}{e^x-1}$ 分解成 $y=\frac{1}{u-1}, u=e^x$

9. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解　利用极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解　因为分母的极限为零,所以不能直接用极限的四则运算法则。但分子分母有公因式$(x-1)$,故分式可以约去$(x-1)$,于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解　由教科书上 P12 例 1.2.12,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解　$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\infty$$

上式最后一个等号是因为分式的分母趋于零,而分子趋于常数,所以极限为无穷大.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

【分析】 第(5)小题可利用教科书上 P12 例 1.2.12 的结论.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+1}{x^3-100x}$

【分析】 第(6)小题可利用教科书上 P12 例 1.2.12 的结论.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+1}{x^3-100x}=0$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

【分析】 因为 $x\to1$ 时,$\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\dfrac{3}{1-x^3}$ 的极限都不存在,应该先变形,再取极限.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)&=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}\\&=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1\end{aligned}$$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

解
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\times 2=2$$

10. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}(a\neq 0)$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot a$

$$=a\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=a$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 3x}$$

$$=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}\right)$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot x)$

解 $$\lim_{x\to 0}(x\cot x)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$$

(6) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}$

解 $$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{\sin(\arcsin t)}$$

若记 $x=\arcsin t$,则当 $t\to 0$ 时,$x\to 0$,故有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0$$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

11．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

解 $$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}\times(-1)}$$

$$=\{\lim_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\}^{-1}=e^{-1}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

解 $$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}$$

$$=[\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$

解 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$($k$ 为正整数)

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$($k$ 为正整数)
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{(-k)} = e^{-k}$$

12. 考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$,当 $x\to 0$ 时的极限.

解 因为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{-x}, & x<0\\[2ex] \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$$

所以 $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

左右极限虽然存在,但不相等.于是当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 的极限不存在.

13. 求符号函数
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$
在 $x\to 0$ 时的左、右极限,并说明当 $x\to 0$ 时 $\operatorname{sgn}(x)$ 的极限是否存在.

解 $$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

于是当 $x\to 0$ 时，$\operatorname{sgn}(x)$ 的极限不存在.

14. 已知 n 次静脉注射某药后，血药浓度的最高水平和最低水平分别为：

$$C_{\max}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\text{ 和 }C_{\min}=\frac{ar(1-r^n)}{1-r},$$

其中 $r=\mathrm{e}^{-kT}$，a,k 和 T 均为正的常数. 试求 $n\to+\infty$ 时，$C_{\max}$ 和 $C_{\min}$ 的极限；若临床要求血药浓度达到稳定状态(即达到极限浓度)时，最高血药浓度为 α，最低血药浓度为 β，问 a 和 T 应取什么值？

解 因为
$$\lim_{n\to+\infty}r^n=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-knT}=0$$

所以
$$\lim_{n\to+\infty}C_{\max}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

$$\lim_{n\to+\infty}C_{\min}=\lim_{n\to+\infty}\frac{ar(1-r^n)}{1-r}=\frac{ar}{1-r}$$

若
$$\lim_{n\to+\infty}C_{\max}=\alpha,\ \lim_{n\to+\infty}C_{\min}=\beta$$

则
$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\alpha\\[2ex]\dfrac{ar}{1-r}=\beta\end{cases}$$

于是
$$\begin{cases}a=\alpha-\beta\\[1ex] r=\dfrac{\beta}{\alpha}\end{cases}$$

所以 a 取 $\alpha-\beta$，T 取 $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.

15. 若要下列函数是无穷小，x 应各趋向于什么值？若要下列函数是无穷大，x 又应各趋向于什么值？

(1) $\dfrac{x-1}{x^3-1}$

解 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{x-1}{x^3-1}\to 0$，所以 $\dfrac{x-1}{x^3-1}$ 是当 $x\to\infty$ 时