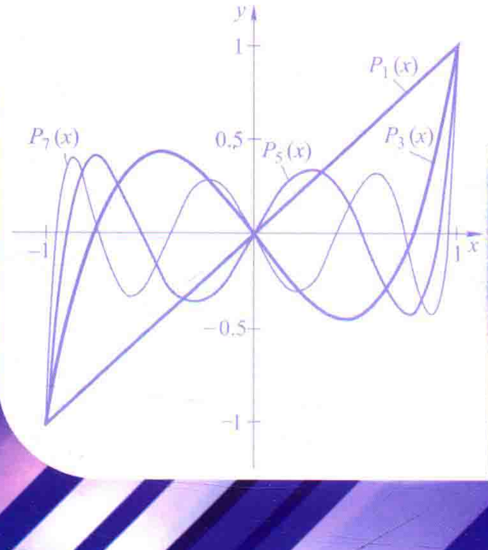
高等学校工科硕士研究生教材

数学物理方程

许兰喜 编

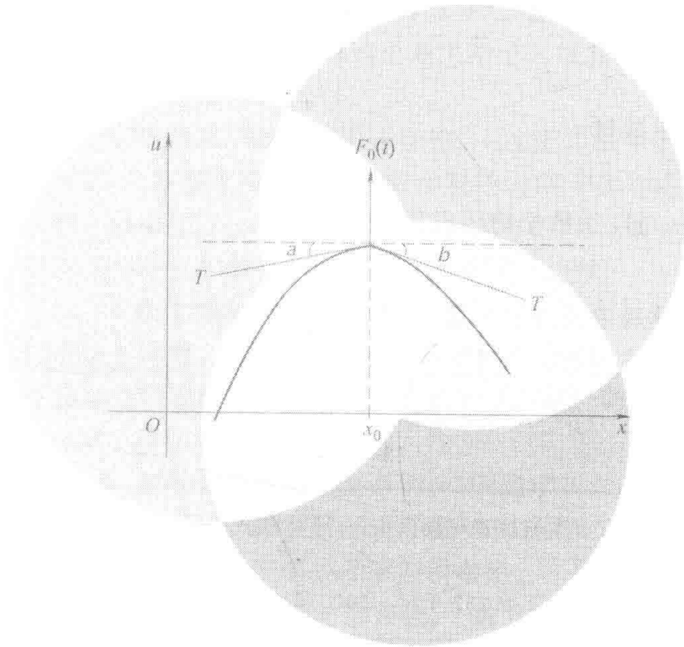


化学工业出版社

高等学校工科硕士研究生教材

数学物理方程

许兰喜　编



化学工业出版社
·北京·

本书是根据工科硕士生的专业需求和数学基础而编写的数学物理方程教材。内容包括偏微分方程的基本概念，数学物理方程相关的背景，数学模型的建立与定解问题，定解问题的典型求解方法（求通解方法、行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法以及数值求解法）。另外还介绍了勒让德多项式和贝塞尔函数在求解定解问题时的应用。

本书模型导出过程详细，与本科基础课程联系紧密，突出应用。本书可作为工科各专业本科生、研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程/许兰喜编. —北京：化学工业出版社，2016.8

高等学校工科硕士研究生教材

ISBN 978-7-122-27508-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①许… Ⅲ.①数学物理方程-研究生-教材 Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 149795 号

责任编辑：郝英华 唐旭华

责任校对：宋 玮　　　　装帧设计：韩 飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印　　装：三河市延风印装有限公司

710mm×1000mm 1/16 印张 13¾ 字数 262 千字 2016 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：45.00 元

前言
FOREWORD

数学物理方程课程涉及的专业有：材料科学与工程、化学工程与技术、动力工程及工程热物理、机械工程等近十个专业。目前数学物理方程的教材有很多，且各有特色。但是，随着专业学位招生规模的不断扩大，迫切需要一本适合工科专业学位研究生的“数学物理方程”教材或参考书，以适应新的教学需求。

工科数学物理方程的教学最直接的目标是使学生能够应用数学知识解决工程中的实际问题，并由此提升他们学习数学的兴趣。鉴于此，我们应该在实际教学中，结合学生所学专业，多举一些有实际背景的例子。为此，本书在以下五个方面做了一些尝试，希望能以此提升学生的学习兴趣，提高学习效率，增强解决问题的能力。另外，本书的推导过程紧扣高等数学的内容，这样学生更易理解。

本书特点如下。

（1）适当减少数学的推导证明。过多的数学推导会导致学生对该课程有恐惧感。大部分工科硕士生的数学基础局限于高等数学，对于大篇幅的推导很不习惯，很排斥。过多的数学推导会使学生降低甚至丧失学习兴趣，因此，本书针对工科学生的数学基础删除了不必要的证明。

（2）数学模型的导出更详细。大部分的学生感兴趣的是怎样把具体问题转化成数学问题。如果对导出过程讲解不详细，学生在应用中遇到实际问题时，不会建立数学模型，这样很难提出科学问题，因此，本书在应用隔离物体法导出模型时，导出过程非常详细。

（3）例题的求解过程更详细。例题求解过程不详细会直接导致多数同学觉得解题无从下手，没有思路，不知如何计算，一算就错。本书中所有例题的求解过程非常详细，便于同学解题时参照。

（4）内容排版重点醒目突出。数学物理方程的内容多，同学课后看书抓不住重点，或找不到关键知识点，因此有必要在内容的排版时突出主要知识点，做到一目了然。本书把关键知识点，主要定理和主要公式都用边框加阴影加以标注。

（5）增加应用举例。根据选课学生的专业增加了一些应用举例，主要涉及材料工程、化学工程及信息与系统等方面的应用。

另外，本书在每一章开头列出了本章的基本要求，例题分析，并且求解运算

过程也非常详细。每节后配有适量的习题，书后附参考答案和提示，便于读者参照对比。贝塞尔函数比较抽象，为了便于读者了解贝塞尔函数的基本性质，本书给出了一些贝塞尔函数的图形。卷积在工程方面应用很广，因此，本书对于卷积的介绍比较多，并尽量用卷积表示定解问题的解。另外，为了同学在学习中查找方便，本书在附录中不仅附有傅里叶变换表和拉普拉斯变换表，而且还附有常用的数学公式（附录Ⅰ）、常微分方程中常用的重要结论（附录Ⅱ）以及傅里叶级数的主要结论（附录Ⅲ）。

特别感谢北京化工大学研究生院对本书的支持，正是在研究生院教改项目的资助下本书才得以完成和出版。黄晋阳教授在内容组织上提出了许多建议，在此向他表示感谢。同时感谢我的研究生董利君同学，是他绘制了本书的所有插图，并录入了部分稿件内容。

编　者

2016 年 6 月

目录
CONTENTS

第 1 章 数学物理方程及其定解问题 1

1.1 波动方程及其定解问题 …… 2
1.1.1 波动方程的导出 …… 2
1.1.2 典型定解条件 …… 5
1.1.3 典型定解问题 …… 10
习题 1.1 …… 11
1.2 热传导方程及其定解问题 …… 12
1.2.1 热传导方程的导出 …… 12
1.2.2 典型定解条件 …… 14
1.2.3 典型定解问题 …… 16
1.2.4 最值原理 …… 17
习题 1.2 …… 19
1.3 位势方程及其定解问题 …… 20
1.3.1 位势方程的导出 …… 20
1.3.2 位势方程的典型定解问题 …… 21
1.3.3 最值原理 …… 22
习题 1.3 …… 23
1.4 定解问题的适定性及数学物理方程的分类 …… 23
1.4.1 定解问题的适定性概念 …… 23
1.4.2 二阶偏微分方程的分类 …… 24
习题 1.4 …… 25

第 2 章 线性偏微分方程的通解 26

2.1 线性偏微分方程解的结构定理 …… 26
习题 2.1 …… 27
2.2 常系数线性齐次偏微分方程的通解 …… 27
习题 2.2 …… 29

2.3 常系数线性非齐次偏微分方程的通解 …… 29
习题 2.3 …… 32

第 3 章 行波法 33

3.1 一维波动问题与达朗贝尔公式 …… 33
3.1.1 无界弦的自由振动 …… 33
3.1.2 齐次化原理 …… 34
3.1.3 无界弦的受迫振动 …… 35
3.1.4 达朗贝尔公式的物理意义 …… 38
3.1.5 依赖区间、决定区域、影响区域 …… 38
习题 3.1 …… 40
3.2 空间波动问题 …… 41
3.2.1 函数的球面对称性 …… 41
3.2.2 齐次波动问题的泊松公式 …… 41
3.2.3 非齐次波动问题的 Kirchhoff 公式 …… 47
3.2.4 波动问题解的物理意义 …… 49
习题 3.2 …… 51

第 4 章 分离变量法 52

4.1 Sturm-Liouville 本征值问题 …… 52
4.1.1 第一边值条件的本征值问题 …… 52
4.1.2 混合边值条件的本征值问题 …… 53
4.1.3 各类本征值问题小结及级数展开 …… 54
习题 4.1 …… 55
4.2 波动方程的定解问题 …… 56
4.2.1 齐次方程的齐次边值问题 …… 56
4.2.2 级数形式解的物理意义 …… 59
4.2.3 非齐次方程的齐次边值问题 …… 61
4.2.4 非齐次方程的第一非齐次边值问题 …… 66
习题 4.2 …… 67
4.3 热传导方程的定解问题 …… 68
4.3.1 齐次方程的第二齐次边值问题 …… 68
4.3.2 非齐次方程的第二齐次边值问题 …… 69
4.3.3 非齐次边值问题 …… 71

4.3.4 混合边值问题举例 …… 73
习题 4.3 …… 76
4.4 拉普拉斯方程的定解问题 …… 77
4.4.1 圆域内的第一边值问题 …… 77
4.4.2 矩形域内的第一边值问题 …… 79
习题 4.4 …… 82

第 5 章 勒让德多项式及其应用 83

5.1 勒让德多项式 …… 83
5.1.1 勒让德方程及其本征值问题 …… 83
5.1.2 勒让德多项式 …… 83
5.1.3 勒让德多项式的母函数与引力势 …… 86
5.1.4 勒让德多项式的性质与勒让德级数 …… 88
习题 5.1 …… 92
5.2 勒让德多项式的应用 …… 93
习题 5.2 …… 98

第 6 章 贝塞尔函数 100

6.1 推广的 Γ-函数 …… 100
6.2 贝塞尔方程的导出 …… 101
6.3 贝塞尔方程的通解与贝塞尔函数 …… 103
6.4 贝塞尔级数展开 …… 106
6.4.1 贝塞尔函数的恒等式 …… 106
6.4.2 贝塞尔函数的正交性 …… 107
6.4.3 贝塞尔级数展开 …… 109
6.5 贝塞尔函数的应用 …… 110
习题 6.5 …… 115

第 7 章 积分变换法 116

7.1 傅里叶积分变换 …… 116
7.1.1 傅里叶积分公式与傅里叶变换 …… 116
7.1.2 傅里叶变换的基本性质 …… 120
7.1.3 卷积 …… 121

7.1.4 多重傅里叶变换 ······ 124
习题 7.1 ······ 125
7.2 拉普拉斯变换 ······ 125
7.2.1 拉普拉斯变换的定义 ······ 126
7.2.2 存在定理及性质 ······ 127
7.2.3 反演公式 ······ 130
习题 7.2 ······ 133
7.3 傅里叶变换和拉普拉斯变换的应用 ······ 134
7.3.1 一般定解问题 ······ 134
7.3.2 拉普拉斯变换在化学反应工程中的应用 ······ 141
7.3.3 拉普拉斯变换在材料科学中的应用 ······ 145
习题 7.3 ······ 147

第 8 章 格林函数法 149

8.1 δ-函数 ······ 149
8.1.1 δ-函数 ······ 149
8.1.2 δ-函数的物理意义 ······ 150
8.1.3 广义函数与 δ-函数的数学性质 ······ 151
8.1.4 高维 δ-函数 ······ 154
8.1.5 δ-函数的傅里叶变换和拉普拉斯变换 ······ 154
8.1.6 δ-函数及其傅里叶变换和卷积运算在通信工程中的应用 ······ 156
习题 8.1 ······ 158
8.2 格林公式及其应用 ······ 158
8.2.1 格林公式 ······ 159
8.2.2 应用举例 ······ 159
习题 8.2 ······ 160
8.3 位势问题的格林函数 ······ 161
8.3.1 格林函数的概念 ······ 161
8.3.2 位势方程的第一边值问题 ······ 163
8.3.3 用电像法求格林函数 ······ 164
习题 8.3 ······ 167
8.4 含时间问题的格林函数 ······ 168
8.4.1 波动方程的初值问题 ······ 168
8.4.2 热传导方程的初值问题 ······ 172

习题 8. 4 …………………………………………………… 174

第 9 章 数值求解法 175

9.1 波动方程的差分解法 ………………………………… 176
9.2 热传导方程的差分解法 ……………………………… 177
9.3 位势方程的差分解法 ………………………………… 178
9.3.1 同步迭代法 ……………………………………… 180
9.3.2 异步迭代法 ……………………………………… 181
习题 9. 3 …………………………………………………… 182

附录Ⅰ 常用公式……………………………………………… 184
附录Ⅱ 线性常微分方程的通解 …………………………… 189
附录Ⅲ 傅里叶级数 ………………………………………… 191
附录Ⅳ 傅里叶变换表 ……………………………………… 191
附录Ⅴ 拉普拉斯变换表 …………………………………… 192
部分习题参考答案…………………………………………… 195
参考文献 ……………………………………………………… 208

第1章

数学物理方程及其定解问题

本章要求

(1) 掌握一维波动方程和热传导方程的推导方法；熟悉波动方程、热传导方程和位势方程所描述的物理背景；

(2) 理解三类边界条件、衔接条件及自然边界条件的物理意义，能够根据物理描述，熟练写出对应的定解问题；

(3) 了解定解问题的适定性概念和方程的分类，了解特征方程及特征线定义。

数学物理方程的研究对象源于各种物理问题和工程问题。本书的第1章将从实际的物理现象出发，导出问题满足的偏微分方程和定解条件，给出典型的定解问题。首先我们介绍与偏微分方程相关的基本概念。

① 偏微分方程：联系未知函数、自变量以及未知函数对自变量导数的关系式称为微分方程。微分方程包括：常微分方程和偏微分方程，所谓偏微分方程是指自变量个数多于一个的微分方程，即方程含有偏导数，自变量个数为一个的微分方程称为常微分方程。

偏微分方程举例：

热传导方程：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$

梁的横振动方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^4\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t)$

② 偏微分方程的阶：偏微分方程中最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶。

③ 线性（非线性）偏微分方程：关于未知函数和未知函数的导数均为线性的偏微分方程称为线性偏微分方程。不是线性的偏微分方程称为非线性偏微分方程。

例如，(1) 中列出的方程为线性偏微分方程，以下方程为非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t),\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

在线性偏微分方程中，不含未知函数及其偏导数的非零项称为非齐次项，不

含非齐次项的线性偏微分方程称为齐次偏微分方程，否则称为非齐次偏微分方程。

例如：

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 为齐次偏微分方程；

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),[f(x,t)\neq 0]$为非齐次偏微分方程。

④ 拟（半）线性偏微分方程及完全非线性偏微分方程：只关于最高阶导数是线性的非线性偏微分方程称为拟线性偏微分方程，它们的系数只依赖于未知函数的非最高阶导数；若非线性偏微分方程中出现最高阶导数的项是线性的，它的非线性项只出现非最高阶导数，这样的方程称为半线性的微分方程；完全非线性偏微分方程是指关于最高阶导数也是非线性的偏微分微分方程。

⑤ 偏微分方程的古典解：一个偏微分方程的古典解（在某区域内）是指这样的函数，该函数拥有方程所要求的一切偏导数，且该函数和这些偏导数均连续，把该函数代入方程时方程在该区域内变为恒等式，则此函数称为该方程在此区域内的古典解。有些偏微分方程无古典解，此时必须讨论其弱解，弱解不是本书讨论的内容。

⑥ 定解条件、泛定方程及定解问题：我们在高等数学中学过，在常微分方程求得通解后，通常会利用某些条件确定一个特解，这些条件称为定解条件。同样，一个偏微分方程也有许多解，要想确定一个特解，就必须附加条件，这些附加条件就是定解条件。定解条件通常包括：初始（或初值）条件、边界（或边值）条件及衔接条件。泛定方程是指描写一类物理现象的，不含定解条件的微分方程。泛定方程和定解条件一起构成定解问题。

1.1 波动方程及其定解问题

波动现象是日常生活中的普遍现象，如弹簧的振动，吉他弦及鼓面的振动，桥梁、机械车辆底座的振动，水波、声波、地震波等。所有这些振动现象的数学模型均为偏微分方程中的波动方程。本节将以弦的微小振动为例，根据物理定律导出弦振动的一维波动方程和对应的定解条件，包括初始条件、边值条件和衔接条件。

1.1.1 波动方程的导出

1.1.1.1 弦的横振动

考虑一条长度为 l 沿 x 轴绷紧的弦，弦的两端固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 的弦，假设弦在外力的作用下离开平衡位置，放开后开始振动。这里波动方程的导出是

基于以下假设，这些假设并无远离现实，如吉他弦的振动。

① 弦是完全弹性的。

② 弦作微小横振动。所谓横振动是指弦上各点的位移与弦的平衡位置（x 轴）垂直，弦只在固定的平面内运动。我们用 $u=u(x,t)$ 表示弦在位置 x 和时刻 t 的位移，则弦在 xOu 平面内运动。所谓微小振动是指振幅与弦长相比很小，弦上任意点的斜率的绝对值 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ 很小，此时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的高次方项可略。

方程的导出方法为隔离物体法（又称微元法），即对微元 $[x,x+\mathrm{d}x]\times[t,t+\mathrm{d}t]$ 利用动量原理：

动量原理：		
弦段 $[x,x+\mathrm{d}x]$		弦段 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 在
从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻	=	时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内
动量的增量		所受合外力的冲量

设弦在横向方向受到线密度为 $F(x,t)$ 的外力的作用，弦的线密度为 $\rho=\rho(x)$。

如图 1.1.1 所示，T_1，T_2 为张力，沿切线方向，在 x 轴方向无运动，合力分量为 0，即

$$T_1\cos\alpha_1+T_2\cos\alpha_2=0$$

所以 $T_1\cos\alpha_1^*=T_2\cos\alpha_2$

对于微小横振动，弦上任一点斜率的绝对值很小，即 $|\tan\alpha_1|\approx 0$，从而 $\alpha_1^*\approx 0$，所以 $\cos\alpha_1^*\approx 1$。同理可得 $\cos\alpha_2\approx 1$，从而 $T_1\approx T_2$，令 $T=T_1=T_2$。

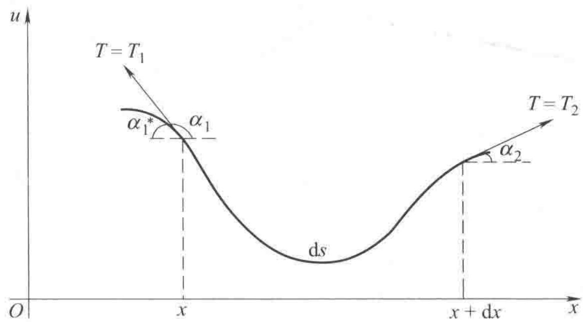


图 1.1.1　弦的横振动

（1）沿 u 轴方向合力及冲量

沿 u 轴方向合力为

$$T\sin\alpha_1^*+T\sin\alpha_2+F(x,t)\mathrm{d}x$$

因为 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ 很小，所以 $|\tan\alpha_1^*|$ 很小，因而

$$\sin\alpha_1^*=\frac{\tan\alpha_1^*}{\sqrt{1+\tan^2\alpha_1^*}}\approx\tan\alpha_1^*=-\tan\alpha_1=-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

同理　$$\sin\alpha_2\approx\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

于是合力沿 u 方向分量的冲量为

$$\left[-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}+T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}+F(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

（2）沿 u 方向动量的增量

弦段 $[x,\ x+\mathrm{d}x]$ 的质量近似为 $\rho(x)\mathrm{d}x$，该弦段从时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 动量的增量为

$$\left[\frac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\rho(x)\mathrm{d}x$$

由动量原理得

$$\left[T\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+F(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\left[\frac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\rho(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

两边同除 $\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 得

$$\frac{T\left[\dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]}{\mathrm{d}x}+F(x,t)=\rho(x)\frac{\left[\dfrac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]}{\mathrm{d}t}$$

对充分小的 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}t$ 有

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

令 $a^2=T/\rho$，$f(x,t)=F(x,t)/\rho$，化简得

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)}$$

该方程称为一维波动方程。当 $f(x,t)=0$ 时，方程称为齐次方程，表示弦不受外力作用，否则方程称为非齐次方程。隔离物体法也可以用考虑微元$[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]$来导出上述方程。通常把质点位移与波的传播方向垂直的波称为横波，弦的振动所产生的波为横波。

1.1.1.2 杆的纵振动

考虑一长度为 l 的位于 x 轴上的均匀细杆，见图 1.1.2。只要杆中一小段有纵向振动，必导致邻段的压缩或伸长，这种伸缩会沿着杆进行传播。设杆在纵向方向受到线密度为 $F(x,t)$ 的外力的作用，杆的线密度为 $\rho=\rho(x)$。我们同样用 $u=u(x,t)$ 表示杆在位置 x 处，时刻 t 的位移。

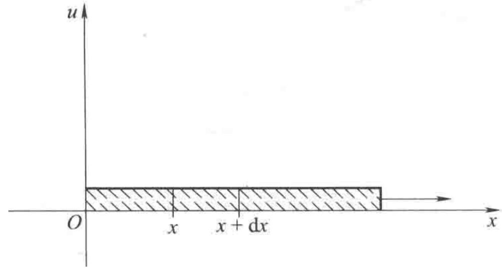


图 1.1.2 杆的纵振动

由胡克定律知，杆在 x 处所受力的大小为 $F=E(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，对微元 $[x,\ x+\mathrm{d}t]\times[t,\ t+\mathrm{d}t]$ 利用动量原理得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\rho(x)\mathrm{d}x\\&=\left[E(x+\mathrm{d}x)\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+F(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

两边同除 $\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 得

$$\frac{\left[\dfrac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\rho(x)}{\mathrm{d}t}=$$

$$\frac{E(x+\mathrm{d}x)\dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-E(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\mathrm{d}x}+F(x,t)$$

从而

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)$$

若弹性模量 E 为常数，则上式变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{\rho}$$

令 $a^2=E/\rho$，$f(x,t)=F(x,t)/\rho$，同样可得一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

对于杆的纵向振动，质点位移与波的传播方向相同，这种波称为纵波，因此，杆的纵向振动为纵波。在电动力学里，电场强度和磁场强度在某些情形下满足波动方程。

如果考虑杆的垂直截面的大小（但同一截面上质点的运动情况相同），不妨设为 S，此时外力 $F(x,t)$和杆的线密度 $\rho(x)$应理解为体密度。这样式（1.1.2）变为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial u(x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\rho(x)\cdot S\mathrm{d}x\\&=\left[SE(x+\mathrm{d}x)\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-SE(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+F(x,t)\cdot S\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

该式两边同除以 S 仍可得同样的结果。

1.1.2 典型定解条件

上节导出的是泛定方程，是振动满足的共同规律。然而，不同的物理问题可能有不同的限定条件，如初始位移或初始速度不同，弦的振动规律不同，弦（或杆）的两个端点的状态不同，弦（或杆）的内部各点的振动情况也不同。本节将以弦的横振动为例，利用动量原理导出几种常见的定解条件。

1.1.2.1 初始条件

初始条件又称柯西（Cauchy）条件，包括初始位移和初始速度，即

$$\boxed{u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)}$$

1.1.2.2 第一类边界条件

第一类边界条件又称第一类边值条件，或狄利克雷（Dirichlet）条件。它表示弦两端的运动规律已知，即

$$\boxed{u\big|_{x=0}=\mu(t)\ ,u\big|_{x=l}=\nu(t)\ ,t\geqslant 0}$$

若弦两端固定，则$u\big|_{x=0}=0$，$u\big|_{x=l}=0$，称为第一类齐次边界条件，否则称为第一类非齐次边界条件。

1.1.2.3 第二类边界条件

第二类边界条件又称第二类边值条件，或诺依曼（Neumann）条件，它表示弦两端受到外力作用。以下以 $x=l$ 端为例导出该边值条件的数学表达式。

如图 1.1.3 所示，设 $x=l$ 端受到 u 方向大小为 $\bar{\nu}(t)$ 的横向力的作用，对微元 $[l-\mathrm{d}x,\ l]\times[t,\ t+\mathrm{d}t]$ 利用动量定理，由式（1.1.1）得

$$\left[\bar{\nu}(t)-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{l-\mathrm{d}x}+F(l-\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$
$$=\left[\frac{\partial u(l-\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(l-\mathrm{d}x,t)}{\partial t}\right]\rho(l-\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$$

两边同除 $\mathrm{d}t$，并令 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}t$ 趋于零可得

$$\bar{\nu}(t)-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$$

即 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{\bar{\nu}(t)}{T}$，记 $\nu(t)=\bar{\nu}(t)/T$，则有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu(t)\text{或}\ \nu_x(l,t)=\nu(t)$$

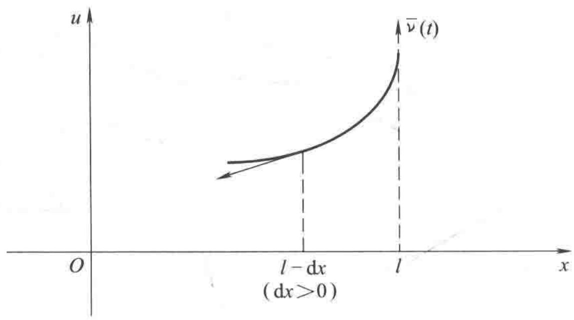


图 1.1.3 弦在 $x=l$ 端受力分析

同理，对微元 $[0,\ \mathrm{d}x]\times[t,\ t+\mathrm{d}t]$ 利用式（1.1.1）可得 $x=0$ 端对应的第二类边界条件。于是可得第二类边界条件

$$\boxed{u_x(0,t)=\mu(t),u_x(l,t)=\nu(t)}$$

特别，当 $\mu(t)=0$ 时，称 $x=0$ 端为自由振动；当 $\nu(t)=0$ 时，称 $x=l$ 端为自由振动。

当 $\mu(t)=\nu(t)=0$ 时，边界条件称为第二类齐次边界条件，否则称为第二类非齐次边界条件。

1.1.2.4 第三类边界条件

第三类边界条件又称第三类边值条件，或罗宾（Robin）条件，它表示弦的端点被某个弹性体所支承，比如固定在弹簧上，如图 1.1.4 所示。

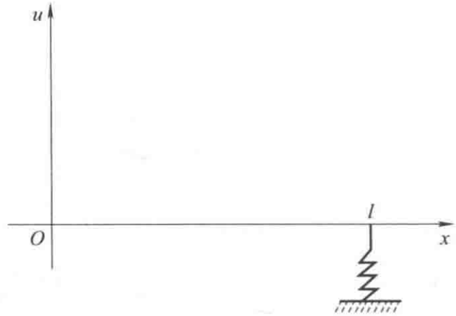


图 1.1.4 弦在 $x=l$ 端受弹性支撑

以 $x=l$ 端为例，设该端弹簧的横向振动规律为 $\bar{\nu}(t)$，由胡克定律得 $x=l$ 端所受的弹性力为

$$-K_l[u(l,t)-\bar{\nu}(t)]$$

其中，K_l 为弹簧的倔强系数，负号表示与位移的方向相反。

对微元 $[l-\mathrm{d}x,\ l]\times[t,\ t+\mathrm{d}t]$ 利用式（1.1.1）得

$$\left\{-K_l[u(l,t)-\bar{\nu}(t)]-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{l-\mathrm{d}x}+F(l-\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t$$
$$=\left[\frac{\partial u(l-\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)}{\partial t}-\frac{\partial u(l-\mathrm{d}x,t)}{\partial t}\right]\rho(l-\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$$

两边同除 $\mathrm{d}t$，并令 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}t$ 趋于零可得

$$-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=K_l[u(l,t)-\bar{\nu}(t)]$$

记 $\nu(t)=K_l\bar{\nu}(t)$，则有

$$Tu_x(l,t)+K_lu(l,t)=\nu(t)\text{或}(Tu_x+Ku)\,|_{x=l}=\nu(t)$$

对微元 $[0,\ \mathrm{d}x]\times[t,\ t+\mathrm{d}t]$ 重复以上讨论可得 $x=0$ 端对应的第三边界条件，于是可得第三边界条件

$$\boxed{(Tu_x+Ku)\,|_{x=0}=\mu(t),(Tu_x+Ku)\,|_{x=l}=\nu(t)}$$

当 $\mu(t)=\nu(t)=0$ 时，边界条件称为第三类齐次边界条件，否则称为第三类非齐次边界条件。

在实际问题中，可能两端取不同类型的边值条件。

1.1.2.5 衔接条件

在实际问题中，除上述几类定解条件外，衔接条件也是一类常见的定解条件。例如在研究弦的微小振动时，若在 $x=x_0$ 处施加一横向力 $F_0(x)$，如图 1.1.5 所示，此时 $u_x(x,t)$ 在 $x=x_0$ 处出现间断，弦的振动应分为两段：$[0,\ x_0]$ 和 $[x_0,\ l]$。

设两段弦的振动规律分别为 $u_1=u_1(x,t)$ 和 $u_2=u_2(x,t)$，由振动的连续