21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

同济第三版

全程导学及习题全解（下册）

主 编 杨 萍 副主编 林一强 苗 璐 主 审 黄 江

中国时代经济出版社

21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

同济第三版

全程导学及习题全解（下册）

主　编　杨　静　副主编　林一强　苗　璐　主　审　黄　江

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(同济第三版)全程导学及习题全解. 下册 / 杨蕤主编.
— 北京 : 中国时代经济出版社,2011.9
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-5119-0950-3
Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①微积分 - 高等学校 -
教学参考资料 Ⅳ. ①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149240 号

书　　名: 微积分(同济第三版)全程导学及习题全解. 下册
出 版 人: 王鸿津
作　　者: 杨　蕤
出版发行: 中国时代经济出版社
社　　址: 北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码: 100078
发行热线: (010)83910219
传　　真: (010)68320584
邮购热线: (010)88361317
网　　址: www.cmepub.com.cn
电子邮箱: zgsdjj@hotmail.com
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 北京市优美印刷有限责任公司
开　　本: 787 × 1092 1/16
字　　数: 320 千字
印　　张: 17.375
版　　次: 2011 年 9 月第 1 版
印　　次: 2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5119-0950-3
定　　价: 30.00 元

内容提要

本书是同济大学数学系编《微积分》(第三版下册)教材的配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评,思路清晰,逻辑缜密,循序渐进的帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼,帮助读者梳理各章脉络,统揽全局。在《微积分》教材习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书是在《微积分》(第二版)题解的基础上修订完成的。《微积分》第三版教材对原习题做了增加和删减。为了便于读者学习和使用教材,本书将第三版新增的习题解加以增补,特别是有关计算机辅助计算的习题,给出了详细的解答,对于第二版中的原有习题,本书也全部保留,对第三版教材中删除的习题,本书将其做为补充题或加 * ,放在每一章节之后,供读者参考。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书。也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

前　言

《微积分》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《微积分》课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据同济大学数学系编写的《微积分》教材中各章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者培养独立思考的方式和分析问题的方法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本次编写中，我们对所有习题给出了详细的解答，特别是有关计算机辅助计算的习题。对于第二版中原有的习题，全部保留。我们将第三版中删除的习题做为补充题或加*，入在每章节之后，供读者参考。

本教材由杨蕤、林一强、苗璐等编写，全书由黄江老师主审。本书编写过程中得到杨晓叶、潘大伟、任卉、谢婧等的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《微积分》教材作者同济大学应用数学系的老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目　　录

第五章 向量代数与空间解析几何

知识点概要

1. 空间直角坐标系

由过空间一点 O 的互相垂直的三条数轴组成的坐标系，记为 $\{O;X,Y,Z\}$ 或 $\{O;x,y,z\}$ 或 $O-XYZ$ 或 $O-xyz$.

2. 两点间的距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

3. 向量的概念

向量：既有大小又有方向的量称为向量，其坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\{a_1,a_2,a_3\}\text{或}(a_1,a_2,a_3).$$

向量的模：向量的大小称为向量的模，若 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，则向量的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.$$

单位向量：模为 1 的向量. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的同方向单位向量记为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}\right)$$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴正向的夹角.

零向量：模为零的向量. 记为 $\boldsymbol{0}$

两向量的夹角：记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ 为：

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

投影：向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影可表示为 $\mathbf{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

4. 向量的运算及性质

(1)向量的线性运算

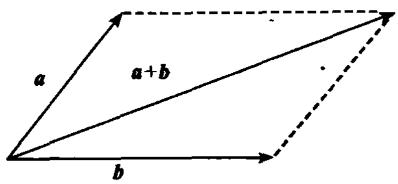
①加法运算：两向量相加满足如图 5－1 所示的平行四边形法则或三角形法则，用坐标表示式，记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$

相应的减法运算为一向量加上另一向量的负向量即

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 其坐标表示为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

向量的加法运算满足下列运算律：



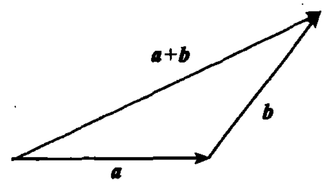


图 5－1

(ⅰ)交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(ⅱ)结合律　　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

②数乘运算:对于任意实数 λ,定义数乘:设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线(当 $\lambda>0$时同向,当 $\lambda<0$ 时异向)且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

向量的数乘运算满足下列运算律:

(ⅰ)结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(ⅱ)向量按数乘因子的分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(ⅲ)向量按向量因子的分配律　　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

③向量的数量积(也称点积,内积)

定义:两向量的数量积定义为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. 其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,$0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$,当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$ 时,称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

向量的数量积满足下列运算律:

(ⅰ)交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;　　(ⅱ)结合律:$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$;

(ⅲ)分配律:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;　　(ⅳ)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

④向量的向量积(也称叉积,外积)

定义:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量,模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,方向由右手法则确定设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$则:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Longleftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

向量积满足下列运算定律:

(ⅰ)反交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;(ⅱ)分配律:$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

(ⅲ)结合律:$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;(ⅳ)$a/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

几何意义:$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

⑤向量的混和积

向量的混合积定义为$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{abc})$

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$,则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

三矢量的混和积具有轮换性：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$以及三向量共面$\Longleftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$

几何意义：$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为相邻三棱的平行六面体的体积.

5. 空间平面与直线

(1)空间平面方程

①矢量式方程：$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$.　其中$\boldsymbol{n}$为平面法向量，$\boldsymbol{r}_0$为已知点向量.

②点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 其中$\{A,B,C\}$为平面法向量，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点.

③一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$. 其中$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面法向量.

特殊的：　$Ax+By+Cz=0$，表示通过原点的平面.

$Ax+By+D=0,D\neq0$，表示该平面与z轴平行.

$Ax+D=0,D\neq0$，表示该平面与yOz平面平行.

$x=0$表示yOz平面.

④截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c$为平面在三坐标轴上的截距.

⑤三点式方程：若$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$为平面上三点，则

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

(2)直线方程

①向量式方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{s}t$，其中$\boldsymbol{r}_0$为直线上已知点向量，$\boldsymbol{s}$为直线方向.

②标准式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为已知点，$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$为与直线平行的非零向量即为方向向量.

③一般式方程：视为两个不平行平面的交线.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

方向向量$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$　其中$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$不成立.

④参数式方程为$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$　t为参数，$\{x_0,y_0,z_0\}$为已知点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为方向向量.

6. 直线，平面间的位置关系

(1)点到平面的距离：点$M(x_0,y_0,z_0)$到平面π：$Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+Bx_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(2)两异面直线间距离：设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线l上一定点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线l的方向向量. 则点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和直线l：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times s|}{|s|}$$

(3)平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

(4)两直线 l_1 与 l_2 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

其中$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$为 l_1 的方向矢量，

$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$为 l_2 的方向矢量.

(5)两平面 π_1,π_2 平行，垂直的充要条件

$$\pi_1/\!/\pi_2\Longleftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Longleftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\pi_1\perp\pi_2\Longleftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

(6)两直线 l_1 与 l_2 平行，垂直的充要条件

$$l_1/\!/l_2\Longleftrightarrow\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2\Longleftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$l_1\perp l_2\Longleftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

(7)直线 l 与平面 π 平行，垂直的充要条件

$$l/\!/\pi\Longleftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

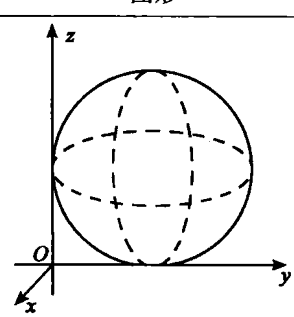
$$l\perp\pi\Longleftrightarrow\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}\Longleftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

7. 曲面与空间曲线

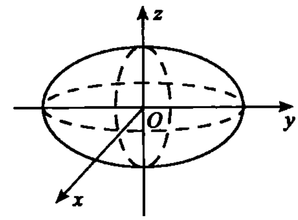
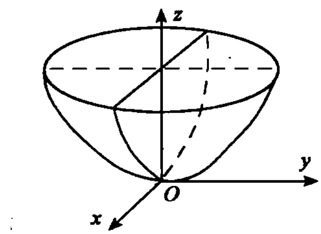
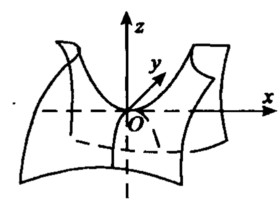
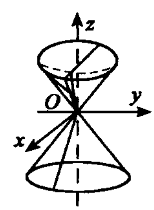
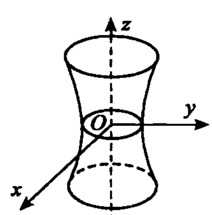
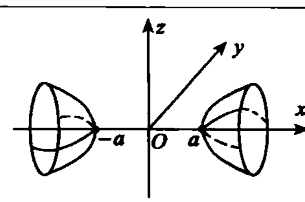
(1)曲面方程：用 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 或 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ (参数式)来表示空间曲面方程.

(2)曲线方程：用 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 表示空间曲线方程.

(3)二次曲面

曲面名称	方程	图形
球面	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. 球心：$(a,b,c)$. 半径为 R.	

续表

椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 中心(0,0,0)半长轴为 a,b,c	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz(p>0)$ 顶点(0,0,0) z 轴为对称轴	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ 顶点(0,0,0) z 轴为对称轴.	
锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 顶点(0,0,0)中心轴 z 轴	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

(4)柱面：一般地，若曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中缺某个变量 $F(x,y)=0$(缺 z)，则它表示空间中母线平行于 Oz 轴的柱面，其在 xOy 面上的曲线表示为

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

类似地，母线平行于 Ox 轴，Oy 轴的柱面为 $\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$

(5)旋转曲面

已知 yOz 面上的曲线 $\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$ 则它绕 Oz 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

类似地，可得出其他情况.

(6)空间曲线在坐标面上的投影的求法

设曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 由方程组消去 z 后得方程 $H(x,y)=0$. 它是含曲线 L 的母线平行于 z 轴的柱面，称它为曲线 L 的投影柱面，它与 xOy 面的交线为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$，即为曲线 L 在 xOy 面上的投影曲线.

类似地可推得曲线 L 在 xOz 面及 yOz 面上的投影曲线.

典型例题讲解

例 1　设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$. 则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=$______.

解: 因为在由 3 个向量组成的混合积中若有相同向量，则该混和积必为 0.

所以 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4$.

例 2　已知$\triangle ABC$ 的两边矢量：$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 求$\triangle ABC$ 的面积.

解: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+(-5)\boldsymbol{j}+(-2)\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

而$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$. 故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

例 3　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为普通几何空间中 3 个矢量，试证：若存在不全为零的三个数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$ 则 3 个矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 共线.

证明: 由 $k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 k_1,k_2,k_3 不全为零，不妨设 $k_1\neq0$，则

$\boldsymbol{c}\cdot(k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$，即 $k_1[\boldsymbol{cab}]+k_2[\boldsymbol{cbc}]+k_3[\boldsymbol{cca}]=0$

又因为 $[\boldsymbol{cbc}]=[\boldsymbol{cca}]=0$ 故 $[\boldsymbol{cab}]=0$ 即 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$，

所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三矢量共面，又

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 均垂直于该平面，因而它们共线.

例 4　设 L 为空间中平行于向量 $\boldsymbol{l}$ 的直线，点 p_1 不在 L 上，(1)试证 p_1 到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}$ 其中 p_0 为 L 上一点；(2)由此求点(2,1,−1)到直线 $x=3t,y=1+2t,z=-5-t$ 的距离.

证明:(1)如图 5−2 所示：$d=|\overrightarrow{p_0p_1}|\cdot\sin\theta$.

故 $|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|=|\boldsymbol{l}||\overrightarrow{p_0p_1}|\cdot\sin\theta=|\boldsymbol{l}|\cdot d$ 从而 $d=\dfrac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}$.

(2)在直线 $x=3t,y=1+2t,z=-5-t$ 上任取一点 $p_0=(0,1,-5)$，对应 $t=0$，向量 $\boldsymbol{l}=(3,2,-1)$ 故

$$d=\frac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{|(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k})|}{|3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|}$$

$$=\frac{|8\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{138}}{7}.$$

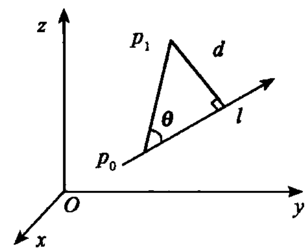


图 5−2

例 5　直线 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 Oz 轴旋转一周，求旋轴曲面的方程.

解:设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 上任一点，有 $x_1=1$，即 M_1 为 $(1,y_1,z_1)$，直线绕 Oz 轴旋转到某一位置时，M_1 变为另一点 $M(x,y,z)$，则点 M,M_1 到 Oz 轴距离不变，且 $r^2=1^2+{y_1}^2=x^2+y^2$，而 M_1 又在 L 上，故有 $y_1=z_1=z$.

所以 $1+{y_1}^2=1+{z_1}^2=1+z^2$，故 $1+z^2=x^2+y^2$，

所以 $x^2+y^2-z^2=1$ 为所求旋转曲面的方程.

例 6　已知准线方程为 $\begin{cases}x+2y-2z-2=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 母线平行于直线 $x=y=z$，求此柱面方程.

解:因为母线平行于直线 $x=y=z$，

所以母线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$.

又因为准线为一直线 L，可见柱面是过 L 的一个平面，而过 L 的平面束方程为

$x+2y-2z-2+\lambda(x-y+z)=0$，

即 $(1+\lambda)x+(2-\lambda)y-(2-\lambda)z-2=0$.

由于母线垂直于柱面的法向量，因此有

$1\cdot(1+\lambda)+1\cdot(2-\lambda)+1\cdot(\lambda-2)=0$ 即 $\lambda=-1$，代入平面束方程可得

$x+2y-2z-2-x+y-z=0$，$3y-3z-2=0$

即为所求柱面方程.

例 7　试证：平面 $2x-12y-z+9=0$ 与双曲抛物面 $x^2-9y^2=3z$ 的交线是两条相交的直线，并写出它们的对称式方程.

证明:由已知平面方程 $2x-12y-z+9=0$，得 $z=2x-12y+9$，

代入双曲抛物面方程 $x^2-9y^2=3z$ 得

$x^2-9y^2=6x-36y+27$，即 $x^2-6x-9y^2+36y-27=0$.

由 $(x-3)^2-9(y-2)^2=0$，

而有 $(x-3)+3(y-2)=0$ 或 $(x-3)-3(y-2)=0$

即 $x+3y-9=0$ 或 $x-3y+3=0$

故已知平面与双曲抛物面的交线是如下两条相交直线.

$L_1:\begin{cases}2x-12y-z+9=0\\x+3y-9=0\end{cases}$　　$L_2:\begin{cases}2x-12y-z+9=0\\x-3y+3=0\end{cases}$

L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -12 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}=(3,-1,18).$

在 L_1 上取一点$(0,3,-27)$，

从而可得 L_1 的对称式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+27}{18}.$$

L_2的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -12 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=(-3,-1,6).$

在 L_2 上取一点 $B(0,1,-3)$，从而可得 L_2 的对称式方程为

$$\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}.$$

例 8 求直线$\frac{x-1}{9}=\frac{9+1}{-4}=\frac{z}{-7}$在平面 $2x-y-3z+6=0$ 上的投影直线方程.

分析:先求过已知直线垂直于已知平面的平面方程. 那么所求投影直线方程即为两平面的交线.

解:过已知直线且垂直于已知平面的方程为

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z\\ 9 & -4 & -7\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=5(x-1)+13(y+1)-z=0$$

即 $5x+3y-z+8=0$.

故投影直线方程为$\begin{cases}2x-y-3z+6=0\\ 5x+13y-z+8=0.\end{cases}$

习题全解

习题 5—1

1. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点，求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

解:根据向量的三角形法则

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}.$

2. 已给正六边形 $ABCDEF$(字母顶序按逆时针向)，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

解:如图 5—3 所示正六边形 $ABCDEF$.

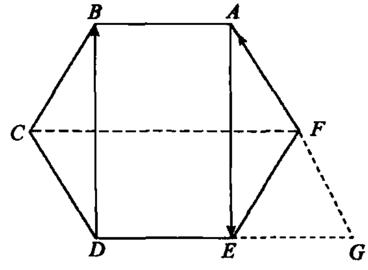


图 5—3

延长 DE 及 AF 交于 G 点. 则

$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\ \boldsymbol{b}+\frac{3}{2}\ \boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解：$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}.$

4. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

证明：如图 5－4 所示 $\triangle ABC$ 两边 AB、AC 的中点分别为 D、E，则有 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$. 而又因为

$\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

从而 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=2\overrightarrow{DE}$

又由向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

可知 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{DE}$.

故命题得证.

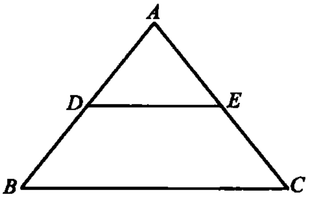


图 5－4

5. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB|=2|AC|$，O 为 AB 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

解：如图 5－5 所示，

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

所以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

又因为 $|CB|=2|AC|$ 且 ABC 在一条直线上，

所以 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}.$

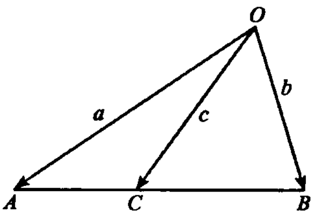


图 5－5

习题 5－2

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点的坐标有什么特征？指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-3,2)$；　$B(3,-2,-4)$；　$C(-1,-2,-3)$；　$D(-3,2,-1)$.

解：在空间直角坐标系中，

若点 (x,y,z) 在第一封限上，则有 $x>0,y>0,z>0$；

若点 (x,y,z) 在第二卦限上，则有 $x<0,y>0,z>0$；

若点 (x,y,z) 在第三卦限上，则有 $x<0,y<0,z>0$；

若点 (x,y,z) 在第四卦限上，则有 $x>0,y<0,z>0$；

若点 (x,y,z) 在第五卦限上，则有 $x>0,y>0,z<0$；

若点 (x,y,z) 在第六卦限上，则有 $x<0,y>0,z<0$；

若点 (x,y,z) 在第七卦限上，则有 $x<0,y<0,z<0$；

若点 (x,y,z) 在第八卦限上，则有 $x>0,y<0,z<0$.

由此可知 $A(1,-3,2)$ 在第四卦限，$B(3,-2,-4)$ 在第八卦限，$C(-1,-2,-3)$ 在第七卦限，$D(-3,2,-1)$ 在第六卦限.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

解：在 xOy 面上的点 $z=0$，在 xOz 面上的点 $y=0$，在 yOz 面上的点 $x=0$，在 x 轴上的点坐标为 $(x,0,0)$，在 y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$，在 z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$.

由此可知 $P(0,2,-5)$ 在 yOz 面上，$Q(5,2,0)$ 在 xOy 面上，$R(8,0,0)$ 在 x 轴上，$S(0,2,0)$ 在 y 轴上.

3. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

解：(1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$.

关于 yOz 面的对称点为 $(-a,b,c)$.

关于 xOz 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点为 $(a,-b,-c)$.

关于 y 轴的对称点为 $(-a,b,-c)$.

关于 z 轴的对称点为 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求 P_0 到各坐标面和各坐标轴的距离.

解：过 P_0 作 xOy 面上的垂线，垂足为 $(x_0,y_0,0)$，距离为 $d=|z_0|$.

过 P_0 作 yOz 面上的垂线，垂足为 $(0,y_0,z_0)$，距离为 $d=|x_0|$.

过 P_0 作 xOz 面上的垂线，垂足为 $(x_0,0,z_0)$，距离为 $d=|y_0|$.

过 P_0 作 x 轴上的垂线，垂足为 $(x_0,0,0)$，距离为 $d=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$.

过 P_0 作 y 轴上的垂线，垂足为 $(0,y_0,0)$，距离为 $d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$.

过 P_0 作 z 轴上的垂线，垂足为 $(0,0,z_0)$，距离为 $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特征？

解：过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作平行于 z 轴的直线，则它上面点的坐标可表示为 (x_0,y_0,z)，z 任意.

过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作平行于 xOy 的平面，此平面为 $z=z_0$，其上各点可表示为 (x,y,z_0)，x,y 任意.

6. 已知点 $A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$，写出以线段 AB 为直径的球面方程.

解：因为所求球面方程以 AB 为直径，故球心 M 为 AB 中点，令 M 为 (x_0,y_0,z_0)，则由题可知

$$x_0=\frac{2+4}{2}=3;y_0=\frac{1+3}{2}=2;z_0=\frac{4+10}{2}=7$$

半径 $r=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{44}=\sqrt{11}$

故所求的球面方程为

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11.$$

7. 设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点的坐标，试写出其余六个顶点的坐标：

(1) $(1,1,2),(3,4,5)$；　　(2) $(4,3,0),(1,6,-4)$.

解：(1)令 $A=(1,1,2)$，$B=(3,4,5)$，因为 A、B 各方向坐标无相同的. 所以 A、B 不同在平行于 xOy，yOz，xOz 面上，又 $\overrightarrow{AB}=(2,3,3)$，故它不平行于 x 轴，y 轴，z 轴，由此可知 $\overrightarrow{AB}$ 为长方体的对角线向量.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{22}$. 故其 6 个顶点坐标为

$(1,1,5),(3,1,5),(3,1,2),(1,4,5),(3,4,2),(1,4,2)$.

(2)设 $A=(4,3,0)$，$B(1,6,-4)$，则 $\overrightarrow{AB}=(-3,3,-4)$. 同(1)分析相同. 可知 $\overrightarrow{AB}$ 也为长方体对角线上两点，故其它六个点的坐标同理可得

$(4,3.-4),(4,6,-4),(1,3,-4),(1,3,0),(1,6,0),(4,6,0)$.