配同济大学编《高等数学》(高教四版、五版、六版)

高等数学学习训练题精选

陈春宝 沈家骅 编著

丁颂康 主审

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学学习训练题精选

配同济大学编《高等数学》(高教四版、五版、六版)

陈春宝　沈家骅　编著

丁颂康　　主审

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

高等数学是理工科各专业学生必修的一门基础课，它在科学研究、工程技术、国民经济等诸方面都有广泛的应用，在大学一年级课程中占有非常重要的地位.

本书有以下特点：①集中要点，与教学同步. 根据教材顺序，每课一个单元将每节的知识点归纳集中在一起，与教学同步给出练习题，题型既有常规的，也有一些比较特殊的，尤其有一些应对考试的题型，便于读者整体掌握本章节内容，同时方便读者随时检索查阅这些详细题解. ②多级筛选，突出重点. 按照教材的要求，本书对各章、节内容进行了 A 级和 B 级同步训练题筛选. A 级作一般的知识要点；B 级是必须掌握、学期考试中必考或出现频率较高的知识点. 这样，学习者可按照自身的情况制定学习方案.

本书可作为工科院校学生学习高等数学课程的参考资料，也可供报考工科硕士研究生的学生复习高等数学时使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习训练题精选/陈春宝，沈家骅编著. --上海：同济大学出版社，2016.3

IBSN 978-7-5608-6243-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②沈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 049894 号

高等数学学习训练题精选

配同济大学编《高等数学》(高教四版、五版、六版)

陈春宝　沈家骅　编著

丁颂康　主审

责任编辑　缪临平　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　常熟市大宏印刷有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　21.75

印　　数　1—4100

字　　数　435000

版　　次　2016 年 4 月第 1 版　2016 年 4 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-6243-9

定　　价　56.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换　　版权所有　侵权必究

前　言

“高等数学”作为高等院校各专业学生必修的一门基础课，它在科学研究、工程技术和国民经济等各方面都有着广泛的应用，在大学一年级的诸课程中占有非常重要的地位.

“高等数学”由于其概念抽象，推理缜密，方法灵活而且计算较为烦琐，往往使初学者感到比较困难，规律难找，习题难做，表达不够完整是学生们常见的问题. 为了使学生尽快地掌握学习规律，复习、巩固、掌握“高等数学”的基本概念、基本原理和基本解题方法，编者在《高等数学同步辅导与训练题集》、《新编高等数学阶梯同步练习与辅导》的基础上，广泛地听取了教师和学生的意见，对内容进行了重新精选和修改，汇编成了《高等数学学习训练题精选》一书.

本书以全国高等院校数学课程指导委员会编制的《数学课程教学的基本要求》为指导，由长期从事“高等数学”教学，具有丰富教学经验的教师负责编写.

有一位著名数学家曾经说：“解题可以认为是人的最富有特征的活动，解题是一种本领，你只能通过模仿和实践才能学到它，假如你要从解题中获得最大收获，你就应该在做的题目中去找到它的特征，它的特征在你今后求解其他问题时就能起到指导作用，每种解题方法，只有通过你自己的体验，才会变成你自己的财富.”

本书有以下特点：

1. 要点明确，与教学同步. 根据教材顺序，以每次教学课为一个单元将每章节的知识点归纳集中在一起，与教学同步给出练习题，题型既有常规的也有一些比较特殊的，尤其有一些应对考试的题型，便于读者整体掌握本章节内容，同时方便读者随时检索查阅这些详细题解.

2. 多级筛选，适用面广. 按照教材的要求，本书对各章、节内容进行了A级和B级同步训练题筛选. A级作一般性的知识要点；B级是必须掌握、学期考试考纲中必考的或试卷命题中出现频率比较高的知识点，不同基础的学习者可按照自身的情况选择不同等级的题型进行学习和练习.

3. 循环复习，强化记忆. 本书每章后的习题课对全章的内容作了一个

小结，挑选了各章的综合例题进行精解，对常见问题和常见错误进行了分析和纠正，每章后配有一定数量的练习题，并给出解答. 以上内容也为教师上习题课提供了素材.

本书配合同济大学编《高等数学》（高教四版、五版、六版）教材，融汇了高等数学中各环节的内容，原则上不超出工科院校高等数学课程教学基本要求，个别内容要求略高.

本书既可作为高等院校学生学习高等数学课程的参考资料，又可作为学生参加全国数学竞赛的训练资料，也可供报考硕士研究生的学生复习高等数学时使用.

本书由陈春宝、沈家骅编写，丁颂康教授主审. 由于编者水平的关系，书中一定存有不少不足和错误之处，万望各位读者指正.

编　者

2016 年 1 月于上海

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第1章　函数与极限

[教学目的与要求]

1. 了解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 了解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

§1-1　函数的概念

A级同步训练题

一、客观题

1. 下面四个函数中，与 $y=x$ 相同的是(　　).

(A) $y=e^{\ln|x|}$　　(B) $y=\sqrt{x^2}$

(C) $y=\sqrt[4]{x^4}$　　(D) $y=x(\sin^2x+\cos^2x)$

2. 下列函数中，(　　)既是奇函数，又是单调增加的.

(A) $\sin^3x$　　(B) x^3+1

(C) x^3+x　　(D) x^3-x

3. 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$,则函数 $f[g(x)]=$ (　　).

(A) $2x$　　(B) 2^{2x}　　(C) $\log_2 x^2$　　(D) $2x^2$

4. 若 $f(x)$ 为奇函数,则(　　)也为奇函数.

(A) $f(x)+1$　　(B) $f(-x)+1$

(C) $f(x)+f(|x|)$　　(D) $f[f(-x)]$

5. 设 $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$,则 $f(x)$ 的定义域用区间表示为________.

6. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$ 的定义域用区间表示为________.

7. 设 $f(x)=\sqrt{x-1}+\ln(5-x)$,则 $f(x)$ 的定义域用区间表示为________.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x+4)}}$ 的定义域用区间表示为________;

二、求下列函数的定义域

1. $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}+\dfrac{1}{\ln(x-1)}$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$,求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$;(2) $f(\sin x)$;(3) $f(x+a)(a>0)$;(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

三、讨论函数 $f(x)=1+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

四、讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的有界性.

五、设 $f(x)=x^2+1, \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;求 $f[\varphi(x)]$ 及 $\varphi[f(x)]$.

六、求函数 $y=\sqrt{x^2-4}(x\leqslant -2)$ 的反函数,并指出反函数的定义域.

B 级同步训练题

一、客观题

1. 下列函数中,不是奇函数的是(　　).

(A) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$　　(B) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

(C) $y=x\arccos\dfrac{x}{1+x^2}$　　(D) $y=xf(x^2)$

2. 设 $f(x)=(|x|+x)[e^{|x|-x}-1](-\infty<x<+\infty)$,则 $f(x)$(　　).

(A) 是奇函数;　　(B) 是偶函数;

(C) 是奇函数又是偶函数;　　(D) 非奇函数又非偶函数.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$,则 $f(\ln x)$ 的定义域是________.

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(1,2]$,则 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域是________.

5. 设 $f(x)=\ln x$，$\varphi(x)=\arcsin x$，则 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是__________.

6. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，则 $f(\sqrt{4-x^2})$ 的定义域是__________.

二、讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$，当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时的有界性.

三、讨论函数 $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性.

四、讨论函数 $f(x)=x-e^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性.

五、求 $f(x)=\sin 5x\cdot\cos x$ 的最小正周期.

六、求函数 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的反函数.

七、求函数 $y=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 的反函数，并指出其定义域.

八、设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0;\\ x^2+4, & x<0.\end{cases}$ 求 $f(2x-1)$.

九、设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

十、设 $f(x)=e^x\cos x$，问在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 是否有界？

辅导与参考答案

A 级同步训练题

一、客观题

1. (D). **2.** (C). **3.** (B). **4.** (D).

5. $[-1,1]$. **6.** $(-2,3]$. **7.** $[1,5)$. **8.** $(-3,+\infty)$.

二、求下列函数的定义域

1. 解：$\begin{cases}x^2-4x+3\leqslant 0,\\ x-1>0 \text{ 且 } x-1\neq 1.\end{cases}$ 所以定义域为 $(1,2),(2,3]$.

2. 解：(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1$，所以定义域为 $[-1,1]$；

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以定义域为 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$；

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1$，所以定义域为 $[-a,1-a]$；

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a;\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

所以定义域为：$0<a<\dfrac{1}{2}$，D 是 $[a,1-a]$，$a=\dfrac{1}{2}$，D 是 $x=\dfrac{1}{2}$；$a>\dfrac{1}{2}$，D 是 $\varnothing$.

三、解：定义域 $(0,+\infty)$，任取 $0<x_1<x_2<+\infty$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=(1+\ln x_1)-(1+\ln x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

则 $f(x_1) < f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

四、解：对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$，$\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right| = \dfrac{|\sin x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{|x|}{1+|x|^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$，

故函数 $f(x)$ 在其定义域内有界.

五、解：$f[\varphi(x)] = \varphi^2(x)+1 = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$；$\varphi[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{[f(x)]^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^2+1}}$.

六、解：当 $x \leqslant -2$ 时，$0 \leqslant y < +\infty$，由 $y = \sqrt{x^2-4}$ 得 $x = -\sqrt{y^2+4}$，

故所求的反函数为 $\varphi(x) = -\sqrt{x^2+4}\quad(0 \leqslant x < +\infty)$.

B 级同步训练题

一、客观题

1. (C). **2.** (C). **3.** $(1,\mathrm{e})$. **4.** $\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$. **5.** $(0,1]$. **6.** $(-2,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},2)$.

二、解：因 $a^{\frac{1}{x}} > 0$，则 $0 < \dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}} < 1$，

故函数 $f(x)$，当 $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 时，有界.

三、解：$f(x) > 0$，$1+2x^2 \leqslant 1+2x^2+x^4 = (1+x^2)^2 \leqslant (1+x^2)^2+(1-x^2)^2$.

于是 $\quad f(x) = \dfrac{1+2x^2}{1+x^4} \leqslant \dfrac{2(1+x^4)}{1+x^4} = 2$，即 $\quad 0 < f(x) \leqslant 2$，

故 $f(x)$ 是有界函数.

四、解：在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取 $x_1 < x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1) = (x_2-\mathrm{e}^{-x_2})-(x_1-\mathrm{e}^{-x_1}) = (x_2-x_1)$

$+\mathrm{e}^{-x_2}(\mathrm{e}^{x_2-x_1}-1) > 0$，所以 $f(x_2) > f(x_1)$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

五、解：$f(x) = \dfrac{1}{2}[\sin 6x+\sin 4x]$，$\sin 4x$ 与 $\sin 6x$ 分别是以 $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数，故 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

六、解：由 $\sin y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，$\sin^2 y = \dfrac{1-x}{1+x}$，

解得 $\quad x = \dfrac{1-\sin^2 y}{1+\sin^2 y}$，反函数 $y = \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$.

七、解：由 $y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ 得 $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{y}{1-y}$，所以 $x = -\ln\dfrac{y}{1-y}$.

反函数 $y = \ln\dfrac{1-x}{x}$，定义域 $(0,1)$.

八、解：$f(2x-1) = \begin{cases} 2(2x-1)+1, & 2x-1 \geqslant 0; \\ (2x-1)^2+4, & 2x-1 < 0. \end{cases}$

即 $\quad f(2x-1) = \begin{cases} 4x-1, & x \geqslant \dfrac{1}{2}; \\ 4x^2-4x+5, & x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

九、解：$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 故 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

十、解：任给 $M>0$，必存在正整数 n，使 $n>\dfrac{\ln M}{2\pi}$，

取 $x_1=2n\pi$，则 $f(x_1)=e^{2n\pi}\cos(2n\pi)=e^{2n\pi}>M$.

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无界.

§1-2 数列极限

A 级同步训练题

一、客观题

1. 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义，对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对 $n>N$ 的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，这里的 N(　　).

(A) 是 ε 的函数 $N(\varepsilon)$，且当 ε 减少时 $N(\varepsilon)$ 增大

(B) 是由 ε 所唯一确定的

(C) 与 ε 有关，但 ε 给定时 N 并不唯一确定

(D) 是一个很大的常数，与 ε 无关

2. $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & n\text{ 为奇数};\\ 10^{-10}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 则下列正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=10^{-10}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ 10^{-10}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

3. 下列数列 $\{x_n\}$ 中，收敛的是(　　).

(A) $\left\{(-1)^n\dfrac{n+1}{n}\right\}$　(B) $\left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}$　(C) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$　(D) $\{n-(-1)^n\}$

4. 数列有界是数列收敛的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

二、观察下列数列的极限

1. $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$.　　2. $0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{6},\cdots,0,\dfrac{1}{2n},\cdots$.

3. $x_n=(-1)^n\dfrac{n-1}{n}$.　　4. $x_n=(-1)^n\dfrac{\sin n}{n}$.

三、根据数列极限的定义证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.　　　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n+1}=\dfrac{1}{4}$.

B 级同步训练题

一、客观题

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A(A\neq 0)$，则当 n 充分大时，必有(　　).

(A) $|u_n|\leqslant A$　　(B) $|u_n|\leqslant|A|$

(C) $|u_n|\leqslant\dfrac{|A|}{2}$　　(D) $|u_n|>\dfrac{|A|}{2}$

2. 设数列$\{u_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=A$，则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=-A$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不一定存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\pm A$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]=$(　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) ∞　　(D) $\dfrac{1}{n}$

二、用分析定义证明

1. 用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)!!}=0$.

2. 用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

3. 用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2+3}=\dfrac{1}{2}$.

三、设有两个数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；(2) y_n 有界，试证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$.

四、设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是无界数列，$z_n=x_ny_n$，试举例说明：$\{z_n\}$不一定是无界数列.

五、若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$，试讨论$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是否存在.

辅导与参考答案

A 级同步训练题

一、客观题

1. (C).　　**2.** (D).　　**3.** (B).　　**4.** (B).

二、观察下列数列的极限

1. 1.　　**2.** 0.　　**3.** 不存在.　　**4.** 0.

三、根据数列极限的定义证明

1. $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，所以取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$，有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

2. $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{n+1}{4n+1}-\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4(4n+1)}<\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$，有 $\left|\frac{n+1}{4n+1}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$ 成立.

B级同步训练题

一、客观题

1. (D).　　**2.** (C).　　**3.** (A).

二、用分析定义证明

1. 证：任给 $\varepsilon>0$，由于 $\left|\frac{1}{(2n)!!}-0\right|=\frac{1}{(2n)!!}\leqslant\frac{1}{2n}$，令 $\frac{1}{2n}<\varepsilon$，解得 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

故对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left[\frac{1}{(2n)!!}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

因此：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)!!}=0$.

2. 证：任给 $\varepsilon>0$，因为 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，解得 $n>-\log_2\varepsilon$.

故对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

3. 证：任给 $\varepsilon>0$，由于 $\left|\frac{n(n+1)}{2n^2+3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|2n-3|}{2(2n^2+3)}<\frac{2n}{4n^2}=\frac{1}{2n}$，

$$令\frac{1}{2n}<\varepsilon，解得 n>\frac{1}{2\varepsilon}.$$

故对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n(n+1)}{2n^2+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon 成立，因此：\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2+3}=\frac{1}{2}.$$

三、证：任给 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$，则必有 $N>0$ 存在，使当 $n>N$ 时，$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon_1$ 成立，从而有 $|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|\leqslant M|x_n|<M\varepsilon_1=\varepsilon$ 成立.

因此：
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0.$$

四、解：例如：$\{x_n\}=1,0,3,0,5,\cdots,2n-1,0,2n+1,\cdots$，

$\{y_n\}=0,2,0,4,0,6,\cdots,0,2n,0,\cdots$

都是无界数列，但 $z_n=x_ny_n=0$.

五、若 $A=0$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，必可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

但若 $A>0$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=A$，不一定能得出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

例:$a_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$,则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 2$,亦有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$,二者都存在.

但若 $a_n = (-1)^n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$,而$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

§1-3　函数的极限

A 级同步训练题

一、客观题

1. 从$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,不能推出(　　).

(A) $f(x_0^+) = A$　　(B) $f(x_0^-) = A$

(C) $f(x_0) = A$　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - A] = 0$

2. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的(　　)条件.

(A) 充分非必要　　(B) 必要非充分

(C) 充分必要　　(D) 既不充分也不必要

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = $(　　).

(A)0　　(B) 1　　(C) ∞　　(D) 不存在

4. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = a$,以下结论中,正确的是(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有定义且 $f(1) = a$

(B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某个空心邻域有定义

(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 的右侧邻近有定义

(D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 的左侧邻近有定义

5. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{|x|}{x} = $(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 不存在

二、设 $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x < 0; \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左右极限,极限及函数值.

三、设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & -1 < x < 0; \\ x+1, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 分别讨论$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -0.5} f(x)$.

B 级同步训练题

一、客观题

1. 若 $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,则(　　).

(A) $f(x)=g(x)$ (B) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=g(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ (D) 以上等式都不成立

2. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不是充分条件也不是必要条件

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-2, & x>0; \\ 1, & x=0; \\ \sin x-\cos x, & x<0. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 不存在

4. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}=$(　　).

(A) 0 (B) π (C) 不存在 (D) 0 或 π

5. 设 $f(x)=\dfrac{4}{2+3^{\frac{1}{x}}}$,则 $f(0^-)=$ ______.

二、讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{1}{x-1}$ 的存在性.

三、设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,试问极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$ 是否存在?

四、用分析定义证明

1. $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$. 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

五、已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$,试用极限定义证明:$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}$.

六、若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,且 $a>b$,

证明:存在点 x_0 的某去心邻域,使得在该邻域内,$f(x)>g(x)$.

辅导与参考答案

A 级同步训练题

一、客观题

1. (C). **2.** (D). **3.** (B). **4.** (C). **5.** (B).

二、解:$f(0-0)=1$, $f(0+0)=1$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, $f(0)$ 不存在.

三、解:$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to -0.5}f(x)=\lim\limits_{x\to -0.5}(x-1)=-1.5$,

$f(0-0)=-1$, $f(0+0)=1$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com