成人高等教育理工科试用教材

高等数学

下册

李万选　主编

南开大学出版社

成人高等教育理工科试用教材

高等数学

下册

李万选 主编

南开大学出版社

1988年

内 容 提 要

本书分上下两册出版．下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷数值级数、无穷函数级数共六章．

本书可作为成人高等学校（夜大学、函授大学、职业大学、电视大学等）理工科的数学教材，也可作为普通高等工科院校的数学教材．

高 等 数 学

主 编 李万选

责任编辑 王家骅

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

河北工学院印刷厂印刷

（天津丁字沽河北工学院院内）

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：10.25

字数：253千 印数：1—10.000

ISBN7-310-00153-2/O·30 定价：2.20元

目　录

第十一章　多元函数微分学

前面我们讨论了一元(一个自变量)函数的极限、连续、微分学和积分学. 多元(两个以上自变量)函数概念及其微分学是一元函数概念及其微分学的推广和发展，它们有许多共同之处，但也存在着差异，然而从二元发展到三元以至更多元函数，就没有什么本质区别了. 因此本章我们重点讲述二元函数及其微分学.

§11-1　多元函数概念

到目前为止，我们所讨论的对象都是一元函数$y=f(x)$，而且我们总是假设它在某个特定的集合上有定义而加以讨论. 对于二元函数以及多元函数，我们也有类似的限制，为此我们介绍平面点集的基本概念.

§11-1-1　平面点集初步

我们知道任一实数x对应数轴上的一点M，x就叫做这个点的坐标. 全体实数的集合曾记为R，也可记作R_1，称为一维空间. 同样，任一二元有序数组(x, y). 对应平面上的一个点$M(x, y)$. 一切二元数组(x, y)所构成的集合记为R_2，称为二维空间. 把这个概念加以推广，把一切n元有序数组$(x_1, x_2, \cdots x_n)$所构成的集合记为R_n，称为n维空间，$(x_1, x_2, \cdots x_n)$称为R_n中的点，记为$M(x_1, x_2, \cdots x_n)$. 其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为点M的坐标. 与二维、三维空间类似，设$M_1(x_1, x_2, \cdots, x\ )$和$M_2$

$(y_1, y_2, \cdots, y\ )$是 R_n 中的两个点，我们规定这两点间的距离为

$$|M_1 - M_2| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y\ )^2}$$

在二维空间 R_2 中，三角形任两边之和总大于第三边这个事实，用上面的符号来表达，即对 R_2 中的任意三点M_1、M_2、M_3都有

$$|M_1 - M_3| \leqslant |M_1 - M_2| + |M_2 - M_3|$$

这是分析学中一个重要的不等式——三角不等式，它也可推广到 n 维空间 R_n 中去，设$M_1, M_2, \cdots, M_n$是 R_n 中的n 个点，则有

$$|M_1 - M_n| \leqslant |M_1 - M_2| + |M_2 - M_3| + \cdots + |M_{n-1} - M_n|.$$

为了今后叙述方便，我们引入以下一些定义（以平面点集为主）。

1．邻域

在 R_1 中给定点$M_0(x_0)$及 $\delta>0$，我们称集合

$$\{x \,\|\, |x - x_0| < \delta\}$$

为x_0的 δ邻域，在数轴上就是中心为x_0，长度为 2δ 的对称开区间$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$。完全类似地可以定义 R_2 中的邻域概念。

设$M_0(x_0, y_0) \in R_2$，$\delta>0$，则集合

$$\{M \,|\, |M - M_0| < \delta,\ M \in R_2\},$$

或

$$\{(x, y) \,|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\ \}$$

称为点M_0的δ邻域，记作$N(M_0, \delta)$。从几何上看，$N(M_0, \delta)$就是以 M_0 为圆心，δ 为半径的圆内的一切点。

在 R_3 中给定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$\delta>0$，集合

$$N(M_0, \delta) = \{M \,\|\, |M - M_0| < \delta, M \in R_3\}$$

称为点 M_0 的 δ 邻域。从几何上看，它是以M_0为球心，δ为半径的球内的一切点（不包括球面上的点）。

这一概念可推广到 R_n 中。

2．区域和闭区域

设 E 为 R_2 中的点集，$P\in E$，如果存在点 P 的某个邻域 $N(P,\delta)$，使它全部属于E，则称 P 为集合 E 的内点（图 11-1）。

图 11-1

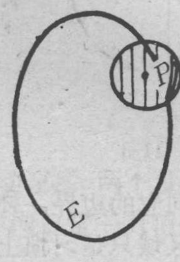

图 11-2

如果点 P 的任意一个邻域中既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（P可以属于E 也可以不属于E），则称P 为 E的边界点（图 11-2）。E的边界点的全体称为E的边界。

例 1 如果点集E是满足不等式

$$x_2+y^2<1$$

的点的全体，则E中的任何点皆为内点；单位圆周$x^2+y^2=1$上的点(x,y)皆为E的界点，且圆周$x^2+y^2=1$是点集E的边界。但它不属于E（图 11-3）。

例 2 集 $G=\{(x,y)|x^2+y^2\geqslant 1$。则单位圆外面的点，即满足$x^2+y^2>1$ 的点(x,y)，皆为 G 的内点，单位圆 $x^2+y^2=1$ 是 G 的边界，此边界属于 G（图 11-4）。

如果E的点都是E的内点则称E为开集。

若集E是开集，且E中任两点都能用属于E的折线连接起来（称E的这种性质为连通性），则称这样的开集为区域。即，区域是连通的开集。例 1 中的集E是区域。

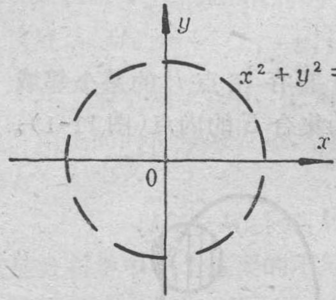

图 11-3

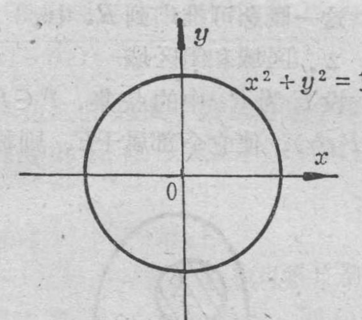

图 11-4

区域连同它的边界，称为闭区域．例 2 中的集G是闭区域．这里所谓闭区域只是习惯上的叫法，严格说来按照区域的定义，闭区域已不成其为区域了．但我们以后多是研究具体的区域，在不需要区分区域和闭区域时，我们统称为区域．

如果存在以原点为圆心的圆，使集E全部包含在此圆内，则称E为有界集．

例 3 集$E=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$是区域，且有界．从几何上来看，它是以原点为心，半径分别为 1 与 2 的两个同心圆所夹的环内部分（图 11-5）．

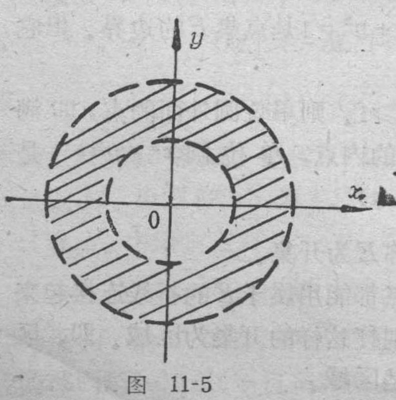

图 11-5

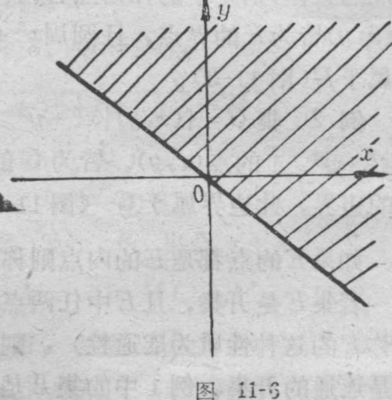

图 11-6

例 4 集$G=\{(x,y)|x+y>0\}$是无界区域(图11-6)

§11-1-2 多元函数的定义

在一元函数微积分中，讨论的只是一个自变量和一个因变量的函数。但在实际问题中，经常遇到多个变量之间的依赖关系。

例 1 动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2.$$

这里动能E_k是随着物体的质量m和运动速度v两个量的变化而变化的。当m、v在一定范围($m>0$, $v>0$)内取定一对值时，E_k的值就随之确定。

例 2 圆柱体的体积V和它的底半径r、高h之间具有关系

$$V=\pi r^2h.$$

这里，V是随着r、h的变化而变化的，当r、h在一定范围($r>0$, $h>0$)内取定一对值时，V的对应值就随之确定。

例 3 长方体的体积

$$V=xyz.$$

这里，V是随着长方体的长x、宽y和高z三个量的变化而变化的。当x、y、z在一定范围($x>0,y>0,z>0$)内取定一组数值时，V的对应值也就随之确定。

上述三例皆为多元函数的实例，它们的共同特点都是对于某个范围内的每个点，依照一定的规律都恰有一个确定的数值与之对应。下面给出二元函数的定义。

设D是R_2中的一个点集，f是一个确定的对应规律，如果对于D中的每个点$M(x,y)$，通过f都恰有一个数z和它对应，

即$M\xrightarrow{f}z$，我们就说f是D上的二元函数，按习惯记作

$$z=f(M)\text{或}z=f(x,y).$$

习惯上也说z是$M(x,y)$的二元函数。一般都把x和y叫做自变量，z叫做因变量，D叫做函数的定义域。

当自变量x和y取定值时，因变量的相应值叫做函数值。所有函数值的全体组成的集合叫做值域。

函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处的函数值记为$f(x_0,y_0)$。例如对于

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sin y+x^2e^y$$

有
$$f(0,0)=\sqrt{1-0^2-0^2}+\sin 0+0^2e^0=1,$$

$$f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}+\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16-\pi^2}+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$+\sin\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{23}+\sin\frac{1}{3}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{3}}.$$

二元函数的定义域，即自变量x,y的取值范围，可以是全平面R_2，也可以是这个平面的一部分。

例 1 对于

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sin y+x^2e^y$$

因为限于实数域，根号内不得取负值，故其定义域为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\},$$

即是以原点为圆心，以 1 为半径的圆域。

例 2 求二元函数

$$z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$$

的定义域。

解 仍由根式函数的要求可知，其定义域为同时满足不等式

$$x^2+y^2-1\geqslant 0,\ 4-x^2-y^2\geqslant 0$$

的点(x,y)所组成的集合，即

$$\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

它是以原点为圆心，分别以 1 及 2 为半径的两个同心圆周之间的环形部分。

例 3 求二元函数 $z=\ln(x+y)$的定义域。

解 该函数要求$x+y>0$，故其定义域为

$$\{(x,y)\,|\,x+y>0\},$$

共图形见图 11-6。

例 4 求二元函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$的定义域。

解 此函数的定义域应为这两项各自定义域的公共部分：

$$\begin{cases}|x|\leqslant|a|,\\ x-y>0\end{cases}$$

$|x|\leqslant|a|$为 $x=|a|$及$x=-|a|$两条直线之间的部分，而$x-y>0$为直线 $x-y=0$ 的右下半平面，其公共部分为图 11-7 所示的阴影部分。

二元函数的概念，可以推广到n 元函数：

设D是 R_n 中的一个点集，f 是一个确定的对应规律，如果对于D中的每个点 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，通过f 都恰有一个数 y 和它相对应，我们就说给定了一个n 元函数或n 维空间的点的函

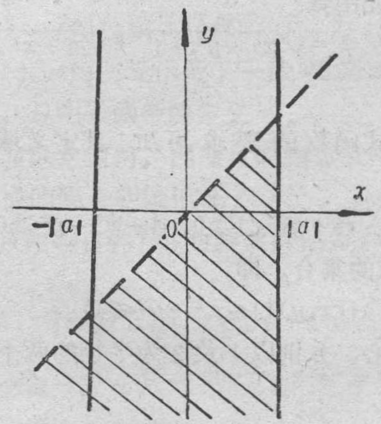

图 11-7

数，习惯记作

$$y=f(M) \quad \text{或} \quad y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

其中，M点的坐标$x_1,x_2\cdots,x_n$叫做自变量，D叫做函数的定义域。

例 3 就是一个三元函数。

§11-1-3 二元函数的几何表示

我们知道，一元函数$y=f(x)$通常是表示为xoy坐标平面上的一条曲线。对于二元函数，我们可以用直角坐标系给出几何解释。

设二元函数

$$z=f(x,y) \qquad (x,y)\in D$$

在定义域D每取定一点$P(x,y)$，按照函数关系就可取得一z值，空间中点$M(x,y,f(x,y))$的坐标满足函数式$z=f(x,y)$。当$P(x,y)$跑遍定义域D，相应的点$M(x,y,f(x,y))$就绘出一个曲

面，这一曲面上点的坐标都满足函数式 $z=f(x,y)$，因此这个曲面就是二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(见图11-8)。

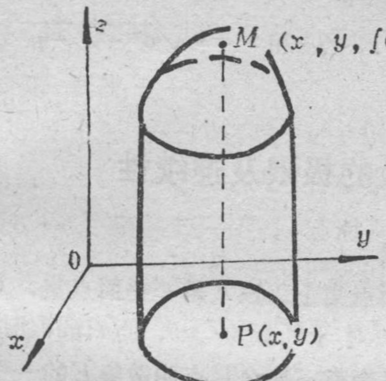

图 11-8

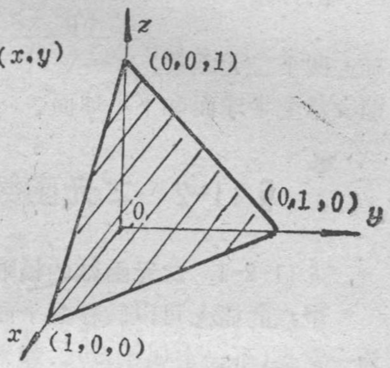

图 11-9

例如，从空间解析几何可知，函数 $z=1-x-y$ 的图形是平面(见图11-9)。

函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是定义在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的上半球面(见图11-10)。

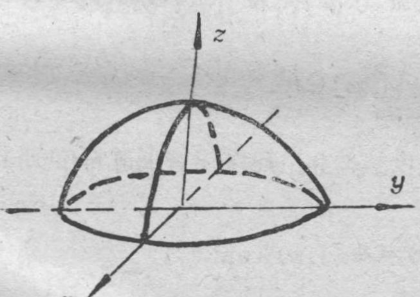

图 11-10

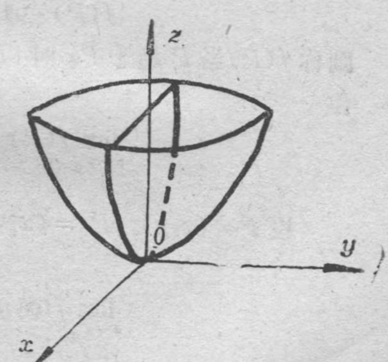

图 11-11

函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是定义在 xoy 全平面上的以原点为顶点的旋转抛物面(见图 11-11)。

由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

确定两个二元函数，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面。

§11-2　二元函数的极限及连续性

§11-2-1　二元函数的极限

聚点的概念可以转移到平面点集上。设 E 是一平面点集，P 为一定点(不一定属于 E)。如果对于任意的 $\varepsilon>0$，点 P 的 ε 邻域(圆域或方域)内含有 E 的无穷多个点，那么 P 点叫做集 E 的一个聚点。可以证明：

如果 E 是一个有界的无穷点集，那么 E 至少有一个聚点。

定义　设 E 是一个平面点集，P_0 是 E 的聚点，函数 $f(P)$ 在 E 有定义，A 为一个常数。若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在某个正数 δ，使得当 $0<|P-P_0|<\delta$ 且 $P\in E$ 时，恒成立

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(P)$ 当 P 趋于 P_0 时以 A 为极限(或 $f(P)$ 收敛于 A)，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,\ P\in E.$$

设 $P=(x,y)$，$P_0=(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 也可写作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

这时定义中的不等式 $0<|P-P_0|<\delta$ 就是

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta .$$

例 1 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$

证 此时，$|P-{}_0P|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$任给 $\varepsilon>0$，要使

$$|\sqrt{x^2+y^2}-0|<\varepsilon$$

即要
$$|P-P_0|<\varepsilon$$
取$\delta=\varepsilon$，当$0<|P-P_0|<\delta$时，就有
$$|\sqrt{x^2+y^2}-0|<\varepsilon,$$

依极限定义则有
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0 .$$

一元函数极限的一些运算规律(如函数的和、差、积、商等极限运算规律)，都可以推广到二元函数，证明方法也基本相同，这里从略。例如，把x或y看作x及y的二元函数，a与b是任何实数，不难得出

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}x=a \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}y=b$$

运用极限运算规律即可得

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to}}cx^m y^n=ca^m b^n,$$

这里m及n是非负整数，c是一个常数，于是对二元多项式$P(x,y)$有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}P(x,y)=P(a,b)$$

同样，利用极限运算规律，对二元有理函数(有理分式)$R(x,y)$有

$$\lim_{\substack{x\to a\\y\to b}} R(x,y)=R(a,b),$$

这里 $R(x,y)$ 的分母必须在 (a,b) 不为零。

对于二元函数也有类似于一元函数的一些定理。

定理 1 设 $u=\varphi(P)$ 的值所成的集合为 F，点 B 为 F 的聚点。$P\in E$（平面点集），$P_0(x_0,y_0)$ 是 E 的聚点。若

(1) $$\lim_{P\to P_0}\varphi(P)=B,$$

(2) $$\lim_{u\to B}f(u)=A,$$

(3) 在 P_0 点附近，只要 E 中点 $P\neq P_0$，就有 $u\neq B$，则

$$\lim_{P\to P_0}f[\varphi(P)]=A.$$

定理 2 设 $E_1\subseteq E$（平面点集），P_0 是 E_1 的聚点，$f(P)$ 在 E 有定义。若

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.\ x\in E,$$

则 $$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.\ x\in E_1,$$

这两个定理的证明，与一元函数相应的定理的证明基本相同，这里从略。

例 2 论讨极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

是否存在。

解 当 $y=mx(x\neq0)$ 时，

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

因此，当 (x,y) 沿过 $(0,0)$ 的直线 $y=mx$ 趋向 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向 $\frac{m}{1+m^2}$。这一数值随着直线 $y=mx$ 的斜率 m 改变而改变，于是