GAODENG SHUXUE SIXIANG FANGFALUN

高等数学
思想方法论

● 邓 鹏 编著

四川教育出版社

高等数学思想方法论

邓　鹏　编著

四川教育出版社
2003年·成都

图书在版编目(CIP)数据
高等数学思想方法论/邓鹏编著. －成都:四川教育出版社,2003
ISBN 7－5408－3908－2

Ⅰ.高 ... Ⅱ.邓 ... Ⅲ.高等数学－思想方法
Ⅳ.013－03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059912 号

责任编辑:李岷聪
版式设计:张　涛
封面设计:李一梅
责任校对:王立戎
责任印制:黄　萍

高等数学思想方法论
邓　鹏　编著

出版发行　四川教育出版社
　　　　　(成都市盐道街 3 号　邮政编码　610012)
出 版 人　唐瑾怀
照　　排　成都勤慧彩色制版印务有限公司
印　　刷　成都书林印刷厂
版　　次　2003 年 8 月第 1 版
印　　次　2003 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　8.625　插页 2
字　　数　215 千
印　　数　1—3000 册
书　　号　ISBN 7－5408－3908－2/G·3648
定　　价　20.00 元
本书若出现印装质量问题,请与本社调换。电话:(028)86660101

序

近年来出现了不少关于数学史的好著作,显示出人们对研究数学发展的兴趣已日益增长.数学作为自然科学的基础已成为人类社会进步的标志.学习数学、了解数学和运用数学已是现代社会生活的需要.一部优秀的数学史著作能激发人们对数学的热情,促使人们去探索与研究数学.

目前,众多介绍数学史的著作,大体上按时间顺序为主线,从数的产生到数系的发展,从初等数学到高等数学,内容上以介绍历史人物和事件背景为主.而本书中则就高等数学的几个主要分支(微积分,解析几何,线性代数,常微分方程及概率统计等)的重要概念、命题的产生背景和发展为主线,着重介绍思想、方法的产生过程.更值得一提的是本书从唯物辩证法的认识论和方法论方面,从数学美学方面,去挖掘蕴涵在高等数学内容和体系中的辩证思想与美学思想,这是本书的一个显著特点.另外,本书还从我国丰富的古典数学内容中去努力挖掘与高等数学相联系的思想方法,力求揭示我国高等数学思想方法的萌芽与发展过程,从而探索我国高等数学的发展过程及其与国外的联系和影响.

本书是作者多年从事数学史研究与教学的产物.我相信,广大读者特别是广大数学爱好者必能从阅读本书中启迪思维、开阔视野和提高对数学的兴趣

顾永兴

2003年5月于重庆大学

前　言

17世纪，变量数学问世，数学进入了一个新的发展阶段．解析几何的创立，微积分的发明，无穷级数、微分方程、线性代数、概率统计的快速发展，组成了一个庞大的数学集团——高等数学．现在，高等数学已形成完整的体系和成熟的内容，条理清晰，逻辑严谨．那么，高等数学中的规律是如何找到的呢？高等数学中的证明是怎样发现的呢？事实上，严格的数学规律的发现与证明往往要经历一个不甚严格的过程，在这个过程中，思想与方法始终起着决定性作用．一个真正良好的思想和方法，常常比由它发展而成的定理重要得多．然而，数学专著或教材，由于追求其严谨与简练，常常把探索定理、发现证明的思路作为修建大厦的“脚手架”拆除了，把证明中的思想方法作为建筑图纸收藏起来了．正如雅可比在谈论高斯时所说：“他的证明是僵硬地冻结着的，人们必须首先将它们熔化出来．”另一位数学家阿贝尔也说：“高斯像只狐狸，用尾巴扫砂子来掩盖自己的足

迹."他说:"在我看来,一个人如果要在数学上有所进步,他必须向大师们学习,而不应向徒弟们学习."那么,向大师们学习什么?主要学习数学研究中的思想与方法,探索数学规律与证明的思维过程.因此,我们就需要把凝固的东西熔化开来,恢复建筑物的蓝图,找到数学家们探索的足迹.这就是写作本书的基本意图.

本书阐述的高等数学思想方法,主要侧重于几个方面:概念的形成与演变;重要思想方法的确立与发展;重大理论的奠定与影响;不同时期对高等数学的认识,以及由此产生的与高等数学发展的关系.特别是注重挖掘蕴涵在高等数学内容中的辩证思想与美学思想.对于中国古典数学中孕育的高等数学思想方法,本书力求反映当时数学的真,揭示原先质朴的美.

本书得到了西华师范大学出版基金的资助,我国著名复分析专家、重庆大学博士生导师顾永兴教授在百忙中为本书作序,在此一并致谢.

由于作者各方面水平所限,书中的错误与缺点在所难免,希望读者不吝赐教.

邓 鹏

2003 年 4 月于西华师大

目　录

目　录

目 录

目　录

1 微积分的思想方法

1.1 微积分思想的孕育

1.1.1 欧多克索斯的“穷竭法”

微积分思想的早期孕育，实际上可追溯到古希腊，欧多克索斯（Eudoxus，公元前 408～前 355）是古希腊柏拉图（Plato，公元前 427～前 347）时代最伟大的数学家和天文学家．他假定量是无限可分的，并提出如下著名原理：

如果从一量中减去不小于它的一半的部分，从余量中再减去不小于它的一半的另一部分，如此继续下去，则最后留下一个小于任何给定的同类量的量．

这一原理所揭示的思想方法，被人们称为“欧多克索斯穷竭法”．欧多克索斯还证明了棱锥体积是同底同高的棱柱体积的三分之一，以及圆锥体积是同底同高的圆柱体积的三分之一．但他没有明确的极限思想．

阿基米德（Archimedes，约公元前 330～前 275）对穷竭法作出了最巧妙的应用，他在《论球和柱体》一书中，第一次出现了球和球缺体积的正确公式．他指出，如果圆柱的底等于球的大圆，圆柱的高等于球的直径，则球的表面积恰好等于圆柱的总面积的$\frac{2}{3}$，圆柱的体积恰好等于球的体积的$\frac{3}{2}$．由此我们不难得出大家熟悉的公式：

$$S=4\pi R^2,\quad V=\frac{4}{3}\pi R^3 .$$

这些结果是通过一系列命题一步一步推导出来的，这个过程蕴涵着积分思想. 为了更好地理解穷竭法，举一个具体的例子.

为证“两圆面积与它们直径的平方成正比”，用穷竭法的证明如下：

设大小圆面积分别是 S_1 与 S_2，其直径分别是 D_1 与 D_2. 若比例式 $S_1:S_2=D_1:D_2$ 不成立，则存在 $S>0$，使 $S_1:S=D_1^2:D_2^2$，其中 S 是另一个比 S_2 小（或大）的圆的面积. 若 $S<S_2$，则可在面积为 S_2 的圆内作一面积为 S' 的内接多边形，使 $S<S'<S_2$，（根据阿基米德公设，可使 $S_2-S'<S_2-S$）. 在面积为 S_1 的圆内作出与上述多边形相似的内接多边形，设其面积为 S''，则有 $S'':S'=D_1^2:D_2^2=S_1:S$. 因 $S'>S$，故导出 $S''>S_1$，这与假设矛盾. 同理可证，当 $S>S_2$ 时也会导致矛盾.

在上面的证明过程中，除用到相似多边形的面积比等于对应线段的平方比这一性质外，就是阿基米德公设与双重归谬法，这在逻辑上是十分严密的. 穷竭法的基本思想标志着极限概念的轮廓已在古希腊问世.

1.1.2 开普勒的“旋转体体积”

德国天文学家、数学家开普勒（Kepler，1571～1630）在1615年发表《测量酒桶的新立体几何》，论述了求圆锥曲线围绕其所在平面上某直线旋转而成的立体体积的积分法. 开普勒方法的思想是用无数个同维无穷小元素之和，来确定曲边形的面积及旋转体的体积. 例如，他认为球的体积是无数个小圆锥的体积之和，这些圆锥的顶点在球心，底面则是球面的一部分. 他又把圆锥看成是极薄的圆盘之和，并由此计算出它的体积. 然后，进一步证明球的体积是半径乘以球面面积的$\frac{1}{3}$.

开普勒考虑的另一个例子是由半径为 R 的圆围绕其所在平面上的与圆心距离为 d 的垂直轴旋转而成的圆环，他证明这个圆环的体积等于该圆的面积与圆心经过的路程之积．即

$$V=\left(\pi R^2\right)\left(2\pi d\right)=2\pi^2R^2d.$$

他推导这一公式的办法是：用通过旋转轴的平面把圆环分成无穷多个内侧较薄、外侧较厚的垂直薄圆片，而把每个薄圆片又分成无穷多个横截面为梯形的水平薄片．先推导出每个圆片的体积是 πR^2h，其中 $h=\dfrac{h_1+h_2}{2}$ 是圆片最小厚度 h_1 与最大厚度 h_2 的平均值，亦即圆片在其中心处的厚度．然后他进一步推算

$$V=(\pi R^2)(\sum h)=(\pi R^2)(2\pi d).$$

这里，开普勒将无穷的思想具体而彻底地用于处理求积问题，这给 17 世纪无穷小分析提供了思想源泉．

1.1.3 卡瓦列里的“不可分量原理”

开普勒的直接继承者是意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri，1598～1647），他对数学的最大贡献是 1635 年发表了名为《用新方法促进连续不可分量的几何学》，他认为“线”是由无限多个点组成的；“面”是由无限多条平行线组成的；“体”是由无限多个平行平面组成．他分别把这些元素叫做线、面和体的“不可分量”．他建立了一条关于这些不可分量的普遍原理，后称为“卡瓦列里原理”：

两个等高的立体，如果它们的平行于底面且离开底面有相等距离的截面积之间总有一定的比，那么这两个立体的体积之间也有同样的比．

卡瓦列里利用这一原理计算出了许多立体图形的体积．然而，卡瓦列里对积分学创立最重要的贡献是他利用平面上的不可分量原理给出了相当于下列的积分公式

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

从而使早期积分学突破了计算的现实原型而向一般方法过渡.

卡瓦列里对这一基本结果的思路是，首先考察 n=1 时的情形. 为此，作平行四边形 $ABCD$（如图 1-1），在 $ABCD$ 内任作一平行于 AB 的截线 EF，EF 与 AC 相交于 G. 设 $AB=a$，$EG=x$，$GF=y$，则 $x+y=a$，由不可分量原理，

$$S_{\Delta ACD} = \sum_D^A x, S_{\Delta ABC} = \sum_C^B y, S_{\square ABCD} = \sum_D^A a.$$

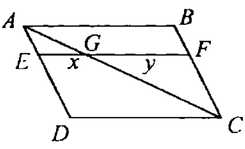

图 1-1

由对称性

$$\sum_D^A a = \sum_D^A (x+y) = \sum_D^A x + \sum_D^A y = 2\sum_D^A x.$$

特别地，取 $ABCD$ 为正方形，则

$$\sum_D^A x = \frac{1}{2}\sum_D^A a = \frac{1}{2}a^2.$$

用现代符号描述即

$$\int_0^a x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^2.$$

用类似的方法，卡瓦列里一直推到 $n=9$ 的情形，即

$$\int_0^a x^9 \mathrm{d}x = \frac{1}{10}a^{10}.$$

这说明卡瓦列里的不可分量方法比他的前人包括开普勒所使用的方法更接近于普通积分学的算法.

1.1.4 笛卡尔的“圆法”

解析几何的诞生，改变了以前主要采用几何方法研究积分学问题，法国数学家笛卡尔（Descartes，1596～1650）在《几何学》中提出了求切线的所谓“圆法”，而实际上是一种代数方法.

求曲线 $y=f(x)$ 过点 $P(x, f(x))$ 的切线. 笛卡尔的方法是首先确定曲线在点 P 处的法线与 x 轴的交点 C 的位置，然后作该法线的过点 P 的垂线，便可得到所求的切线. 为了确定点 P 处的法线，笛卡尔提出了所谓"重交点"的概念，而这又必然要涉及极限和无穷小思想. 因此，笛卡尔的代数方法对于推动微积分的早期发展具有很大的影响，牛顿（Newton，1642～1727）就是以笛卡尔"圆法"为起点而踏上研究微积分之路的.

1.1.5 费马的"极值法"

一个对建立微分学更为有效的方法是法国数学家费马（Fermat，1601～1665）给出的. 1637 年，他在《求最大值和最小值的方法》一书中，以与现在相类似的形式，给出了求切线和求极值的方法.

设函数 $f(x)$ 在点 a 处取极值 $f(a)$，费马用 $a+e$ 代替原来的未知量 a，并使 $f(a+e)$ 与 $f(a)$ 逼近，即

$$f(a+e) \sim f(a),$$

消去公共项后，用 e 除两边，再令 $e=0$，即

$$\left[\frac{f(a+e)-f(a)}{e}\right]_{e=0}=0,$$

由此方程求得的 a 就是函数 $f(x)$ 的极值点.

例如，用费马的"极值法"来确定怎样把长度为 b 的线段分成两段 x 和 $b-x$，使得它们的乘积

$$x(b-x)=bx-x^2$$

最大.

首先用 $x+e$ 代替 x，然后写出

$$b(x+e)-(x+e)^2 \sim bx-x^2,$$

消去相同项，得

$$be-2xe-e^2 \sim 0,$$