

电 大 五 年 制 大 专 （ 高 职 ） 导 学 教 材

（ 第 三 册 ）

《数学》

学习指导

叶惠英 主编



东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《数学》学习指导(第三册)/叶惠英主编. —南京:东南大学出版社, 2004. 10

电大五年制大专(高职)教育导学教材

ISBN 7-81089-756-X

I. 数... II. 叶... III. 数学—电视大学—教学参考资料 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 106085 号

《数学》学习指导(第三册)

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 宋增民
社 址 南京市四牌楼 2 号
邮 编 210096
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 8.5
字 数 218 千字
版 次 2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷
定 价 15.00 元

* 东大版图书若有印装质量问题,请直接向发行部调换,电话:025-83795801。

江苏电大五年制大专(高职)教育

教学资源建设指导小组

组 长：吴 进

副组长：骆苏菲 杨彩萍

组 员：史志勤 仲凤仪 朱 军 蒋静琪 徐云桦
刘新德 茆立良 陆伟新 叶惠英

编写说明

电大五年制大专(高职)2003 级各专业《数学》课程使用由江苏科技出版社出版的全国广播电视大学五年制高职教育《数学》教材。为了帮助不同基础层次的学生学好数学知识,根据江苏电大五年制大专(高职)数学课程教学要求,我们编写了这本导学教材,供 2003 级各专业学生和数学课程任课教师使用。

《〈数学〉学习指导》(第三册)编写体例包括各章知识点及学习目标、各章节学习指导和各章测试题。各章节学习指导包括各节知识结构、最低学习要求、知识点导读和综合练习。

其中每章各节综合练习提供了 A、B 两组,练习 A 选择“应知应会”的题目;练习 B 选择的题目中,一部分与主教材中的主要知识点配套,另一部分属于补充练习;少量带“*”的题目是本学期教学要求中的拓宽部分,供基础较好、学有余力的学生使用。根据工、文科各专业数学课程教学要求,文科各专业学生以 A 组题为主,工科各专业学生以 B 组题为主。工科各专业学生中学习困难较大者也可选择以 A 组题为基本练习。各章还提供了与教学内容及综合练习配套的 A、B 两组测试题,可以作为单元测验题。工科学生应首选测试题 B 进行测试,若成绩低于 60 分,则可以选择测试题 A 再测试;文科学生可以选择测试题 A 进行测试。

各章知识点学习目标 A 是指了解、知道;学习目标 B 是指理解、会用;学习目标 C 是指掌握、运用;学习目标 D 是指熟练掌握、灵活运用。

本书由叶惠英主编,吴进主审。参加编写的有黄隽、从日明、张洁、仲凤仪、凌佳、吕欣。由于我们编写水平有限,书中难免有考虑不周及错误之处,恳请各校师生在使用中批评指正。

编者

2004 年 10 月

目 录

第 12 章 空间图形	(1)
§ 12.1 平面	(2)
§ 12.2 空间直线	(8)
§ 12.3 空间直线与平面	(13)
§ 12.4 空间平面与平面	(20)
§ 12.5 简单多面体	(25)
§ 12.6 旋转体	(31)
§ 12.7 多面体与旋转体的体积	(36)
测试题 A	(40)
测试题 B	(42)
第 13 章 排列与组合、二项式定理	(45)
§ 13.1 两个基本原理	(46)
§ 13.2 排列	(49)
§ 13.3 组合	(54)
§ 13.4 二项式定理	(59)
测试题 A	(63)
测试题 B	(65)
第 14 章 概率与离散型随机变量	(67)
§ 14.1 随机事件	(68)
§ 14.2 随机事件的概率	(71)
§ 14.3 概率的运算法则	(74)
§ 14.4 随机变量及其分布	(78)
§ 14.5 离散型随机变量的数字特征	(78)
测试题 A	(81)
测试题 B	(83)
第 15 章 行列式与矩阵	(85)
§ 15.1 行列式	(86)
§ 15.2 矩阵	(94)
测试题 A	(103)
测试题 B	(105)
第 16 章 线性方程组	(107)
§ 16.1 线性方程组的概念	(107)
§ 16.2 消元法	(112)
§ 16.3 线性方程组解的判定定理	(117)
测试题 A	(122)
测试题 B	(125)

第 12 章 空间图形

I. 本章知识点、学习目标和参考学时

章 节	知 识 点	学习目标		参考学时	
		文科	工科	文科	工科
§ 12.1 平面	1. 平面的概念; 2. 平面的表示法与画法; 3. 平面的基本性质.	A A B	A B B	4	5
§ 12.2 空间直线	1. 空间直线的位置关系; 2. 平行线公理和等角定理; 3. 异面直线的概念、异面直线所成角、异面直线间的距离.	B A A	C B A	4	4
§ 12.3 空间直线与平面	1. 直线与平面的位置关系; 2. 直线与平面平行的判定定理和性质定理; 3. 直线与平面垂直的判定定理和性质定理; 4. 直线与平面所成角的概念与计算; 5. 三垂线定理及其逆定理.	B B A A A	C C B B B	6	6
§ 12.4 空间平面与平面	1. 平面与平面的位置关系; 2. 平面与平面平行的判定定理和性质定理; 3. 平面与平面垂直的判定定理和性质定理; 4. 二面角及其平面角的概念与简单计算.	B B A A	C C B B	5	5
§ 12.5 简单多面体	1. 多面体的概念; 2. 棱柱的定义及分类、几种特殊的棱柱; 3. 正棱柱的概念及性质、侧面积计算公式; 4. 棱锥的定义, 正棱锥的概念及性质、侧面积计算公式; 5. 棱台的定义, 正棱台的概念及性质、侧面积计算公式.	A A B B A	A A C C A	6	6
§ 12.6 旋转体	1. 旋转面与旋转体的概念; 2. 圆柱的定义、侧面展开图与轴截面特征、表面积计算公式; 3. 圆锥的定义、侧面展开图与轴截面特征、表面积计算公式; 4. 圆台的定义、侧面展开图与轴截面特征、表面积计算公式; 5. 球的定义、表面积计算公式; 6. 球缺的定义、表面积计算公式.	A B B A B A	A C C A C A	7	7
§ 12.7 多面体与旋转体的体积	1. 柱、锥、球的体积公式及应用; 2. 台体与球缺的体积公式及应用.	B A	C A	5	4
本章复习小结				3	3
合 计				40	40

II. 本章学习重点与难点

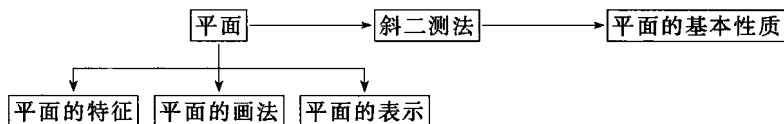
- 重点：**1. 空间两直线、直线与平面、平面与平面的位置关系；
2. 直线与直线、直线与平面、平面与平面平行和垂直的判定方法；
3. 直线与平面所成角的概念及简单计算；
4. 三垂线定理及其逆定理的简单应用；
5. 特殊的柱、锥、台的侧面积及体积计算公式及简单应用.

- 难点：**1. 空间观念的建立和空间图形的画法；
2. 异面直线和异面直线所成角、二面角的概念及其有关计算；
3. 直线与平面、平面与平面平行和垂直的性质定理及其应用；
4. 台体与球缺的有关计算.

III. 各节学习指导

§ 12.1 平面

一、知识结构



二、最低学习要求

1. 认识平面,知道平面的表示法,会画平面的直观图.
2. 知道斜二测画法,了解常用的平面图形的直观图的画法.
3. 了解立体几何中常用的文字语言和符号语言,初步会运用.
4. 初步理解平面的基本性质,会简单运用.

三、知识点导读

1. 平面的概念

平面是一个不加定义的原始概念,其基本特征是:① 平面是绝对平的. ② 平面没有厚度. ③ 平面是无限延展的.

平面可以看成空间一些特殊点组成的集合,它是一个无限集. 平面与点、直线一样,是研究空间图形的基本要素,也是空间图形的一个重要组成部分.

2. 平面的直观图的画法

作一个平行四边形,使得水平线与斜线的夹角为 45° ;斜线长是水平线长的一半.

3. 平面的表示法

(1) 图形表示：通常用一个平行四边形来表示平面的直观图. 有时根据需要也可以用三角形、梯形等其他图形来表示平面.

(2) 符号表示：通常用小写的希腊字母 α, β, γ 等表示平面, 也可以用平面的各个顶点字母来表示, 如平面 $ABCD$, 平面 ABC 等. 有时也用平面的对角线字母来表示.

4. 水平放置的平面图形的直观图的画法: ① 水平线段与原线段长相同. ② 垂直线段画成与水平线成 45° 角, 并且长度等于原长度的一半. 这种画法常称为斜二测法.

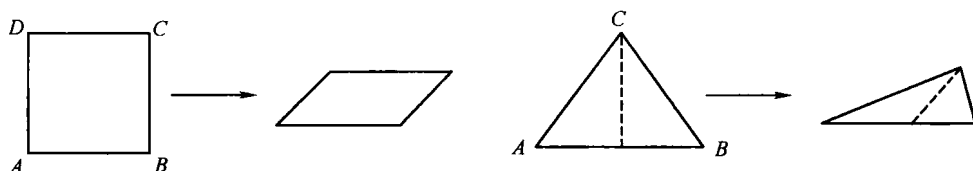
例 画出下列平面图形水平放置的直观图:

(1) 正方形; (2) 正三角形.

解: 作图步骤:

(1) 底边 $AB \rightarrow$ 两条竖直边 $AD, BC \rightarrow$ 边 DC .

(2) 底边 $AB \rightarrow$ 底边上的高 $\rightarrow$ 顶点 $C \rightarrow$ 连接 AC, BC .



学习时要熟悉常用的平面图形(如: 矩形、正方形、等腰三角形、正三角形、直角三角形、正五边形、正六边形、等腰梯形和圆)的水平放置的直观图的画法.

5. 立体几何作图规范

在平面几何中, 凡是解题者为了解题而添加的辅助线都画成虚线. 但是, 在立体几何中, 凡是被平面遮住的线, 都画成虚线或不画; 不被平面遮住的线都画成实线. 学习时要注意区别平面几何与立体几何中的虚、实线的画法.

6. 立体几何中常用的数学文字语言及其符号语言

在立体几何中, 通常用大写字母(如: $A, B, C, \dots$)表示点, 用小写的字母(如: $a, b, c, \dots$)表示直线, 用小写的希腊字母(如: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$)表示平面. 从集合观点来看, 直线、平面都可以看成是由点组成的点集, 点与直线、平面的关系就是集合中的元素与集合的关系, 所以借用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示. 例如, 点 P 在直线 a 上, 表示为 $P \in a$; 点 P 不在直线 l 上, 表示为 $P \notin l$. 直线与平面的关系类似于集合中的集合与集合的关系, 所以借用符号“ $\subset$ ”或“ $\cap$ ”表示. 下表是立体几何中常用的数学文字语言及其符号语言的关系.

	文字语言	符号语言
1	点 P 在直线 a 上	$P \in a$
2	点 P 在直线 a 外 (点 P 不在直线 a 上)	$P \notin a$
3	点 P 在平面 α 内	$P \in \alpha$
4	点 P 在平面 α 外 (点 P 不在平面 α 内)	$P \notin \alpha$
5	直线 a 在平面 α 内	$a \subset \alpha$
6	两直线 a, b 相交于点 A	$a \cap b = A$
7	直线 a 与平面 α 交于点 B	$a \cap \alpha = B$
8	两平面 α, β 相交于直线 a	$\alpha \cap \beta = a$

必须注意的是:用符号表示的语言,要读成文字语言,如“ $P \in \alpha$ ”读成“点 P 在平面 α 内”,而不是读成“点 P 属于平面 α ”.学习时要熟悉表中文字语言与相应的符号语言的等价转换,正确使用符号“ $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ ”表示点、直线和平面三者之间的关系.

7. 平面的基本性质

学习平面的基本性质,要从三个方面来把握:

(1) 语言表示与符号表示;可以详见主教材第 2—3 页.

(2) 作用:公理 1 的作用是判断直线是否在平面内.公理 2 的作用是判断两个平面是否相交,这是画两个平面的交线的依据.公理 3 及三个推论的作用是确定平面和判断两个平面是否重合.

(3) 应用平面的性质进行简单判断,或解释某些日常生活中的实例.

四、综合练习

练习 A

(一) 填空题

1. 画水平平面时,通常把平行四边形的锐角画成_____度,横边画成邻边的_____倍.
2. 平面通常用_____等表示,或用平行四边形的_____或_____表示.
3. 一个平面被另一个平面遮住时,被遮部分的线段应画成_____或_____.
4. _____的三点确定一个平面.
5. 两条_____或_____直线确定一个平面.

(二) 选择题

1. 下列命题中不正确的是().
A. 三角形是平面图形
B. 四边形是平面图形
C. 平行四边形是平面图形
D. 梯形是平面图形
2. 下列判断正确的是().
A. 三点确定一个平面
B. 一条直线和一点确定一个平面
C. 经过一点的两条直线确定一个平面
D. 经过一点的三条直线确定三个平面
3. 下列命题中正确的是().
A. 立体几何图形中的虚线仍然是辅助线
B. 一个平面把空间分成两部分
C. 有三个公共点的两个平面必重合
D. 二个平面把空间分成三部分
4. 若点 P 在直线 a 上, a 在平面 β 内,则 P 、 a 、 β 之间的关系可记作().
A. $P \in a \in \beta$ B. $P \in a \subset \beta$ C. $P \subset a \subset \beta$ D. $P \subset a \in \beta$

(三) 解答题

1. 你从“两个铰链,一把锁就能把门锁住”的事实中,看到什么几何问题?将锁锁在任意地方都行吗?

2. 要将翻开的硬书皮与书本合上,最少要粘合几处?为什么?

3. 为什么有的自行车后轮旁只需要安装一只撑脚?

4. 用符号表示下列语句:

(1) 点 A 在平面 α 内,点 B 在平面 α 外; (2) 平面 α 和 β 相交于直线 a ;

(3) 直线 a 与 b 相交于平面 α 内一点 M .

5. 如图 1(1)(2)(3) 分别表示两个平面相交,请你指出图中的不正确之处,并改正.

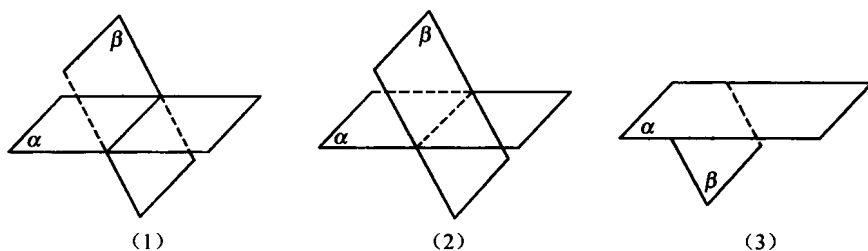


图 1

6. 画出下列图形水平放置的直观图,并写出作图步骤:

(1) 边长为 4 cm 的正方形;

(2) 底边长为 3 cm,腰为 4 cm 的等腰三角形.

练习 B

(一) 填空题

1. 写出确定平面的条件: _____.

2. 线段 AB 在平面 β 内,则直线 AB 与平面 β 的关系是 _____.

4. 将下列命题改为用语言叙述,判断它们的真假,并说明理由:

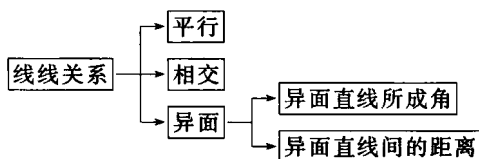
$$(1) \left. \begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \notin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \subset \alpha \quad (2) \left. \begin{array}{l} AB \subset \alpha \\ C \in AB \end{array} \right\} \Rightarrow C \in \alpha \quad (3) \left. \begin{array}{l} A \in \alpha \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A \in \alpha$$

5. 用符号表示语言“ α 与平面 β 相交于直线 l ,直线 a 在平面 α 内且与 l 交于 A 点,直线 b 在平面 β 内且与 l 相交于 B 点”,并画出图形.

6. 一条直线与两条平行直线都相交,证明这三条直线在同一平面内.

§ 12.2 空间直线

一、知识结构



二、最低学习要求

1. 记住空间两条直线的位置关系. 了解异面直线的概念, 能判断简单几何体中的异面关系.
2. 了解异面直线所成角的概念, 知道异面直线所成角的计算方法.
3. 了解异面直线间的距离的概念及计算方法.

三、知识点导读

1. 异面直线

定义 不在同一个平面内的两条直线叫做**异面直线**. 其中的“不在同一个平面内的两条直线”是指不可能找到一个平面同时包含这两条直线, 也可以理解为“既不平行也不相交的两条直线”, 但是不能理解为“分别在两个不同平面内的直线”.

2. 空间两直线的位置关系: 平行、相交或异面.

相交直线: 在同一平面内, 有且只有一个公共点;

平行直线: 在同一平面内, 没有公共点;

异面直线: 不在同一平面内, 没有公共点.

3. 异面直线的画法常用的有三种, 详见主教材第 8 页图 12-12(1)、(2)、(3).

4. **异面直线的判定定理** 过平面外一点与平面内一点的直线, 和平面内不经过该点的直线是异面直线.

如图 3, 在正方体中, 棱 AA_1 与 DC 是异面直线. 这是因为: 棱 DC 在平面 AC 内, 棱 AA_1 经过平面 AC 内一点 A 和平面 AC 外一点 A_1 , 且 $A \notin DC$.

5. 异面直线所成的角

(1) **定义** 设 a, b 是两条异面直线, 经过空间一点 O 分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$. 则相交直线 a', b' 所成的锐角或直角叫做**异面直线 a, b 所成的角**.

(2) 异面直线所成的角 α 的取值范围是: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

(3) 有关异面直线所成角的计算步骤:

① 在具体的问题中作出异面直线所成的角, 即找出异面直线所成角的位置. 这是本节的一个学习难点. 常用的方法是根据题目中图形的特征, 平行移动异面直线中的一条使它与

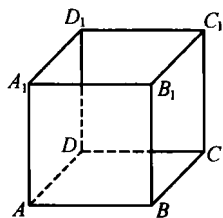


图 3

另一条相交(或平行移动两条异面直线成为相交直线),那么这两条相交直线所成的锐角或直角就是两条异面直线所成的角.

② 找出异面直线所成角所在的三角形.

③ 解三角形,得出结论.

例 1 如图 3,在正方体 AC_1 中,求:

(1) 异面直线 A_1D 与 BC_1 所成的角;

(2) 异面直线 DC_1 与 B_1C 所成的角.

解:(1) 连结 AD_1 ,则 $BC_1 // AD_1$,所以 A_1D 与 AD_1 相交所成的角即为异面直线 A_1D 与 BC_1 所成的角.

在正方体 AC_1 中, A_1ADD_1 是正方形,所以 $A_1D \perp AD_1$.

所以,异面直线 A_1D 与 BC_1 所成的角为 90° .

(2) 连结 AB_1 ,则 $DC_1 // AB_1$,所以 AB_1 与 B_1C 相交所成的角即为异面直线 B_1C 与 DC_1 所成的角.

连结 AC ,在正方体 AC_1 中, AB_1 、 B_1C 、 AC 均是面对角线,所以 $\triangle AB_1C$ 为正三角形.于是异面直线 B_1C 与 DC_1 所成的角为 60° .

6. 异面直线垂直是指两条异面直线所成的角为直角.空间两条直线垂直有两种情况:相交垂直和异面垂直,即两条直线垂直可以相交,也可以不相交.平面几何中的两条直线垂直仅指相交垂直.

7. 异面直线间的距离

(1) 异面直线的公垂线:是指与两条异面直线都垂直且相交的直线.

与两条异面直线都垂直的直线有无数条,但公垂线是唯一的.

(2) 异面直线间的距离:是指两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度.

(3) 求异面直线间距离的步骤:作(找) $\rightarrow$ 证 $\rightarrow$ 算.

例 2 在棱长为 2 的正方体 AC_1 中,求异面直线 A_1D 与 BC 间的距离.

解:在正方体 AC_1 中,因为 $BC \perp DC$, $A_1D \perp DC$,且 A_1D 、 BC 都与 CD 相交,所以 CD 的长即为异面直线 A_1D 与 BC 间的距离,故所求距离为 2.

四、综合练习

练习 A

(一) 填空题

1. 如图 4,正方体 AC_1 的棱长为 a ,则与 DD_1 平行的棱为 _____;与 A_1A 异面的棱为 _____; A_1A 与 DC 间的距离为 _____,所成角的大小为 _____; A_1B 与 DC 间的距离为 _____,所成角的大小为 _____.

2. 用一张矩形的纸对折两次,则折痕之间的关系是 _____.

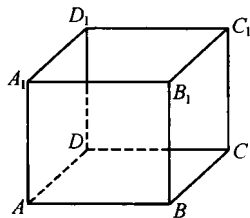


图 4

(二) 选择题

- 下列命题正确的是().
 - 两直线垂直,那么它们一定相交
 - 若 $a \perp c, b \perp c$, 则 $a \perp b$
 - 若 a 与 b 异面, b 与 c 异面, 则 a 与 c 异面
 - 若 $a \parallel b, b \parallel c$ 则 $a \parallel c$
- 设两条异面直线所成的角为 θ , 则角 θ 的范围是().
 - $0^\circ < \theta < 180^\circ$
 - $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$
 - $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$
 - $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
- 若 a, b 是两条异面直线, 则下列命题中, 正确的是().
 - 与 a, b 都垂直的直线只有一条
 - a 与 b 的公垂线只有一条
 - a 与 b 的公垂线的长就是 a, b 间的距离
 - a 与 b 的公垂线有无数条
- 若直线 a 垂直直线 c , 直线 b 垂直直线 c , 则 a 与 b 的位置关系是().
 - 平行
 - 相交
 - 垂直
 - 以上都不正确
- 两条异面直线指的是().
 - 不同在一个平面内的两条直线
 - 分别在某两个平面内的直线
 - 既不平行又不相交的两条直线
 - 平面内的一条直线和平面外的一条直线

(三) 解答题

- 画两个相交平面, 在这两个平面内各画一条直线使它们成为:
 - 平行直线;
 - 相交直线;
 - 异面直线.

- 如图 5, 将一张长方形的纸片 $ABCD$ 对折一次, EF 为折痕, 再打开竖立在桌面上, 连结 AD, BC , 求证:

(1) $AD \parallel BC$;

(2) $\angle ADE = \angle BCF$.

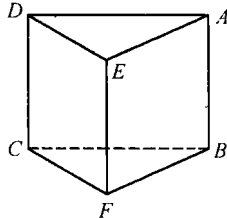


图 5

3. 在空间四边形 $ABCD$ 中, $A \notin \text{平面 } BCD$,

(1) 画出图形;

(2) 判断 AB 、 BC 、 CD 、 DA 、 AC 、 BD 中, 两两所在直线的位置关系.

练习 B

(一) 填空题

1. 如图 6, 在正方体 A_1C 中, 棱长为 a , 则与对角线 AC_1 异面的棱为 _____; A_1B 与 DC_1 间的距离为 _____; 所成角的大小为 _____; A_1B 与 B_1C_1 所成角的大小为 _____; A_1C_1 与 B_1C 所成角的大小为 _____.

2. 空间四边形 $ABCD$ 中, $AC = a$, $BD = b$, AC 与 BD 所成角为 60° , E 、 F 、 G 、 H 分别为 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 _____.

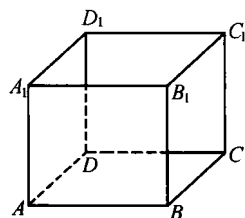


图 6

(二) 选择题

- 若 a 与 b 是异面直线, 则和 a 与 b 都垂直的直线().
A. 不存在 B. 只有一条 C. 有二条 D. 有无数条
- a, b, c 是空间三条直线, 若 $a \parallel b$, a 与 c 相交, 则 b 与 c 的位置关系是().
A. 相交 B. 异面 C. 共面 D. 异面或相交
- 若 a 与 b 是异面直线, 直线 c 平行直线 a , 则 b 与 c ().
A. 一定是异面直线 B. 一定是相交直线
C. 不可能是平行直线 D. 不可能是相交直线
- 若 a, b 是异面直线, b, c 是异面直线, 则 a, c 的位置关系是().
A. 异面 B. 平行或异面
C. 相交或平行 D. 相交、平行或异面

(三) 解答题

1. 若空间四边形的两条对角线互相垂直, 试判断顺次连结各边中点得到四边形的形状, 并证明你的结论.

2. 如图 7, 长方体的长和宽均为 4 cm, 高是 2 cm, 试求:

(1) BC 和 $A'C'$ 所成角的正切值;

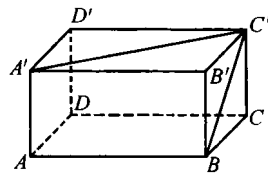


图 7

(2) AA' 和 BC' 所成角的正切值;

(3) CD' 和 BC' 所成角的余弦值;

(4) $A'B'$ 和 DD' , $B'C'$ 和 CD 的距离.

3. 在空间四边形 $ABCD$ 中, 设 AB 、 BC 、 CD 的中点分别为 P 、 Q 、 R , 且 $PQ = 2$, $QR = \sqrt{5}$, $PR = 3$, 求异面直线 AC 与 BD 所成的角.